

А. Н. МАЛАХОВ

ФЛУКТУАЦИИ В АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМАХ



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1968

Флуктуации в автоколебательных системах, Малахов А. Н., «Наука», Главн. ред. физ.-мат. лит., 1967 г.

В книге подробно и систематически излагается теория флуктуаций в автоколебательных системах. Основное внимание уделяется рассмотрению флуктуаций амплитуды и частоты, а также анализу ширины и формы спектральной линии автоколебаний различных автогенераторов, обладающих естественными и техническими шумами.

Первая часть содержит математический аппарат спектрально-корреляционного анализа случайных процессов (в том числе случайных процессов с неинтегрируемыми спектрами) и их преобразования линейными системами, а также физические аспекты электрических шумов и флуктуаций параметров, существующих в реальных радиогенераторах. Во второй, основной, части рассматривается общая теория формы и ширины спектральной линии колебания, обладающего как стационарными, так и нестационарными флуктуациями амплитуды, фазы и частоты, подробно анализируются естественные и технические флуктуации в простейших генераторах, кварцевых генераторах и генераторах со многими степенями свободы. Далее исследуются процессы синхронизации генераторов с шумами, рассматриваются флуктуации в генераторах СВЧ, в параметрических и квантовых генераторах. Третья часть посвящена анализу различных методов экспериментального исследования флуктуаций амплитуды и частоты радиогенераторов. Затем следуют Приложения, где приводятся вспомогательные математические сведения. Табл. 3, рис. 145, библиограф. 349 назв.

Аскольд Николаевич Малахов

Флуктуации в автоколебательных системах

М., 1968 г., 660 стр. с илл.

Редактор *Л. И. Гладнева*

Техн. редактор *В. Н. Крючкова*

Корректоры *М. Л. Липелис, О. А. Сигал*

Сдано в набор 26/VI 1967 г. Подписано к печати 13/XII 1967 г. Бумага 60×90^{1/16}.
Физ. печ. л. 41,25. Условн. печ. л. 41,25. Уч.-изд. л. 39,69. Тираж 6900 экз. Т-16045.
Цена книги 2 р. 56 к. Заказ № 798.

Издательство «Наука»

Главная редакция физико-математической литературы.
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Ленинградская типография № 2 имени Евгении Соколовой Главполиграфпрома
Комитета по печати при Совете Министров СССР, Измайловский проспект, 29.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	7
Введение	9

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АППАРАТ И ФИЗИЧЕСКИЕ ПРЕДПОСЫЛКИ

Глава 1. Спектрально-корреляционный анализ случайных процессов. Марковские процессы	12
§ 1.1. Случайный процесс. Основные понятия	13
§ 1.2. Стационарные случайные процессы. Производная и интеграл от случайного процесса	19
§ 1.3. Спектрально-корреляционный анализ сигналов первой группы	26
§ 1.4. Спектрально-корреляционный анализ сигналов второй группы	30
§ 1.5. Спектрально-корреляционный анализ сигналов с неинтегрируемыми спектрами энергии	35
§ 1.6. Спектрально-корреляционный анализ сигналов третьей группы	44
§ 1.7. Два случайных процесса. Совместные корреляции и спектральные плотности	53
§ 1.8. Совместные структурные функции и спектральные плотности сигналов с неинтегрируемыми спектрами	60
§ 1.9. Марковские процессы. Уравнение Эйнштейна—Фоккера—Планка	66
Глава 2. Спектрально-корреляционный анализ линейного преобразования сигналов	86
§ 2.1. Уравнения с дифференциальной правой частью	87
§ 2.2. Стохастическое дифференциальное уравнение первого порядка	91
§ 2.3. Система двух стохастических дифференциальных уравнений первого порядка	99
§ 2.4. Система трех уравнений первого порядка	109
Глава 3. Электрические шумы и флуктуации параметров элементов радиосхем	113
§ 3.1. Тепловой шум	113
§ 3.2. Дробовой шум	119
§ 3.3. Фликкерный шум элементов лампового каскада	124
§ 3.4. Флуктуации параметров элементов радиосхем	135

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

ТЕОРИЯ ФЛУКТУАЦИЙ В АВТОГЕНЕРАТОРАХ

Глава 4. Форма и ширина спектральной линии колебания	145
§ 4.1. Постановка задачи	146
§ 4.2. Спектр колебания, обладающего случайной амплитудой	149

§ 4.3. Спектр колебания, обладающего случайной фазой	151
§ 4.4. Спектр колебания, обладающего флуктуациями амплитуды и фазы	155
§ 4.5. Спектр колебания, обладающего флуктуациями частоты	158
§ 4.6. Спектр колебания, обладающего флуктуациями амплитуды и частоты	179
§ 4.7. Поведение крыльев спектральной линии колебания	191
§ 4.8. Форма и ширина спектральной линии колебания, обладающего произвольным распределением флуктуаций фазы. Один частный случай	204
Глава 5. Естественные флуктуации в простейших автогенераторах	208
§ 5.1. Уравнения движения простейшего автогенератора, находящегося под воздействием шумов	208
§ 5.2. Общие уравнения для флуктуаций амплитуды и фазы автоколебаний томсоновского автогенератора	210
§ 5.3. Метод расчета естественных флуктуаций амплитуды, фазы и частоты томсоновского автогенератора	219
§ 5.4. Естественная форма и ширина спектральной линии томсоновского автогенератора	224
§ 5.5. Сравнительный анализ флуктуаций и естественной ширины спектральной линии простейших томсоновских автогенераторов	230
Глава 6. Технические флуктуации в простейших автогенераторах	239
§ 6.1. Флуктуационные уравнения томсоновского автогенератора, обладающего флуктуациями параметров	240
§ 6.2. Общий расчет технических флуктуаций амплитуды и частоты автоколебаний томсоновского автогенератора	243
§ 6.3. Флуктуации емкости и крутизны в простейших <i>LC</i> -генераторах	251
§ 6.4. Форма и ширина спектральной линии <i>LC</i> -генератора, обладающего флуктуациями емкости и крутизны	257
§ 6.5. Параметрическое уширение спектральной линии генератора	275
§ 6.6. Нестационарное воздействие фликкерного шума лампы на автогенератор	282
Глава 7. Флуктуации в кварцевых генераторах	285
§ 7.1. Флуктуационные уравнения двухконтурного генератора	286
§ 7.2. Естественные флуктуации в кварцевом автогенераторе	294
§ 7.3. Сравнение кварцевого генератора с <i>LC</i> -генераторами. Оценка естественной ширины спектральной линии кварцевого генератора	318
§ 7.4. Технические флуктуации в кварцевом генераторе	323
Глава 8. Флуктуации в автогенераторах со многими степенями свободы	328
§ 8.1. Естественные флуктуации в автогенераторах со многими степенями свободы	328
§ 8.2. Технические флуктуации в автогенераторах со многими степенями свободы	338
Глава 9. Флуктуации в генераторах при их синхронизации	343
§ 9.1. Влияние естественных шумов автогенератора на его синхронизацию синусоидальным сигналом. Сильная синхронизация	345

§ 9.2. Влияние естественных шумов на синхронизацию генератора. Слабая синхронизация	358
§ 9.3. Спектр синхронизованного генератора. Нулевая расстройка	380
§ 9.4. Влияние естественных шумов на синхронизацию генератора. Ненулевая расстройка	389
§ 9.5. Синхронизация генератора при флуктуациях его параметров. Сильная синхронизация	398
§ 9.6. Синхронизация генератора при больших флуктуациях параметра	406
§ 9.7. Синхронизация томсоновского автогенератора квазимонохроматическим сигналом	416
§ 9.8. Влияние естественных шумов автогенераторов на их взаимную синхронизацию	427
Глава 10. Флуктуации в электронных генераторах СВЧ	449
§ 10.1. Общее уравнение одночастотного электронного генератора СВЧ	450
§ 10.2. Уравнения движения и флуктуационные уравнения отражательного клистрона	455
§ 10.3. Естественные флуктуации отражательного клистрона	467
§ 10.4. Технические флуктуации отражательного клистрона	482
§ 10.5. Уравнения движения магнетрона	491
§ 10.6. Флуктуационные уравнения магнетрона	501
§ 10.7. Естественные флуктуации магнетрона	506
§ 10.8. Учет непосредственного влияния фликкерного шума на флуктуации и ширину спектральной линии магнетрона	514
Глава 11. Флуктуации в параметрических генераторах	519
§ 11.1. Флуктуационные уравнения параметрических генераторов	520
§ 11.2. Малые флуктуации параметрических генераторов	529
Глава 12. Флуктуации в квантовых генераторах	539
§ 12.1. Квантовые автогенераторы. Принцип действия	539
§ 12.2. Уравнения движения молекулярного генератора	543
§ 12.3. Флуктуационные уравнения молекулярного генератора и устойчивость его автоколебаний	552
§ 12.4. Естественные флуктуации молекулярного генератора	555
ЧАСТЬ ТРЕТЬЯ	
МЕТОДЫ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАНИЯ ФЛУКТУАЦИЙ В ГЕНЕРАТОРАХ	
Глава 13. Методы измерения спектральной плотности амплитудных флуктуаций	572
§ 13.1. Прямой демодуляционный метод измерения спектра амплитудных флуктуаций	573
§ 13.2. Учет собственных шумов измерительного устройства	575
§ 13.3. Методы измерения малых амплитудных флуктуаций	579
Глава 14. Методы измерения флуктуаций частоты генераторов	585
§ 14.1. Общее рассмотрение методов измерения частотных и амплитудно-частотных флуктуаций	585
§ 14.2. Метод контура	588

§ 14.3. Метод линии задержки	592
§ 14.4. Метод балансного моста	598
§ 14.5. Чувствительность методов измерения флуктуаций частоты	602
§ 14.6. Способ приближенной оценки амплитудных флуктуаций	604
Глава 15. Гетеродинные методы измерения флуктуаций амплитуды и частоты генераторов	606
§ 15.1. Прохождение квазимонохроматического сигнала через идеальный смеситель	607
§ 15.2. Учет нестабильности смесителя	611
§ 15.3. Чувствительность гетеродинного метода измерений амплитудных и частотных флуктуаций	614
§ 15.4. О возможности непосредственного измерения формы спектральной линии автогенератора	618
Приложения	621
Цитированная литература	645
Библиография	651

ПРЕДИСЛОВИЕ

За послевоенные годы вопрос о флуктуациях в автоколебательных системах приобрел важное практическое значение. Задачи создания генераторов с высокой стабильностью частоты и связанные с ними проблемы создания эталонов времени, задачи измерения промежутков времени с большой точностью, задачи обнаружения слабых сигналов, спектр которых находится вблизи мощных спектральных линий генераторов, некоторые задачи космической связи и многие другие современные проблемы приводят к необходимости подробного рассмотрения флуктуационных явлений в автоколебательных системах.

Свидетельством практической и принципиальной важности изучения флуктуаций в автоколебательных системах является и сравнительно большое число работ, опубликованных в этой области за последние десять лет. Однако подавляющее большинство этих работ представляет собой журнальные статьи, что, естественно, затрудняет эффективное изучение данного вопроса.

Настоящая монография является попыткой систематического и подробного изложения теории флуктуационных явлений в автоколебательных системах (а также методов их экспериментального исследования) и в значительной мере основывается на работах автора. Имеющийся в литературе и используемый в книге материал при этом излагается с единой точки зрения.

Анализ флуктуационных явлений в автоколебательных системах строится в книге следующим образом: сначала излагается математический аппарат, с помощью которого ведется теоретическое исследование флуктуаций и рассматривается физика электрических шумов и флуктуаций параметров реальных автоколебательных систем, затем следует основное содержание книги — теория флуктуаций в различных конкретных автоколебательных системах (автогенераторах) — и после этого излагается теория методов экспериментального исследования флуктуаций в автогенераторах. В соответствии с этим материал книги распадается на три части.

В Приложениях даны некоторые необходимые для понимания изложения математические сведения, не отраженные в широкой литературе, таблицы основных формул спектрально-корреляционного анализа, таблица некоторых определенных интегралов, широко используемых в книге, а также некоторые другие сведения, носящие вспомогательный математический характер. За Приложениями следует список цитированной литературы. Ссылки в тексте на цитированную литературу даются цифрами в квадратных скобках, например [3], [13, 22]. В конце

книги приводится Библиография, содержащая, как надеется автор, достаточно полный список литературы, посвященной теоретическим и экспериментальным исследованиям флуктуационных явлений в автоколебательных системах. Эта Библиография, составленная в хронологическом порядке, призвана оказать известную помощь читателям, интересующимся теми или иными аспектами проблем флуктуаций в автоколебательных системах. Ссылки в тексте на работы, упомянутые в указанной Библиографии, даются в круглых скобках и содержат указание года опубликования работы и ее порядкового номера в списке литературы данного года (в квадратных скобках), например (1938 [1]), (1959 [14—16]), (1955 [5], 1957 [1]).

Книга написана на «инженерном уровне строгости», хотя в некоторых случаях, там, где это существенно, автор пытался вести изложение с большей строгостью.

Хотя книга предназначена в основном для специалистов, работающих в области статистической радиофизики, подробное изложение математического аппарата, а также наличие Приложений делают ее доступной для широкого круга специалистов радиофизиков. Более того, сравнительно подробное изложение выкладок в основном материале книги, единые методы анализа, многочисленные ссылки на формулы и методы первых двух глав и Приложений способствуют тому, чтобы книга могла служить руководством для читателей, желающих приступить к подробному изучению флуктуационных явлений в автоколебательных системах. Тем самым книга может быть полезной для студентов старших курсов и аспирантов радиофизических, радиотехнических и радиоэлектронных специальностей.

Автор считает своим приятным долгом выразить благодарность С. А. Ахманову и Л. И. Гудзенко за полезные дискуссии при обсуждении плана книги и их деятельное участие, без которого эта книга не увидела бы света. Автор благодарен также В. Е. Нечаеву, просмотревшему рукопись § 10.5 и сделавшему ряд ценных замечаний, и В. Н. Никонову, с которым автор неоднократно обсуждал целый ряд вопросов гл. 10.

Автор выражает благодарность Л. А. Торопову и другим сотрудникам кафедры за большую помощь в оформлении рукописи, а также Т. А. Малаховой, взявшей на себя большой и кропотливый труд изготовления иллюстраций и подготовки рукописи к печати.

В заключение автор приносит признательность рецензентам В. И. Тихонову и Ю. М. Романовскому за полезные критические замечания.

ВВЕДЕНИЕ

1. История исследований флуктуационных явлений в автоколебательных системах начинается с тридцатых годов, когда академиком Л. И. Мандельштамом была поставлена задача выяснения общего поведения динамической системы при наличии случайных толчков. Первой работой, относящейся к этой задаче, является работа Л. С. Понтрягина, А. А. Андропова, А. А. Витта «О статистическом рассмотрении динамических систем», опубликованная в 1933 г. и сохранившая до сих пор свое принципиальное значение.

Следующие работы в этой области относятся к довоенным годам и связаны с именем И. Л. Берштейна, одного из учеников академика А. А. Андропова. В этих работах впервые был дан теоретический анализ флуктуационных явлений в автоколебательных системах, совершающих движения, близкие к синусоидальным, рассмотрены флуктуации амплитуды и фазы автоколебания и обусловленная ими картина спектра. При этом оказалось, что спектр автоколебания, например лампового генератора, должен состоять из чрезвычайно узкой, но все же размытой спектральной линии и ее пьедестала.

В своих последующих работах, относящихся к 1949 и 1950 гг., И. Л. Берштейн изложил результаты проведенных им экспериментальных исследований флуктуаций амплитуды, фазы и ширины спектральной линии лампового генератора, которые подтвердили размытость спектральной линии генератора и дали оценку ее ширины, практически совпавшую с теоретически предсказанной величиной.

К этим же годам относятся и работы Г. С. Горелика, посвященные некоторым физическим аспектам уширения спектральной линии генератора. В этих работах Г. С. Горелик по аналогии с оптикой ввел понятия *естественной ширины* спектральной линии генератора и ее *технической ширины*, понятия, подчеркивающие происхождение уширения и имеющие чрезвычайно важное значение в настоящее время.

Упомянутые работы Л. С. Понтрягина, А. А. Андропова, А. А. Витта, И. Л. Берштейна и Г. С. Горелика с полным правом можно назвать классическими. На них тем или иным

образом опираются все последующие (как теоретические, так и экспериментальные) многочисленные исследования флуктуационных явлений в автоколебательных системах.

2. Нетрудно понять, почему наличие различных источников шума в автогенераторах приводит к существованию флуктуаций амплитуды и фазы автоколебания и к размытости спектральной линии автогенератора.

В отсутствие случайных воздействий установившееся движение изображающей точки автогенератора на фазовой плоскости происходит строго периодически по замкнутой выпуклой кривой, которая представляет собой так называемый предель-

ный цикл. Если имеются какие-либо, например, начальные отклонения от предельного цикла, то они исчезают — все траектории изображающей точки наматываются на предельный цикл (рис. В.1, левая половина). Скорость исчезновения отклонений связана с так называемой прочностью предельного цикла. Чем больше эта прочность, тем быстрее наматываются траектории на предельный цикл.

Существующие случайные воздействия сбивают изображающую точку как с предельного цикла

ла (точки A_0, A_1 на рис. В.1), так и с каких-либо других положений (точки A_2 и A_3). Нетрудно видеть, что при этом каждый случайный толчок изменяет скачком амплитуду ($R_1 \neq R_0, R_3 \neq R_2$) и фазу ($\varphi_1 \neq 0, \varphi_2 \neq 0$) автоколебания, что приводит к существованию амплитудных и фазовых флуктуаций.

Благодаря существованию положительной прочности предельного цикла амплитудные отклонения все время затухают; можно сказать, что для них существует возвращающая сила. Поэтому изображающая точка из-за действия случайных толчков не может уходить по радиусу далеко от R_0 . Другое положение имеет место для фазы колебания. Вследствие того, что в решение уравнения автоколебаний может входить произвольное значение начальной фазы, или, говоря по-другому, вследствие того, что решение нечувствительно к фазе, случайные толчки могут «гонять» фазу колебания куда угодно. Это приводит к тому, что по истечении достаточно большого времени флуктуационные уходы фазы могут быть достаточно большими (колеблясь в среднем около нуля). Говорят, что имеет место нако-

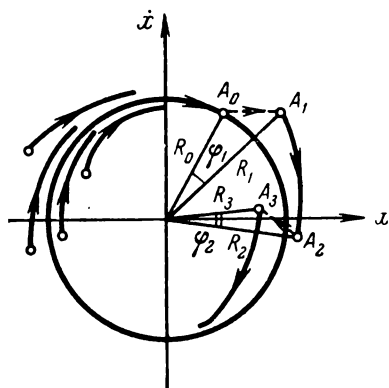


Рис. В.1.

пление уходов фазы $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ из-за действия каждого толчка. Чем больше рассматриваемые промежутки времени, тем больше соответствующие уходы фазы. Это приводит к тому, что в каждом из этих промежутков времени как бы имеет место своя частота автоколебаний. Таким образом, возникают флуктуации частоты, благодаря которым и уширяется спектральная линия любого реального автогенератора.

Может ли быть случай, когда существует возвращающая сила и для флуктуаций фазы? Да, такой случай имеет место при синхронизации автогенератора монохроматическим сигналом. В отсутствие случайных воздействий фаза синхронизованного колебания жестко связана с фазой сигнала синхронизации. Поэтому случайные толчки, действующие на систему и сбивающие фазу с синхронизованного значения, не могут уже «угнать» фазу сколь угодно далеко. Можно сказать, что в этом случае существует возвращающая сила и для флуктуаций фазы. Она тем больше, чем больше амплитуда сигнала синхронизации. Анализ показывает, что в этом случае при достаточно большом сигнале синхронизации уширения спектральной линии практически не происходит.

Однако это имеет место только при синхронизации генератора монохроматическим сигналом. В действительности, как уже было сказано выше, любой реальный автогенератор не обладает монохроматическим колебанием, поэтому и при синхронизации одного реального генератора другим имеет место уширение спектральной линии колебания.

Тем самым автоколебания любой реальной динамической системы, простой или сложной, никогда не бывают монохроматическими и их спектральная линия всегда обладает определенной шириной и формой.

При этом естественная ширина линии обязана действию тепловых и дробовых шумов, существующих в автогенераторах, а техническая ширина спектральной линии — действию различного рода нестабильностей параметров генератора.

Последующее изложение имеет своей основной целью анализ флуктуаций амплитуды, фазы и частоты установившихся автоколебаний и исследование ширины и формы спектральной линии как в общем случае, так и на примере различных конкретных автогенераторов.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АППАРАТ И ФИЗИЧЕСКИЕ ПРЕДПОСЫЛКИ

Глава I

СПЕКТРАЛЬНО-КОРРЕЛЯЦИОННЫЙ АНАЛИЗ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ. МАРКОВСКИЕ ПРОЦЕССЫ

Изучение поведения автоколебательных систем, подверженных действию случайных сил, требует прежде всего адекватного описания как самих случайных воздействий, так и случайной реакции автоколебательных систем на эти воздействия. Математическим аппаратом, созданным для описания случайного поведения (во времени) какой-либо величины, является теория случайных функций (или процессов), опирающаяся на теорию случайных величин, т. е. на теорию вероятностей.

В настоящее время теория случайных функций и ее прикладная сторона представляются достаточно разработанными для так называемых стационарных случайных процессов (см., например, [1—5]). Нестационарные случайные процессы изучены существенно меньше, особенно это относится к процессам с неинтегрируемыми спектрами [6—9]. В то же время так называемые технические шумы, существующие в реальных автогенераторах и в значительной степени определяющие флуктуации в них, как раз и являются случайными процессами с неинтегрируемыми спектрами. Поэтому для практики необходимо уметь описывать и исследовать влияние таких шумов на различные динамические системы. По этой причине значительная часть гл. I, которая основное внимание уделяет спектрально-корреляционному анализу произвольных сигналов, посвящена именно процессам с неинтегрируемыми спектрами [10].

Кроме спектрально-корреляционного анализа, часто необходим вероятностный анализ поведения динамических систем, находящихся под случайным воздействием. Для линейных систем этот анализ сравнительно прост. Для нелинейных систем при произвольных воздействиях этот анализ представляется весьма затруднительным. Лишь в некоторых частных случаях он может быть успешным и, в частности, если координаты изучаемой

системы представляют собой так называемые марковские процессы. Для этого случая мощным методом исследования является так называемый метод уравнения Эйнштейна — Фоккера — Планка, позволяющий решить сравнительно большой круг прикладных задач (см., например, [11—13]). Этому методу посвящен последний параграф настоящей главы.

§ 1.1. Случайный процесс. Основные понятия

1. Рассмотрим $x=x(t)$ — функцию времени. Если определенным значениям аргумента t соответствуют конкретные определенные значения зависимого переменного x , то говорят, что $x(t)$ есть детерминированная функция времени. Если же для каждого значения t зависимая переменная x представляет собой случайную величину с заданными вероятностными характеристиками, то говорят, что $x=x(t)$ есть случайная функция времени, случайный процесс.

Случайная величина определяется на множестве принимаемых ею детерминированных значений. Случайная функция $x(t)$ определяется на множестве функций $x_{(k)}(t)$, называемых реализациями, каждая из которых представляет собой детерминированную функцию времени и может являться результатом некоторого эксперимента.

Если, например, случайная функция физически реализуется каким-то генератором случайных функций — генератором шума, то выход генератора и есть некоторая реализация. Предположим, что мы имеем M идентичных генераторов шума, где M — сколь угодно большое число. Тогда выход первого генератора есть реализация $x_{(1)}(t)$, выход второго — $x_{(2)}(t)$ и т. д. (рис. 1.1).

Строгое определение случайной функции следующее: случайная функция $x(t)$ есть множество реализаций $x_{(k)}(t)$, на котором задана вероятностная мера.

Поскольку значения $x(t_i)$ являются случайными величинами и имеют в общем случае для разных t_i различные вероятностные распределения, то очевидно, что вероятностное распределение для $x(t)$ должно зависеть от времени. Одномерную плотность вероятности случайной функции $x(t)$ будем обозначать $W_1(x, t)$. Она удовлетворяет условию нормировки

$$\int_{-\infty}^{+\infty} W_1(x, t) dx = 1.$$

Одномерное распределение $W_1(x, t)$, далеко не полно описывая случайную функцию, все же позволяет получить ряд ее полезных характеристик. К ним относится прежде всего среднее

значение функции, получаемое усреднением $x_{(k)}(t)$ по множеству реализаций для каждого значения t :

$$\langle x(t) \rangle \equiv \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M x_{(k)}(t) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} x W_1(x, t) dx. \quad (1.1.1)$$

Отсюда следует, что в общем случае среднее значение функции зависит от времени. Во всем последующем изложении значками

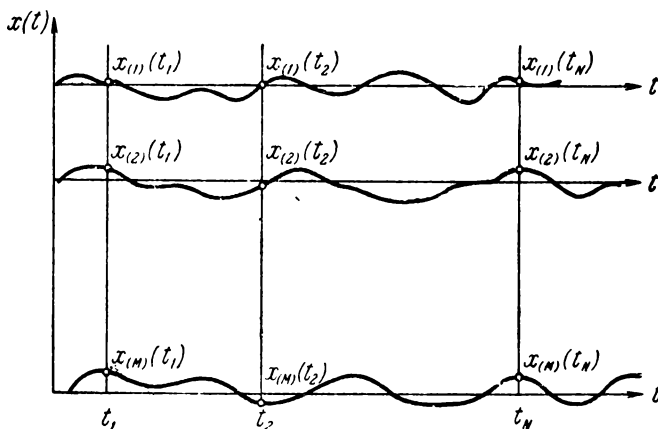


Рис. 1.1.

$\langle \dots \rangle$ мы будем обозначать усреднение вида (1.1.1), которое называют также усреднением по ансамблю или статистическим усреднением.

Другой важной характеристикой случайной функции является ее средний квадрат

$$\langle x^2(t) \rangle \equiv \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M x_{(k)}^2(t) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 W_1(x, t) dx,$$

который также в общем случае является функцией времени. Аналогично можно ввести в рассмотрение и средние значения высших степеней случайной функции.

Детерминированные функции можно считать частным случаем случайных функций. В самом деле, пусть, например, $x = f(t)$ есть детерминированная функция. Тогда ее можно считать случайной, обладающей одномерным распределением

$$W_1(x, t) = \delta(x - f(t)),$$

где $\delta(x)$ есть дельта-функция. Смысл этого распределения таков: величина x во всех своих реализациях в момент времени t принимает одно и то же значение, равное $f(t)$. В этом случае, как нетрудно видеть,

$$\langle f^n(t) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n \delta(x - f(t)) dx = f^n(t) \quad (n - \text{любое}).$$

Таким образом, с одной стороны, детерминированные функции можно включать в случайные и рассмотрение вести в общем случае, с другой стороны, усреднения по ансамблю для детерминированных функций можно просто опускать. В связи с этим мы далее по мере необходимости будем употреблять термин *сигнал* $x(t)$, понимая под ним как случайную, так и детерминированную функцию времени.

2. Рассмотрим случайную функцию $x=x(t)$ на интервале времени $[t_0, t_{00}]$. Фиксируя на этом интервале времени моменты $t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_N < t_{00}$, мы получим N случайных величин $x_1 = x(t_1), \dots, x_N = x(t_N)$. Совокупность N случайных величин полностью описывается N -мерной плотностью вероятности. Поскольку в общем случае на вероятностные свойства x_1, \dots, x_N может оказывать влияние выбор моментов t_1, \dots, t_N , то N -мерная плотность вероятности для случайной функции $x=x(t)$ зависит от моментов времени и записывается как

$$W_N(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_N, t_N).$$

Эта функция, разумеется, удовлетворяет условию нормировки. N -мерная вероятность гораздо полнее описывает случайную функцию, чем $W_1(x, t)$, но тем не менее не дает абсолютно полного описания $x(t)$ даже на рассматриваемом интервале времени. Для абсолютно полного описания случайной функции $x(t)$ нужно было бы устремить N к бесконечности, чтобы был отражен любой момент времени на интервале $[t_0, t_{00}]$, и рассматривать некоторую бесконечномерную плотность вероятности. Однако дальнейшее увеличение N приносит мало практически *полезной информации*, и обычно ограничиваются малыми значениями N . Достаточно сказать, что для построения спектрально-корреляционной теории случайных функций — мощного математического аппарата, позволяющего решить большинство практических задач, относящихся к случайным процессам, можно ограничиться случаем $N=2$. Двумерная плотность вероятности

$$W_2(x_1, t_1; x_2, t_2)$$

удовлетворяет условию нормировки

$$\int \int W_2(x_1, t_1; x_2, t_2) dx_1 dx_2 = 1$$

и связана следующим образом с одномерной плотностью вероятности:

$$\int W_2(x_1, t_1; x_2, t_2) dx_2 = W_1(x_1, t_1).$$

В общем случае между случайными величинами $x_2 = x(t_2)$ и $x_1 = x(t_1)$ имеется определенная зависимость: вероятность реализации того или иного значения функции $x(t)$ в момент $t = t_2$ может зависеть от того, какое значение эта функция имела в момент $t = t_1$. Введем понятие условной плотности вероятности $W_2(x_1, t_1 | x_2, t_2)$ таким образом, что $W_2(x_1, t_1 | x_2, t_2) dx_2$ есть вероятность того, что значение $x(t_2)$ лежит в интервале $[x_2, x_2 + dx_2]$, если в момент времени t_1 функция имела значение x_1 . В этом случае, как можно показать,

$$W_2(x_1, t_1; x_2, t_2) = W_1(x_1, t_1) W_2(x_1, t_1 | x_2, t_2).$$

Условная плотность вероятности полностью характеризует статистическую зависимость между x_1 и x_2 . Если для $t_2 \neq t_1$ вероятность значения функции $x(t_2)$ не зависит от того значения, которое имела функция в $t = t_1$, то

$$W_2(x_1, t_1 | x_2, t_2) = W_1(x_2, t_2),$$

т. е. условная плотность вероятности равна одномерной плотности вероятности для момента t_2 . В этом случае двумерная плотность вероятности распадается на произведение одномерных плотностей вероятности:

$$W_2(x_1, t_1; x_2, t_2) = W_1(x_1, t_1) W_1(x_2, t_2). \quad (1.1.2)$$

Это соотношение по существу определяет статистическую независимость x_1 и x_2 .

Рассмотрим случайную функцию времени $x(t)$, среднее значение которой для любого t равно нулю. Назовем корреляционной функцией процесса $x(t)$ выражение

$$K_x[t_1, t_2] \equiv \langle x(t_1) x(t_2) \rangle = \int \int x_1 x_2 W_2(x_1, t_1; x_2, t_2) dx_1 dx_2. \quad (1.1.3)$$

Если величины x_1 и x_2 статистически зависимы, то в общем случае $K_x[t_1, t_2]$ не обращается тождественно в нуль и отражает характер их статистической зависимости. Если x_1 и x_2 статистически независимы, имеет место (1.1.2) и

$$K_x[t_1, t_2] = \langle x(t_1) \rangle \langle x(t_2) \rangle = 0.$$

Итак, корреляционная функция дает возможность судить о взаимосвязи значений случайной функции $x(t)$ в разные моменты времени.

Следует, однако, отметить, что если статистическая независимость $x(t_1)$ и $x(t_2)$ приводит к $K_x[t_1, t_2] \equiv 0$, то обратное утверждение в общем случае неверно. В принципе могут быть такие случаи, когда $x(t_1)$ и $x(t_2)$ статистически зависимы, а $K_x[t_1, t_2] \equiv 0$. Это следует из (1.1.3), где интеграл может быть равен нулю и для случаев, когда (1.1.2) не имеет места. Поэтому в случае $K_x[t_1, t_2] \equiv 0$ будем говорить о некоррелированности x_1 и x_2 , но не о статистической независимости.

Таким образом, строго говоря, корреляционная функция $K_x[t_1, t_2]$ описывает лишь степень коррелированности $x(t_1)$ и $x(t_2)$.

Для одинаковых моментов времени корреляционная функция совпадает со средним квадратом:

$$K_x[t, t] = \langle x^2(t) \rangle > 0.$$

При удалении t_2 от t_1 взаимосвязь между $x(t_1)$ и $x(t_2)$ в общем случае становится все слабее и слабее и, наконец, для достаточно больших разностей $|t_2 - t_1|$ x_1 и x_2 становятся статистически независимыми (или некоррелированными) и $K_x[t_1, t_2] \rightarrow 0$. Таким образом, вид функции $K_x[t_1, t_2]$ позволяет судить о некотором характерном времени $\tau_0 = \tau_0(t_1)$ — времени корреляции. Его смысл заключается в том, что для $|t_2 - t_1| < \tau_0$ значения $x(t_1)$ и $x(t_2)$ почти полностью коррелированы, а для $|t_2 - t_1| \gg \tau_0$ не коррелированы.

Говоря о сигнале $x(t)$, назовем корреляционной функцией сигнала $x(t)$ выражение

$$K_x[t_1, t_2] \equiv \langle x(t_1)x(t_2) \rangle.$$

Для случайных функций будем иметь по-прежнему (1.1.3), а для детерминированной функции $x(t)$ ее корреляционная функция есть просто произведение $x(t_1)x(t_2)$. Отметим, что из определения корреляционной функции сигнала следует, что

$$K_x[t_1, t_2] = K_x[t_2, t_1]. \quad (1.1.4)$$

3. Важную роль среди вероятностных распределений играет так называемое нормальное распределение. Большинство всех реальных физических случайных процессов — шумов и флуктуаций — обладает этим распределением, что связано с самой сущностью нормального распределения. Согласно так называемой центральной предельной теореме теории вероятностей достаточно большая сумма случайных величин, обладающих произвольными распределениями, при выполнении некоторых не слишком строгих условий обладает нормальным распределением. Практически это

означает, что если рассматриваемый случайный процесс порождается достаточно большим числом примерно одинаковых случайных причин, то он непременно обладает нормальным распределением. Например, тепловой шум порождается случайным движением электронов в проводнике, причем движение *каждого* электрона дает свой вклад. В данной книге мы будем полагать, что все рассматриваемые шумы, действующие на автоколебательные системы, обладают нормальным распределением.

Одномерная плотность вероятности нормального распределения для случайного процесса $x=x(t)$ имеет следующий вид:

$$W_{н1}(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi b^2(t)}} \exp \left\{ -\frac{[x - a(t)]^2}{2b^2(t)} \right\}. \quad (1.1.5)$$

Смысл коэффициентов $a(t)$ и $b(t)$, являющихся в общем случае произвольными функциями времени, очень простой. Легко проверить, что коэффициент $a(t)$ есть среднее значение $x(t)$:

$$\langle x(t) \rangle = \int x W_{н1}(x, t) dx = a(t).$$

Легко проверить также, что коэффициент $b^2(t)$ есть дисперсия случайной функции $x(t)$:

$$\langle (x(t) - \langle x(t) \rangle)^2 \rangle = \int (x - a)^2 W_{н1}(x, t) dx = b^2(t).$$

Тем самым плотность вероятности нормального распределения случайной функции $x(t)$ с нулевым средним значением можно записать в виде

$$W_{н1}(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \langle x^2(t) \rangle}} \exp \left[-\frac{x^2}{2 \langle x^2(t) \rangle} \right]. \quad (1.1.6)$$

Двумерная плотность вероятности нормального распределения для случайного процесса $x(t)$ с нулевым средним значением имеет вид

$$W_{н2}(x_1, t_1; x_2, t_2) = \frac{1}{2\pi \sqrt{b_1^2(t_1)b_2^2(t_2) - c^2(t_1, t_2)}} \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{b_2^2(t_2)x_1^2 - 2c(t_1, t_2)x_1x_2 + b_1^2(t_1)x_2^2}{2[b_1^2(t_1)b_2^2(t_2) - c^2(t_1, t_2)]} \right\}. \quad (1.1.7)$$

Нетрудно показать, что коэффициенты этого распределения имеют следующий смысл:

$$b_1^2(t_1) = \langle x^2(t_1) \rangle, \quad b_2^2(t_2) = \langle x^2(t_2) \rangle, \quad c(t_1, t_2) = K_x[t_1, t_2]. \quad (1.1.8)$$

Нормальное распределение обладает следующим замечательным свойством: некоррелированные случайные величины являются

независимыми. В самом деле, пусть $K_x[t_1, t_2] = 0$, тогда из (1.1.7) следует, что

$$W_{n2}(x_1, t_1; x_2, t_2) = W_{n1}(x_1, t_1) W_{n1}(x_2, t_2).$$

Таким образом, корреляционная функция $K_x[t_1, t_2]$ нормально распределенного случайного процесса $x(t)$ отражает не только корреляционную, но и статистическую зависимость $x(t_1)$ и $x(t_2)$.

Из (1.1.8) следует, что

$$b_1^2(t_1) = K_x[t_1, t_1], \quad b_2^2(t_2) = K_x[t_2, t_2].$$

Тем самым можно утверждать, что двумерное нормальное распределение (и, разумеется, также одномерное) случайного процесса $x(t)$ полностью определяется заданием корреляционной функции $K_x[t_1, t_2]$.

Это утверждение распространяется и на N -мерное нормальное распределение. Если мы имеем совокупность значений $x_1 = x(t_1)$, $x_2 = x(t_2)$, ..., $x_N = x(t_N)$ нормально распределенной случайной функции $x(t)$, то можно показать, что $W_{nN}(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_N, t_N)$ однозначно определяется корреляционной функцией $K[t_i, t_j]$. Другими словами, в формулу для W_{nN} характеристики случайного процесса $x(t)$ входят только в виде величин $K_x[t_i, t_j]$. Это значит, что корреляционная функция $K_x[t_i, t_j]$ *полностью* представляет случайный, нормально распределенный процесс $x(t)$ с нулевым средним значением.

Если $x(t)$ имеет нормальное распределение, но $\langle x(t) \rangle$ не равно нулю, то для полного описания $x(t)$, помимо корреляционной функции $K_x[t_i, t_j]$, необходимо задать величины $a(t_i) = \langle x(t_i) \rangle$ для всех рассматриваемых моментов времени t_i .

§ 1.2. Стационарные случайные процессы. Производная и интеграл от случайного процесса

1. Случайный процесс $x(t)$ называется стационарным, если N -мерная плотность вероятности для него (при любом N) не изменится при замене последовательности t_1, t_2, \dots, t_N на последовательность $t_1 + \tau, t_2 + \tau, \dots, t_N + \tau$, где τ — любой сдвиг во времени. Другими словами, начало отсчета времени не влияет на N -мерную плотность вероятности стационарного процесса. Это общее определение накладывает некоторые условия на зависимость плотностей вероятности от времени.

Одномерная плотность вероятности стационарного процесса $W_1(x, t)$ должна удовлетворять уравнению

$$W_1(x, t) = W_1(x, t + \tau) \quad (\tau — \text{любое}).$$

Это может быть только в том случае, если

$$W_1(x, t) = W_1(x).$$

Обратимся к двумерной плотности вероятности. Если для любого τ

$$W_2(x_1, t_1; x_2, t_2) = W_2(x_1, t_1 + \tau; x_2, t_2 + \tau),$$

то двумерная плотность вероятности должна зависеть лишь от разности $t_2 - t_1$:

$$W_2(x_1, t_1; x_2, t_2) = W_2(x_1, x_2; t_2 - t_1).$$

Можно показать, что и N -мерная плотность вероятности должна зависеть лишь от разностей $t_2 - t_1, t_3 - t_1, \dots, t_N - t_1$.

Среднее значение и дисперсия стационарного случайного процесса не зависят от времени:

$$\langle x(t) \rangle = \int x W_1(x) dx = \langle x \rangle,$$

$$\langle (x(t) - \langle x(t) \rangle)^2 \rangle = \int (x - \langle x \rangle)^2 W_1(x) dx = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2,$$

а корреляционная функция зависит только от $\tau = t_2 - t_1$:

$$K_x[t_1, t_2] = \int \int x_1 x_2 W_2(x_1, x_2; \tau) dx_1 dx_2 \equiv K_x[\tau].$$

На основании (1.1.4)

$$K_x[-\tau] = K_x[\tau] \text{ — четная функция } \tau.$$

При этом время корреляции τ_0 уже не зависит от t_1 .

2. Помимо понятия стационарных процессов, существует понятие процесса $x(t)$ — стационарного в широком смысле, который определяется условиями

$$\langle x(t) \rangle = \text{const}, \quad \langle (x^2 - \langle x \rangle^2) \rangle = \text{const}, \quad K_x[t_1, t_2] = K_x[\tau];$$

при этом о N -мерных плотностях вероятности *ничего не говорится*.

Нетрудно видеть, что стационарный процесс всегда является одновременно стационарным процессом в широком смысле, но не наоборот. Можно построить такие процессы, которые будут стационарными в широком смысле, но нестационарными по общему определению. (Процессы, стационарные по общему определению, называют также процессами, стационарными в узком смысле.)

Требования, накладываемые на N -мерные плотности вероятности процесса, стационарного в широком смысле, сво-

дятся к следующим: $W_1(x, t)$ не должна зависеть от времени, $W_2(x_1, t_1; x_2, t_2)$ должна зависеть только от $\tau = t_2 - t_1$, а на другие плотности вероятности никаких условий не накладывается.

Таким образом, если оставаться в рамках спектрально-корреляционной теории, для которой необходимо лишь знание W_1 и W_2 , то достаточно ограничиться рассмотрением процессов (случайных функций), стационарных лишь в широком смысле. Поэтому в дальнейшем изложении под понятием стационарности функции, процесса, мы будем понимать стационарность в широком смысле (если не будет специальных оговорок).

Что касается нормально распределенного стационарного процесса, то для него понятия стационарности в узком и широком смыслах совпадают. В самом деле, как было упомянуто в § 1.1, N -мерные плотности вероятности для нормального распределения W_{nN} зависят от времени только через $K_{ij} = K[t_i, t_j]$. Поскольку для процесса, стационарного в широком смысле, $K_{ij} = K[t_j - t_i]$, то, следовательно, и W_{nN} будут зависеть лишь от разностей времен $t_j - t_i$, а это и есть условие стационарности в узком смысле. Тем самым, имея дело с нормально распределенными случайными процессами, можно говорить о стационарности вообще, не оговаривая это понятие более точно.

3. Рассмотрим свойства корреляционной функции стационарного процесса. Мы уже видели, что $K[\tau]$ есть четная функция τ . Кроме этого, нетрудно показать, что $K[0] \geq |K[\tau]|$. Но не всякая четная функция, удовлетворяющая вышеприведенному неравенству, может быть корреляционной функцией. Можно показать, что последняя должна быть такой, чтобы для всех ω выполнялось условие

$$\int_{-\infty}^{+\infty} K[\tau] \cos \omega \tau d\tau \geq 0. \quad (1.2.1)$$

Возьмем, например, функцию, показанную на рис. 1.2,

$$K_1[\tau] = \begin{cases} a > 0, & |\tau| < \tau_0, \\ 0, & |\tau| > \tau_0. \end{cases}$$

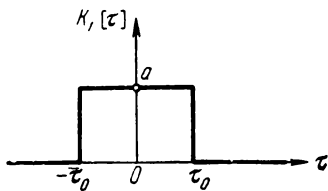


Рис. 1.2.

Эта функция, казалось бы, прекрасно отражает основные свойства корреляции: для $|\tau| < \tau_0$ имеется полная коррелированность, а при $|\tau| > \tau_0$ значения x становятся полностью некоррелированными. Однако вычисления показывают, что интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} K_1[\tau] \cos \omega \tau d\tau = a \int_{-\tau_0}^{\tau_0} \cos \omega \tau d\tau = \frac{2a}{\omega} \sin \omega \tau_0$$

может принимать отрицательные значения для $\frac{2\pi}{\tau_0} \left(\frac{1}{2} + k \right) < \omega < \frac{2\pi}{\tau_0} (1 + k)$, $k=0, 1, 2 \dots$. Следовательно, $K_x[\tau]$ не может быть корреляционной функцией.

Введение условия (1.2.1) эквивалентно требованию положительной определенности $K[\tau]$.

Таким образом, корреляционная функция $K_x[\tau]$ стационарного процесса $x(t)$, как положительно определенная функция, обладает следующими свойствами (назовем их свойствами K_1):

- 1) $K_x[0] > 0$,
- 2) $K_x[-\tau] = K_x[\tau]$,
- 3) $|K_x[\tau]| \leq K_x[0]$,
- 4) $K_x[\tau]$ удовлетворяет условию (1.2.1).

4. Рассмотрим некоторые примеры корреляционных функций стационарного процесса.

Корреляционной функцией может быть, во-первых, постоянная величина $K[\tau] = B > 0$, для которой $\int_{-\infty}^{+\infty} K[\tau] \cos \omega \tau d\tau = 2\pi B \delta(\omega) \geq 0$ и, во-вторых, дельта-функция $K[\tau] = D \delta(\tau)$ ($D > 0$), для которой $\int_{-\infty}^{+\infty} K[\tau] \cos \omega \tau d\tau = D$.

Эти два случая являются двумя противоположными предельными случаями. Первый случай $K[\tau] = B$ соответствует сколь угодно медленному стационарному процессу с временем корреляции, равным бесконечности. Второй случай $K[\tau] = D \delta(\tau)$ соответствует сколь угодно быстрому стационарному случайному процессу с временем корреляции, равным нулю. Такой случайный процесс носит название дельта-коррелированного процесса; для него значения $x(t)$ и $x(t+\tau)$ не коррелированы уже при сколь угодно малом $\tau \neq 0$. Заметим, что $\langle x^2 \rangle$ для дельта-коррелированного процесса является бесконечно большой величиной.

Часто используется корреляционная функция стационарного процесса $x(t)$ вида

$$K_x[\tau] = \langle x^2 \rangle e^{-a|\tau|}. \quad (1.2.2.)$$

График этой функции показан на рис. 1.3, а. За время корреляции процесса $x(t)$ можно взять величину $\tau_0 = 1/a$. Эта функция корреляции является наиболее удобной, во-первых, из-за того, что при различных преобразованиях $x(t)$ расчеты, связанные с такой $K_x[\tau]$, являются достаточно простыми и, во-вторых, вследствие легкого перехода от нее (при изменении a) к корреляционным функциям сколь угодно медленных и сколь угодно быстрых процессов. В самом деле, пусть $a \rightarrow 0$, при этом $\tau_0 \rightarrow \infty$

и $K_x[\tau] \rightarrow \langle x^2 \rangle = \text{const.}$ Переход к дельта-функции несколько сложнее. Чтобы при $a \rightarrow \infty$ перейти к $D\delta(\tau)$, нужна независимость $\int_{-\infty}^{+\infty} K_x[\tau] d\tau$ от a . Для этого заменим $\langle x^2 \rangle$ на $Da/2$. Тогда

$$K_x[\tau] = \frac{Da}{2} e^{-a|\tau|} \rightarrow D\delta(\tau) \quad \text{при } a \rightarrow \infty.$$

5. Наряду со случайным процессом $x(t)$ часто необходимо рассматривать его производную $y(t) = dx(t)/dt$. Если исходить из реализации $x_{(k)}(t)$, то можно построить обычным способом ее производную — реализацию $y_{(k)}(t)$, поскольку функция $x_{(k)}(t)$ является детерминированной. Таким образом, можно получить множество реализаций $y_{(k)}(t)$. Для того чтобы можно было оперировать с $y(t)$ как со случайной функцией, необходимо определить еще вероятностную меру на множестве $y_{(k)}(t)$, которая, разумеется, связана с вероятностной мерой, заданной на множестве $x_{(k)}(t)$. Последнее требует определения предельных операций на множестве случайных величин.

Предельные вероятностные операции могут быть введены по-разному. Вследствие этого производная случайного процесса может быть определена также по-разному. Существуют, например, понятия дифференцируемости случайной функции в *среднеквадратическом*, *по вероятности* и *почти наверное* [5]. Эти определения *различны*. Так, например, из дифференцируемости в среднеквадратическом следует дифференцируемость по вероятности (обратное неверно). Если функция в среднеквадратическом дифференцируема два раза, то она дифференцируема один раз почти наверное и т. п. [5].

В приложениях чаще всего пользуются понятием дифференцируемости случайного процесса в среднеквадратическом.

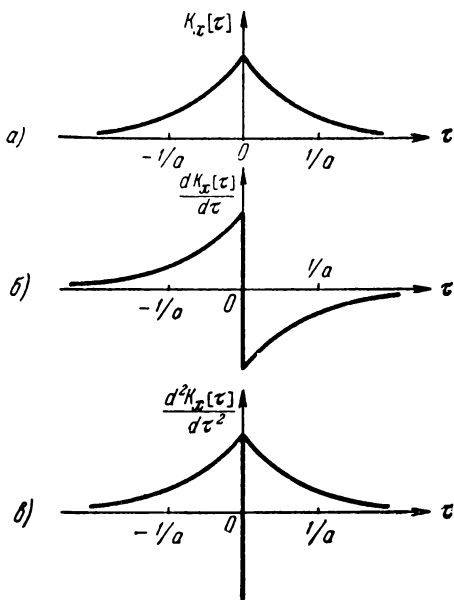


Рис. 1.3.

Функция $y(t)$ называется *производной в среднееквадратическом* процесса $x(t)$, если

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left\langle \left| \frac{x(t+h) - x(t)}{h} - y(t) \right|^2 \right\rangle = 0.$$

Можно показать, что необходимыми и достаточными условиями существования производной процесса $x(t)$ в среднееквадратическом является существование второй смешанной производной корреляционной функции $K_x[t_1, t_2]$ при любых t_1 и t_2 . Корреляционная функция процесса $y(t)$ равна при этом

$$K_y[t_1, t_2] = \frac{\partial^2 K_x[t_1, t_2]}{\partial t_1 \partial t_2}.$$

Если $x(t)$ — процесс стационарный, то для существования его производной в среднееквадратическом необходимо и достаточно существование при любом τ

$$K_y[\tau] = - \frac{d^2 K_x[\tau]}{d\tau^2}. \quad (1.2.3)$$

Нетрудно проверить, что примерами дифференцируемых в среднееквадратическом стационарных случайных процессов являются процессы, обладающие корреляционными функциями

$$\langle x^2 \rangle \exp[-a\tau^2], \quad \langle x^2 \rangle \exp[-a|\tau|] \left(\cos b\tau + \frac{a}{b} \sin b|\tau| \right).$$

С другой стороны, стационарный случайный процесс $x(t)$ с корреляционной функцией (1.2.2) недифференцируем в среднееквадратическом, так как первая производная (1.2.2), равная

$$\frac{dK_x[\tau]}{d\tau} = \begin{cases} a \langle x^2 \rangle \exp a\tau, & \tau < 0, \\ 0, & \tau = 0, \\ -a \langle x^2 \rangle \exp[-a\tau], & \tau > 0, \end{cases}$$

терпит разрыв при $\tau=0$ (рис. 1.3, б) и, следовательно, вторая производная в этой точке не существует, обращаясь в минус бесконечность (рис. 1.3, в).

Можно привести еще целый ряд примеров случайных процессов, производная которых не существует в вышеуказанном смысле. Легко показать, что это связано с бесконечным значением дисперсии производной. Тем самым смысл существования $y(t)$ — производной в среднееквадратическом процесса $x(t)$ — сводится к тому, чтобы процесс $y(t) = dx(t)/dt$ имел конечную дисперсию. В указанном смысле не существует и дельта-коррелированный процесс, поскольку он обладает бесконечной дисперсией. Используя, однако, аппарат дельта-функции и ее производных (являющихся в строгом смысле обобщенными функ-

циями), мы рассматриваем дельта-коррелированный процесс, описывая его корреляционную функцию дельта-функцией. Совершенно так же можно использовать дельта-функцию и ее производные для описания производных тех случайных процессов, которые недифференцируемы в среднеквадратическом. Если, например, вторая смешанная производная корреляционной функции некоторого сигнала выражается с помощью дельта-функции и ее производных, то можно говорить в этом случае о *дифференцируемости этого сигнала в обобщенном смысле*.

Обращаясь к (1.2.2) и (1.2.3), нетрудно обнаружить в составе $K_y[\tau]$ дельта-функцию:

$$K_y[\tau] = 2a \langle x^2 \rangle \delta(\tau) - a^2 \langle x^2 \rangle \exp[-a|\tau|]. \quad (1.2.4)$$

Следовательно, можно считать, что процесс $x(t)$ с корреляционной функцией (1.2.2) дифференцируем в обобщенном смысле и его производная обладает корреляционной функцией (1.2.4).

В Приложении III приведены формулы для функций корреляции различных производных случайного процесса. Использование обобщенных функций существенно расширяет применение этих формально полученных формул.

Кроме того, следует заметить, что в книге мы будем считать любую функцию «хорошей», если она расходится лишь для некоторого множества значений аргумента, мера которого равна нулю, и если в этих точках она может быть описана по крайней мере с помощью дельта-функции и ее производных.

6. Кроме производной случайного процесса, приходится рассматривать также и интегралы

$$u(t) = \int_a^b f(\xi, t) x(\xi) d\xi, \quad v(t) = \int_a^t f(\xi, t) x(\xi) d\xi, \quad (1.2.5)$$

где $f(\xi, t)$ — некоторая ограниченная кусочно-непрерывная функция. Аналогично производной интеграл от случайного процесса (как предельная операция) также может быть определен различными способами. Если интеграл определить в среднеквадратическом смысле, то можно показать, что необходимым и достаточным условием его существования является сходимость интегралов

$$\begin{aligned} & \int_a^b \int_a^b f(\xi, t_1) f(\eta, t_2) K_x[\xi, \eta] d\xi d\eta, \\ & \int_a^{t_1} \int_a^{t_2} f(\xi, t_1) f(\eta, t_2) K_x[\xi, \eta] d\xi d\eta \end{aligned} \quad (1.2.6)$$

для любых t_1 и t_2 .

Сходимость этих интегралов означает по существу опять-таки конечность дисперсии функций $u(t)$ и $v(t)$. В случае бесконечных дисперсий функций $u(t)$ и $v(t)$ можно говорить о существовании интегралов (1.2.5) в обобщенном смысле, если (1.2.6) существует в обобщенном смысле, выражаясь через дельта-функцию и ее производные. Если интегралы (1.2.6) расходятся, но могут быть суммированы (см. Приложение I), то можно также говорить о существовании $u(t)$ и $v(t)$ в обобщенном смысле. Таким образом, расширяется применение операции интегрирования над сигналами.

Во всем последующем изложении мы будем предполагать, что встречающиеся производные и интегралы от сигналов существуют по крайней мере в обобщенном смысле, не оговаривая этого обстоятельства каждый раз. Это, в частности, относится и к дифференциальным уравнениям для случайных функций (гл. 2).

§ 1.3. Спектрально-корреляционный анализ сигналов первой группы

1. Рассмотрим какой-либо сигнал $x(t)$. Будем говорить, что сигнал $x(t)$ принадлежит к первой группе, если

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t) dt = \tilde{\mathcal{E}}_x < \infty.$$

Величину $\tilde{\mathcal{E}}$ можно назвать энергией сигнала. Таким образом, сигналы первой группы являются функциями, интегрируемыми с квадратом, и поэтому они могут быть без каких-либо осложнений разложены в интеграл Фурье.

Пусть

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} C_x(\omega) e^{-j\omega t} d\omega; \quad (1.3.1)$$

тогда

$$C_x(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{j\omega t} dt \quad (1.3.2)$$

есть коэффициент Фурье (комплексная функция частоты ω), отражающий спектральный состав сигнала $x(t)$.

Для интегрируемых с квадратом функций $x(t)$ и $y(t)$ имеет место известное соотношение

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) y(t + \tau) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} C_x(\omega) C_y^*(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega, \quad (1.3.3)$$

где звездочка означает комплексно-сопряженную величину. Введя определение спектральной плотности энергии сигнала $x(t)$

$$\dot{\tilde{\mathcal{E}}}_x(\omega) = \frac{1}{2\pi} |C_x(\omega)|^2,$$

с помощью (1.3.3) нетрудно получить

$$\tilde{\mathcal{E}}_x = \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{\tilde{\mathcal{E}}}_x(\omega) d\omega.$$

Это соотношение раскрывает смысл понятия спектральной плотности энергии сигнала: $\dot{\tilde{\mathcal{E}}}_x(\omega) d\omega$ дает часть всей энергии сигнала, приходящуюся на интервал частот $[\omega, \omega + d\omega]$.

Если $x(t)$ есть детерминированная функция первой группы, то $\tilde{\mathcal{E}}_x(\omega)$ — также детерминированная функция ω , а $\dot{\tilde{\mathcal{E}}}_x$ — детерминированная величина. Если $x(t)$ есть реализация случайной функции времени первой группы, то $\dot{\tilde{\mathcal{E}}}_x(\omega)$ есть уже случайная функция частоты ω , а $\tilde{\mathcal{E}}_x$ — случайная величина, которая меняется от реализации к реализации. В последнем случае представляют интерес не $\dot{\tilde{\mathcal{E}}}_x$ и $\tilde{\mathcal{E}}_x(\omega)$, а их средние значения

$$\mathcal{E}_x = \langle \tilde{\mathcal{E}}_x \rangle, \quad \mathcal{E}_x(\omega) = \langle \dot{\tilde{\mathcal{E}}}_x(\omega) \rangle,$$

с которыми мы в дальнейшем и будем иметь дело. Тем самым энергия сигнала $x(t)$ и спектральная плотность его энергии будут определяться теперь как

$$\mathcal{E}_x = \int_{-\infty}^{+\infty} \langle x^2(t) \rangle dt, \quad \mathcal{E}_x(\omega) = \frac{1}{2\pi} \langle |C_x(\omega)|^2 \rangle. \quad (1.3.4)$$

Взаимосвязь между ними принимает вид

$$\mathcal{E}_x = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{E}_x(\omega) d\omega. \quad (1.3.5)$$

Из второй формулы (1.3.4) нетрудно увидеть, что $\mathcal{E}_x(\omega)$ есть четная функция частоты ω .

Пример 1.3.1. Пусть $x(t) = e^{-at} 1(t)$, $a > 0$, где $1(t)$ — единичная функция, определенная аналитически следующим образом:

$$1(t) = \begin{cases} 1, & t > 0, \\ 1/2, & t = 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases} \quad (1.3.6)$$

Нетрудно видеть, что $x(t)$ есть детерминированная функция первой группы с энергией

$$\mathcal{E}_x = \int_0^{\infty} e^{-2at} dt = \frac{1}{2a}.$$

Коэффициент Фурье этой функции равен

$$C_x(\omega) = \int_0^{\infty} e^{-at + j\omega t} dt = \frac{1}{a - j\omega},$$

спектральная плотность энергии рассматриваемой функции на основании (1.3.4)

$$\mathcal{E}_x(\omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{a^2 + \omega^2}.$$

Из приведенного примера видно, что к первой группе принадлежат «импульсные» сигналы, сигналы, имеющие «начало» и «конец», т. е. такие сигналы, величина которых достаточно быстро спадает при возрастании $|t|$.

2. Рассмотрим сигнал $x(t)$, принадлежащий к первой группе, и построим для него следующую функцию (назовем ее *функцией корреляции первого рода*):

$$\Psi_x(\tau) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} K_x[t, t + \tau] dt. \quad (1.3.7)$$

Эта функция существует для всех сигналов первой группы. Можно показать, что функция корреляции первого рода $\Psi_x(\tau)$ обладает всеми свойствами K_1 , т. е. она имеет свойства корреляционной функции стационарного случайного процесса. Это обстоятельство является важным для следующего и вместе с тем достаточно интересным, если к тому же учесть, что ни одна из случайных функций, принадлежащих к первой группе, не является стационарным случайным процессом.

Положим в соотношении (1.3.3) $x(t) = y(t)$ и усредним его по ансамблю. В результате обнаружится, что $\Psi_x(\tau)$ и $\mathcal{E}_x(\omega)$ есть пара косинус-трансформаций Фурье:

$$\mathcal{E}_x(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_x(\tau) \cos \omega \tau d\tau, \quad (1.3.8)$$

$$\Psi_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{E}_x(\omega) \cos \omega \tau d\omega. \quad (1.3.9)$$

Полученные формулы позволяют ввести новое определение спектральной плотности энергии для сигналов первой группы. Имея сигнал $x(t)$, мы находим для него функцию корреляции первого рода $\Psi_x(\tau)$ согласно (1.3.7). Вычисляя ее фурье-сопряженную, на основании (1.3.8) получаем спектральную плотность энергии $\mathcal{E}_x(\omega)$. Связь энергии \mathcal{E}_x со спектральной плотностью $\mathcal{E}_x(\omega)$ имеет по-прежнему вид (1.3.5), что получается (как и должно быть) из (1.3.9) при $\tau=0$. Этот путь нахождения спектральной плотности энергии применим и к случайным, и к детерминированным функциям и в ряде случаев существенно упрощает расчеты по сравнению с методом расчета $\mathcal{E}_x(\omega)$ через посредство коэффициента Фурье.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1.3.2. Найдем спектральную плотность энергии для примера 1.3.1 методом функции корреляции. Нетрудно найти, что для $x(t) = e^{-at} 1(t)$

$$\Psi_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at} 1(t) e^{-a(t+\tau)} 1(t+\tau) dt = \frac{1}{2a} e^{-a|\tau|}.$$

Отсюда

$$\mathcal{E}_x(\omega) = \frac{1}{2a\pi} \int_0^{\infty} e^{-a\tau} \cos \omega\tau d\tau = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{a^2 + \omega^2},$$

что совпадает с тем, что было найдено в примере 1.3.1.

Пример 1.3.3. Рассмотрим детерминированную функцию времени $x(t) = Ae^{-at} 1(t) \cos \omega_0 t$, представляющую собой затухающую синусоиду и принадлежащую, как нетрудно проверить, к первой группе. Ее функция корреляции равна в общем случае

$$\Psi_x(\tau) = \frac{A^2}{4a} e^{-a|\tau|} \left\{ \cos \omega_0 \tau \left[1 + \frac{a^2}{a^2 + \omega_0^2} \right] - \sin \omega_0 |\tau| \frac{a\omega_0}{a^2 + \omega_0^2} \right\}.$$

Пусть $a \ll \omega_0$; тогда приближенно имеем

$$\Psi_x(\tau) = \frac{A^2}{4a} e^{-a|\tau|} \cos \omega_0 \tau.$$

Совершая фурье-преобразование, согласно (1.3.8) находим следующее значение спектральной плотности энергии:

$$\mathcal{E}_x(\omega) = \frac{A^2}{8\pi} \left[\frac{1}{a^2 + (\omega - \omega_0)^2} + \frac{1}{a^2 + (\omega + \omega_0)^2} \right].$$

Таким образом, спектр энергии рассмотренной функции представляет собой резонансную кривую, имеющую ширину, равную a , максимум которой расположен на частоте ω_0 (и на частоте $-\omega_0$, в силу симметрии спектральной плотности энергии).

Пример 1.3.4. Рассмотрим случайную функцию первой группы $x(t) = f(t)\xi(t)$, где $\xi(t)$ — стационарный случайный процесс с заданной корреля-

ционной функцией $K_{\xi}[\tau]$, $f(t)$ — любая детерминированная функция, принадлежащая к первой группе. Корреляционная функция сигнала $x(t)$ равна

$$\begin{aligned}\Psi_x(\tau) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \langle f(t) f(t+\tau) \xi(t) \xi(t+\tau) \rangle dt = \\ &= K_{\xi}[\tau] \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) f(t+\tau) dt = K_{\xi}[\tau] \Psi_f(\tau).\end{aligned}$$

§ 1.4. Спектрально-корреляционный анализ сигналов второй группы

1. Будем говорить, что сигнал $x(t)$ принадлежит ко второй группе, если для него энергия \mathcal{E}_x бесконечна, а величина

$$S_x \equiv \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \langle x^2(t) \rangle dt, \quad (1.4.1)$$

называемая мощностью сигнала, является конечной величиной. К ней принадлежат такие сигналы, значения которых не обращаются в тождественный нуль для сколь угодно большого значения аргумента t . Сюда относятся, например, постоянная величина, синусоида, случайная стационарная функция и т. п. Эти сигналы обладают конечной мощностью S_x , и представляет интерес отыскание спектральной плотности этой мощности $S_x(\omega)$.

Определение и нахождение спектральной плотности мощности в принципе возможно провести с помощью коэффициентов Фурье, как это было сделано для спектральной плотности энергии. Однако на этом пути имеются определенные трудности, которые связаны с тем, что функция, принадлежащая ко второй группе, не является абсолютно интегрируемой. Это приводит к тому, что разложение такой функции в интеграл Фурье в соответствии с (1.3.1) и (1.3.2) является математически некорректным. Эта трудность может быть эффективно преодолена, если несобственные интегралы (1.3.1) и (1.3.2) определять методом суммирования (см. Приложение I). Мы, однако, поступим по-другому, воспользовавшись тем, что спектральную плотность можно вводить не через коэффициенты Фурье, а через некоторую функцию корреляции (см. § 1.3).

Введем для сигнала $x(t)$ *функцию корреляции второго рода*, которую определим как

$$\Phi_x(\tau) \equiv \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} K[t, t+\tau] dt. \quad (1.4.2)$$

Нетрудно видеть, что, во-первых, эта функция корреляции существует для всех сигналов второй группы и что, во-вторых, она, как и $\Psi(\tau)$, обладает свойствами K_1 .

Определим спектральную плотность мощности сигнала $x(t)$ как

$$S_x(\omega) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_x(\tau) \cos \omega \tau d\tau. \quad (1.4.3)$$

Обратное преобразование имеет вид

$$\Phi_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(\omega) \cos \omega \tau d\omega. \quad (1.4.4)$$

Полагая в этом выражении слева и справа $\tau=0$, имеем

$$\Phi_x(0) = S_x = \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(\omega) d\omega, \quad (1.4.5)$$

что объясняет смысл названия $S_x(\omega)$.

Если $\Phi_x(\tau)$ есть функция абсолютно интегрируемая, то $S_x(\omega)$ существует для всех ω . Если $\Phi_x(\tau)$ есть функция неинтегрируемая, то интеграл (1.4.3) следует определять методом суммирования, и при этом $S_x(\omega)$ будет существовать почти для всех ω (кроме некоторых значений, например $\omega=0$).

Если $x(t)$ есть случайный стационарный процесс с заданной корреляционной функцией $K_x[\tau]$, функция корреляции второго рода, согласно (1.4.2), равна для него

$$\Phi_x(\tau) = K_x[\tau],$$

т. е. попросту совпадает с корреляционной функцией. В этом случае соотношения (1.4.3) и (1.4.4) переходят в известные соотношения Винера — Хинчина, связывающие корреляционную функцию и спектр мощности случайного стационарного процесса.

Нетрудно видеть, что функция корреляции второго рода $\Phi_x(\tau)$ является более общей функцией корреляции, чем $K_x[\tau]$. Последняя существует только для стационарных случайных процессов, в то время как $\Phi_x(\tau)$ может быть найдена и для *нестационарных* случайных процессов, а соотношение (1.4.3) позволяет и в этом случае найти спектральную плотность мощности. Независимость $S_x(\omega)$ от времени для нестационарных случайных процессов связана с тем, что спектральную плотность мощности (а равно и спектральную плотность энергии) мы определяем, рассматривая поведение $x(t)$ на всем промежутке времени, от $-\infty$ до $+\infty$.

Таким образом, формулы (1.4.2) — (1.4.5) являются основной спектрально-корреляционного анализа любых функций второй группы, как детерминированных, так и случайных; как стационарных, так и нестационарных.

2. Рассмотрим несколько примеров, результаты которых в дальнейшем будут использованы.

Пример 1.4.1. Рассмотрим $x(t) = A$ — постоянную величину (например, постоянный ток или постоянное напряжение). Нетрудно проверить, что эта детерминированная функция принадлежит ко второй группе и обладает мощностью, равной A^2 . Легко найти функцию корреляции и спектральную плотность мощности этой функции

$$\Phi_x(\tau) = A^2, \quad S_x(\omega) = A^2 \delta(\omega).$$

Таким образом, спектральная плотность мощности постоянной величины имеет вид монохроматической линии, расположенной на нулевой частоте.

Пример 1.4.2. Рассмотрим синусоидальное колебание $x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$. Эта детерминированная функция принадлежит ко второй группе сигналов и имеет мощность, равную $A^2/2$. Ее функция корреляции равна, как легко вычислить,

$$\Phi_x(\tau) = \frac{A^2}{2} \cos \omega_0 \tau.$$

Спектральная плотность мощности принимает следующий вид:

$$S_x(\omega) = \frac{A^2}{4} [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)],$$

и состоит из монохроматических линий, расположенных на частотах $\omega = \omega_0$, $\omega = -\omega_0$. Монохроматическая линия на отрицательной частоте входит потому, что $S(\omega)$ является четной функцией частоты и определена на бесконечном интервале частот $(-\infty, +\infty)$.

Обращает на себя внимание то, что ни $\Phi_x(\tau)$, ни $S_x(\omega)$ не зависят от φ (фазы колебания). Это обстоятельство является общим свойством спектральной плотности мощности или энергии. Оно связано с тем, что все фазовые характеристики частотных составляющих, «сидящие» в $S_x(\omega)$, утрачиваются в $\mathcal{E}_x(\omega)$ или $S_x(\omega)$ при взятии квадрата модуля от коэффициентов Фурье. Это приводит к тому, что одинаковыми значениями $S_x(\omega)$ (или $\mathcal{E}_x(\omega)$) могут обладать, вообще говоря, различные функции времени $x_1(t)$ и $x_2(t)$. Таким образом, спектральные плотности мощности или энергии представляют функции времени *не полностью* (в отличие от коэффициентов Фурье $C_x(\omega)$), а с утратой фазовой информации.

Пример 1.4.3. Функция $x(t) = A1(t)$, как нетрудно видеть, принадлежит ко второй группе, обладая мощностью, равной $A^2/2$. Найдем ее спектральную плотность. Поскольку

$$\Phi_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A^2}{2T} \int_{-T}^{+T} 1(t) 1(t + \tau) dt = \frac{A^2}{2},$$

то $S_x(\omega) = \frac{A^2}{2} \delta(\omega)$. Спектральная плотность мощности для рассмотренной ступенчатой функции отличается лишь множителем 1/2 от спектральной плотности постоянной величины.

Пример 1.4.4. Рассмотрим теперь случайную функцию. Пусть $x(t) = f(t)\xi(t)$, где $f(t)$ — любая детерминированная функция времени второй

группы, $\xi(t)$ — случайный стационарный процесс с заданной корреляционной функцией $K_\xi[\tau]$. Нетрудно убедиться в том, что $x(t)$ есть, во-первых, сигнал второй группы и что, во-вторых, он представляет собой *нестационарный* процесс. Функция корреляции второго рода сигнала $x(t)$ равна

$$\Phi_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} f(t) f(t+\tau) \langle \xi(t) \xi(t+\tau) \rangle dt = \Phi_f(\tau) \Phi_\xi(\tau).$$

Для выражения спектральной мощности $S_x(\omega)$ через $S_f(\omega)$ и $S_\xi(\omega)$ следует обратиться к (III.4).

Пусть, например, $x(t) = A\xi(t) \cos \omega_0 t$ и $K_\xi[\tau] = \langle \xi^2 \rangle \exp[-a|\tau|]$. Тогда

$$\Phi_x(\tau) = \frac{1}{2} \langle \xi^2 \rangle A^2 e^{-a|\tau|} \cos \omega_0 \tau.$$

Сравнивая это выражение с функцией корреляции примера 1.3.3, можно сразу написать спектральную плотность мощности:

$$S_x(\omega) = \frac{\langle \xi^2 \rangle A^2 a}{4\pi} \left[\frac{1}{a^2 + (\omega - \omega_0)^2} + \frac{1}{a^2 + (\omega + \omega_0)^2} \right].$$

Таким образом, два совершенно разных процесса: детерминированный импульс $Ae^{-at}1(t) \cos \omega_0 t$ и периодически нестационарная функция $A\xi(t) \cos \omega_0 t$ имеют совпадающие по форме спектры. Это совпадение формы спектров означает, что между двумя рассмотренными процессами существует определенная взаимосвязь. Рассмотрим ее подробнее.

3. Обратимся к некоторым взаимоотношениям спектральных плотностей энергии сигналов первой группы со спектральными плотностями мощности сигналов второй группы.

Рассмотрим случайные функции второй группы, которые представляют собой *случайную* суперпозицию детерминированных функций первой группы:

$$x(t) = \sum_k g_k f_k(t - t_k).$$

Здесь g_k — случайные величины, обладающие определенным распределением вероятностей; $f_k(t)$ — детерминированные функции (в общем случае разные для разных k) первой группы такие, что $f_k(t) = 0$ для $t < 0$, t_k — случайные моменты ($t_1 < t_2 < t_3 < \dots$). Нетрудно видеть, что функция $x(t)$ есть сумма случайно возникающих во времени импульсов различной величины и формы. t_k — это моменты возникновения k -го импульса. Многие реальные случайные процессы могут быть представлены подобным образом.

Нашей задачей является отыскание связи между функциями корреляции и спектральными плотностями случайной функции $x(t)$ и детерминированных импульсов $f_k(t)$.

Рассмотрим наиболее простой случай, когда все импульсы тождественны по форме

$$x(t) = \sum_k g_k f(t - t_k), \quad (1.4.6)$$

а случайные величины g_k являются значениями некоторой случайной величины g ; они взаимно независимы для разных k и независимы от t_k ; $\langle g_k \rangle = \bar{g}$, а $\langle g_k^2 \rangle = \bar{g}^2$. Предположим также, что вероятность появления определенного числа импульсов за определенное время подчиняется закону Пуассона с параметром ε , равным среднему числу импульсов, возникающих за единицу времени. В этом случае справедливы, как известно [2, 3], следующие соотношения:

$$\langle x(t) \rangle = \varepsilon \left\langle \int_{-\infty}^{+\infty} g_k f(t - t_k) dt \right\rangle = \bar{g} \varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt, \quad (1.4.7)$$

$$\begin{aligned} \langle y(t) y(t + \tau) \rangle &= \varepsilon \left\langle \int_{-\infty}^{+\infty} g_k^2 f(t - t_k) f(t + \tau - t_k) dt \right\rangle = \\ &= \bar{g}^2 \varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) f(t + \tau) dt, \end{aligned} \quad (1.4.8)$$

где введено обозначение

$$y(t) = x(t) - \langle x(t) \rangle.$$

Вследствие детерминированности функции $f(t)$ интеграл в правой части (1.4.8) представляет собой функцию корреляции первого рода $\Psi_f(\tau)$. Следовательно, (1.4.8) можно записать в следующем виде (учитывая, что интеграл зависит только от τ):

$$\Phi_y(\tau) = \bar{g}^2 \varepsilon \Psi_f(\tau). \quad (1.4.9)$$

Таким образом, функция корреляции флуктуации суперпозиции случайно приходящих импульсов пропорциональна функции корреляции отдельного импульса.

Совершая фурье-преобразование (1.4.9), найдем

$$S_y(\omega) = \bar{g}^2 \varepsilon \mathcal{S}_f(\omega). \quad (1.4.10)$$

Спектр мощности суммы случайно приходящих импульсов (без учета постоянной составляющей) совпадает по форме со спектром энергии отдельного импульса.

Полученные результаты являются весьма интересными. Имея случайную функцию $x(t)$ с заданными $\Phi_x(\tau)$ и $S_x(\omega)$, мы мо-

жем формально представить ее в виде суперпозиции отдельных импульсов (1.4.6). При этом мы выбираем соответственно форму импульса и величины g_h и ϵ . Такое представление $x(t)$ подчас является чрезвычайно полезным для решения целого ряда вопросов, связанных с преобразованием $x(t)$ различными системами.

Пусть имеем, например, случайную функцию $x(t)$ с функцией корреляции $\Phi_x(\tau) = B e^{-a|\tau|}$. Тогда, обращаясь к примеру 1.3.2, видим, что в качестве импульса $f(t)$ можем принять

$$f(t) = e^{-at} 1(t),$$

ибо $\Psi_f(\tau) = e^{-a|\tau|}/2a$. Величины $\overline{g^2}$ и ϵ определяются условием $B = \overline{g^2}\epsilon/2a$. Неоднозначность выбора $\overline{g^2}$ и ϵ является следствием задания малой информации о функции $x(t)$. Если мы знаем, например, что $x(t)$ имеет нормальное распределение в каждый данный момент t , то это приведет к нормальному распределению величин g_h . Если $x(t)$ является стационарной случайной функцией, то это накладывает определенные условия на величину ϵ (например, $\epsilon \gg a$) и т. п.

Таким образом, действительно, случайную функцию $x(t)$ с коэффициентом корреляции $e^{-a|\tau|}$ можно представить суперпозицией случайно возникающих импульсов, затухающих по закону e^{-at} .

Теперь уже нетрудно объяснить и совпадение форм спектров у функций, рассмотренных в примерах 1.3.3 и 1.4.4. А именно функцию $A\xi(t) \cos \omega_0 t$ с $\Phi_\xi(\tau) = \langle \xi^2 \rangle e^{-a|\tau|}$ можно просто представить как суперпозицию затухающих случайно возникающих синусоид $e^{-at} 1(t) \cos \omega_0 t$. В этом случае, как и должно быть согласно (1.4.10), формы спектральных плотностей совпадают.

§ 1.5. Спектрально-корреляционный анализ сигналов с неинтегрируемыми спектрами энергии

1. Рассмотрим какой-либо сигнал $x(t)$, принадлежащий ко второй группе. Его мощность S_x , заданная формулой (1.4.1), по определению, является конечной величиной, а энергия \mathcal{E}_x , определенная первой формулой (1.3.4), является величиной бесконечно большой.

Однако бесконечность энергии \mathcal{E}_x еще не означает, что в общем случае спектральная плотность энергии $\mathcal{E}_x(\omega)$, определенная второй формулой (1.3.4), имеет бесконечное значение для всех ω . Другими словами, бесконечное значение определенного интеграла еще не означает, что подынтегральная функция принимает бесконечные значения для всех значений аргумента.

Разумеется, разумно предположить при этом, что для каких-то значений ω_n (образующих множество меры нуль) спектральная плотность энергии может принимать бесконечные значения. Таким образом, мы ограничимся случаями, когда, несмотря на расходимость \mathcal{E}_x , спектральная плотность энергии $\mathcal{E}_x(\omega)$ для сигналов второй группы существует для почти всех ω . Тем самым возникает задача отыскания в этих случаях спектральной плотности $\mathcal{E}_x(\omega)$.

2. Как уже указывалось, сигналы второй группы не являются абсолютно интегрируемыми функциями. Поэтому формальное вычисление для них спектральной плотности энергии $\mathcal{E}_x(\omega)$, согласно формулам (1.3.4) и (1.3.2), наталкивается на трудности, свойственные фурье-анализу абсолютно неинтегрируемых функций. Обращение к определению несобственных интегралов методами суммирования снимает эти трудности и приносит, вообще говоря, успех.

В самом деле, рассмотрим, например, детерминированную функцию $x(t) = A1(t)$, принадлежащую ко второй группе. Применяя суммирование $(C, 1)$ (см. Приложение I), нетрудно найти, что коэффициент Фурье функции $x(t)$ равен

$$C_x(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} A1(t) e^{j\omega t} dt = j \frac{A}{\omega}.$$

Отсюда спектральная плотность энергии рассматриваемой функции равна

$$\mathcal{E}_x(\omega) = \frac{A^2}{2\pi\omega^2} \quad \text{при } \omega \neq 0. \quad (1.5.1)$$

Такова спектральная плотность энергии ступенчатой функции. Она существует для всех ω , кроме $\omega=0$. Интеграл от нее, дающий значение энергии \mathcal{E}_x , как и должно быть, расходится, и нетрудно видеть, что его расходимость связана с неограниченностью $\mathcal{E}_x(\omega)$ в точке $\omega=0$.

Таким образом, используя суммирование несобственных интегралов, можно методом коэффициентов Фурье найти спектральную плотность энергии $\mathcal{E}_x(\omega)$ для сигналов второй группы.

Однако интерес представляет нахождение $\mathcal{E}_x(\omega)$ для сигналов второй группы не с помощью коэффициентов Фурье, а с помощью некоторой функции, подобной функции корреляции такой, что фурье-сопряженная от нее давала бы как раз спектральную плотность $\mathcal{E}_x(\omega)$. Такой подход к определению $\mathcal{E}_x(\omega)$, несомненно, является более перспективным и удобным для спектрального анализа.

Нетрудно видеть, что непосредственное обращение к функции корреляции первого рода для сигналов второй группы ничего не дает, так как для них $\Psi_x(\tau)$ расходится для почти всех τ . Следовательно, необходимо вводить в рассмотрение совершенно новые функции.

3. Рассмотрим произвольный сигнал $x(t)$. Образует для него следующую функцию:

$$d_x[t_1, t_2; \tau] \equiv \frac{1}{2} \langle [x(t_1 + \tau) - x(t_1)][x(t_2 + \tau) - x(t_2)] \rangle, \quad (1.5.2)$$

которую назовем *статистической структурной функцией*. Нетрудно видеть, что эта структурная функция показывает коррелированность приращений случайной функции $x(t)$, взятых в различные моменты времени, и с этой точки зрения подобна обычной корреляционной функции.

Введенная формулой (1.5.2) структурная функция лишь коэффициентом $1/2$ отличается от общего вида структурной функции, введенной впервые А. Н. Колмогоровым [1, 6, 7]. Тем не менее мы сохраним множитель $1/2$, так как (это будет видно дальше) он дает нам некоторые удобства.

Нетрудно обнаружить следующие свойства статистической структурной функции:

- 1) $d_x[t_1, t_2; 0] \equiv 0$,
- 2) $d_x[t_2, t_1; \tau] = d_x[t_1, t_2; \tau]$,
- 3) $d_x[t_1, t_2; -\tau] = d_x[t_1 - \tau, t_2 - \tau; \tau]$.

Кроме того, структурная функция $d_x[t_1, t_2; \tau]$ связана с корреляционной функцией следующим образом:

$$d_x[t_1, t_2; \tau] = \frac{1}{2} \{K_x[t_1 + \tau; t_2 + \tau] + K_x[t_1, t_2] - K_x[t_1 + \tau, t_2] - K_x[t_1, t_2 + \tau]\}. \quad (1.5.3)$$

Если рассматриваемый случайный стационарный сигнал $x(t)$ обладает нулевым средним значением, то для фиксированных t_1 и t_2

$$\lim_{\theta \rightarrow \infty} K_x[t_1, t_2 + \theta] = \lim_{\theta \rightarrow \infty} K_x[\theta + t_2 - t_1] = 0.$$

Нетрудно видеть тогда из (1.5.3), что для такого сигнала

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} d_x[t_1, t_2; \tau] = K_x[t_2 - t_1].$$

Это значит, что для случайных стационарных сигналов статистическая структурная функция является более общей функцией, чем корреляционная; последняя может быть найдена из структурной функции при $\tau \rightarrow \infty$. Здесь, кстати, уже видна польза

введения множителя $1/2$: при $\tau \rightarrow \infty$ статистическая структурная функция просто переходит в корреляционную.

Среди структурных функций, описывающих вещественные случайные процессы, наиболее часто используется в литературе структурная функция (см., например, [1, 8])

$$D_x[t_1, t_2] = \langle [x(t_2) - x(t_1)]^2 \rangle.$$

Нетрудно показать, что эта структурная функция является частным случаем введенной выше статистической структурной функции:

$$D_x[t_1, t_2] = 2d_x[t_1, t_1; t_2 - t_1]$$

С другой стороны, воспользовавшись алгебраическим тождеством

$$2(a-b)(c-d) = (a-d)^2 + (b-c)^2 - (a-c)^2 - (b-d)^2,$$

можно найти выражение $d_x[t_1, t_2; \tau]$ через $D_x[t_1, t_2]$:

$$d_x[t_1, t_2; \tau] = \frac{1}{4} \{ D_x[t_2, t_1 + \tau] + D_x[t_2 + \tau, t_1] - \\ - D_x[t_2 + \tau, t_1 + \tau] - D_x[t_2, t_1] \}. \quad (1.5.4)$$

Как мы имели выше, корреляционная функция $K_x[t_1, t_2]$ случайного процесса принимала простой вид (становилась функцией одного аргумента) для *случайного стационарного процесса*. С точки зрения статистической структурной функции также имеется один класс случайных процессов, для которых $d_x[t_1, t_2; \tau]$ становится более простой. Это класс так называемых *случайных процессов со стационарными приращениями*.

Случайный процесс называется процессом со стационарными приращениями (в широком смысле), если для него

$$\langle x(t + \tau) - x(t) \rangle = c(\tau), \quad d_x[t_1, t_2; \tau] \equiv d_x[t_2 - t_1; \tau].$$

Это значит, что коррелированность приращений процесса со стационарными приращениями не зависит от абсолютных моментов времени взятых приращений, а зависит лишь от их разности. Для таких процессов статистическая структурная функция зависит только от двух аргументов и имеет вид $d_x[\theta; \tau]$. Нетрудно понять, что процессы со стационарными приращениями — это более широкий класс процессов по сравнению с просто стационарными процессами. Стационарный случайный процесс есть всегда процесс со стационарными приращениями, в то время как процесс, обладающий стационарными приращениями, может быть и нестационарным процессом.

Для процессов со стационарными приращениями

$$D_x[t_1, t_2] \equiv D_x[t_2 - t_1];$$

следовательно, структурные функции $d_x[\theta; \tau]$ и $D_x[\tau]$ связаны таким образом:

$$D_x[\tau] = 2 d_x[\theta; \tau]. \quad (1.5.5)$$

Нетрудно обнаружить следующие свойства структурной функции $D_x[\tau]$:

- 1) $D_x[0] = 0,$
- 2) $D_x[\tau] \geq 0,$
- 3) $D_x[-\tau] = D_x[\tau].$

Рассмотрим произвольную функцию двух аргументов $B[\theta; \tau]$. Будем говорить, что функция $B[\theta; \tau]$ обладает свойствами S_1 , если для нее справедливо:

- 1) $B[\theta; \tau]$ при $\tau \neq 0$ как функция от θ обладает свойствами K_1 ,
- 2) $B[\theta; 0] \equiv 0,$
- 3) $B[0; \tau] \geq 0,$
- 4) $B[\theta; -\tau] = B[\theta; \tau].$

Отметим, что отсюда следует четность функции $B[\theta; \tau]$ по отношению к обоим аргументам.

Обратимся к статистической структурной функции $d_x[\theta; \tau]$. Нетрудно убедиться, что $d_x[\theta; \tau]$ обладает свойствами S_1 .

В самом деле, рассмотрим $d_x[\theta; \tau]$ как функцию θ при $\tau \neq 0$. Тогда первое свойство K_1 очевидно. Второе свойство K_1 следует из второго свойства статистической структурной функции $d_x[t_1, t_2; \tau]$. Третье свойство K_1 можно доказать, рассматривая неравенство

$$\langle \{ [x(t_1 + \tau) - x(t_1)] \pm [x(t_2 + \tau) - x(t_2)] \}^2 \rangle \geq 0.$$

Четвертое свойство K_1 следует из неравенства

$$\langle \{ \sum_k a_k [x(t_k + \tau) - x(t_k)] \}^2 \rangle \geq 0.$$

Таким образом, статистическая структурная функция $d_x[\theta; \tau]$ по первому аргументу θ обладает всеми свойствами корреляционной функции стационарного процесса и поэтому при фиксированном $\tau \neq 0$ может считаться некоторой корреляционной функцией.

Второе и третье свойства S_1 очевидны. Четвертое свойство S_1 следует из третьего свойства статистической структурной функции $d_x[t_1, t_2; \tau]$.

Тем самым по второму аргументу статистическая структурная функция обладает свойствами структурной функции $D_x[\tau]$.

Статистическая структурная функция, заданная выражением (1.5.2), определена как для детерминированных, так и для случайных сигналов. Для первых статистическое усреднение можно просто отбросить.

Для стационарных случайных процессов с заданной корреляционной функцией $K_x[\tau]$ статистическая структурная функция на основании (1.5.3) равна

$$d_x[\theta; \tau] = K_x[\theta] - \frac{1}{2} K_x[\theta - \tau] - \frac{1}{2} K_x[\theta + \tau]. \quad (1.5.6)$$

Для процессов со стационарными приращениями с заданной структурной функцией $D_x[\tau]$ статистическая структурная функция на основании (1.5.4) равна

$$d_x[\theta; \tau] = \frac{1}{4} D_x[\theta - \tau] + \frac{1}{4} D_x[\theta + \tau] - \frac{1}{2} D_x[\theta]. \quad (1.5.7)$$

4. Рассмотрим произвольный сигнал $x(t)$ и образуем для него функцию

$$\delta_x(\theta, \tau) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} d_x[t, t + \theta; \tau] dt, \quad (1.5.8)$$

которую назовем *структурной функцией первого рода*. Можно показать, что $\delta_x(\theta, \tau)$ обладает всеми свойствами S_1 .

Возьмем теперь такой сигнал $x(t)$, для которого существует функция корреляции первого рода $\Psi_x(\tau)$. В этом случае, на основании (1.5.8), (1.5.3) и (1.3.7), легко найти, что

$$\delta_x(\theta, \tau) = \Psi_x(\theta) - \frac{1}{2} \Psi_x(\theta - \tau) - \frac{1}{2} \Psi_x(\theta + \tau). \quad (1.5.9)$$

Если случайные процессы (для которых существует $\Psi_x(\tau)$) таковы, что $\Psi_x(\infty) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \Psi_x(\tau) = 0$ (например, случайные процессы первой группы с нулевым средним значением), то очевидно, что

$$\delta_x(\theta, \infty) = \Psi_x(\theta).$$

Таким образом, знание структурной функции первого рода позволяет определить функцию корреляции первого рода (если она существует). Поэтому можно считать, что структурная функция $\delta_x(\theta, \tau)$ есть более общая функция, чем функция корреляции $\Psi_x(\tau)$.

С другой стороны, функция $\delta_x(\theta, \tau)$ имеет и более общее существование. Она может существовать и в том случае, когда функция корреляции первого рода не существует. Так, например, для всех сигналов второй группы $\Psi_x(\tau)$ не существует, в то время как для некоторых из них существует структурная функция первого рода $\delta_x(\theta, \tau)$. Это обстоятельство и позволяет

решить поставленный вопрос о спектральной плотности энергии для сигналов второй группы.

С помощью (1.3.9) и (1.5.9) нетрудно написать следующее спектральное разложение структурной функции $\delta_x(\theta, \tau)$:

$$\delta_x(\theta, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos \omega \tau [1 - \cos \omega \theta] \mathcal{E}_x(\omega) d\omega. \quad (1.5.10)$$

Эта формула дает возможность определить структурную функцию сигнала, если задана его спектральная плотность. Хотя при выводе этой формулы мы и предполагали, что существует $\Psi_x(\tau)$, полученное спектральное разложение может распространяться и на тот случай, когда $\Psi_x(\tau)$ не существует, но существует $\delta_x(\theta, \tau)$.

В самом деле, сравним (1.5.10) и (1.3.9). Если, например, $\mathcal{E}_x(\omega)$ при $\omega \rightarrow 0$ возрастает как $1/\omega^2$, то интеграл (1.3.9) расходится и $\Psi_x(\tau)$ не существует (именно такую спектральную плотность мы получили для сигнала $x(t) = A l(t)$; см. (1.5.1)). В противоположность этому, $\delta_x(\theta, \tau)$ для такой спектральной плотности существует, так как сомножитель $(1 - \cos \omega \tau)$ при $\omega \rightarrow 0$ стремится к нулю как ω^2 и особенность подынтегральной функции в (1.5.10) при $\omega \rightarrow 0$ исчезает.

Обращаясь к сигналу $x(t) = A l(t)$, для которого применим, как было выше показано, метод коэффициентов Фурье и который обладает спектральной плотностью энергии, равной $\mathcal{E}_x(\omega) = A^2/2\pi\omega^2$, нетрудно найти, что для него, согласно (1.5.10), структурная функция первого рода равна

$$\delta_x(\theta, \tau) = \frac{A^2}{2} [|\tau| - |\theta|], \quad |\tau| \geq |\theta|. \quad (1.5.11)$$

Разумеется к этому же самому выражению нас приводит и (1.5.8).

Наиболее интересным является получение формулы, «обратной» формуле (1.5.10), т. е. формулы, дающей возможность определения спектральной плотности энергии сигнала по его структурной функции. Это нетрудно сделать, если заметить, что для фиксированного τ , на основании первого свойства S_1 , функция $\delta_x(\theta, \tau)$ как функция от θ есть просто-напросто некоторая функция корреляции. Соответствующая ей спектральная плотность, как это следует из (1.5.10), равна $[1 - \cos \omega \tau] \mathcal{E}_x(\tau)$. Следовательно, взяв фурье-сопряженную от (1.5.10) по θ , получим для фиксированного τ

$$[1 - \cos \omega \tau] \mathcal{E}_x(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_x(\theta, \tau) \cos \omega \theta d\theta.$$

Таким образом,

$$\mathcal{E}_x(\omega) = \frac{1/2\pi}{1 - \cos \omega\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_x(\theta, \tau) \cos \omega\theta d\theta, \quad \omega \neq 0. \quad (1.5.12)$$

Стоящая в знаменателе разность $(1 - \cos \omega\tau)$ не должна вызывать недоумений. Поскольку не каждая функция может служить структурной функцией и поскольку структурная функция имеет определенные свойства по аргументу τ , то при нахождении фурье-сопряженной от какой-либо структурной функции должна обязательно получиться зависимость от ω и τ , имеющая вид $(1 - \cos \omega\tau)\mathcal{E}_x(\omega)$, где $\mathcal{E}_x(\omega)$ — некоторая спектральная плотность.

Отметим, что (1.5.12) позволяет находить $\mathcal{E}_x(\omega)$ для процессов с неинтегрируемым спектром энергии, пользуясь обычной сходимостью несобственного интеграла по Коши — Риману. Это, как нетрудно видеть, существенно связано с тем, что по параметру θ структурная функция первого рода $\delta_x(\theta, \tau)$ обладает свойствами функции корреляции. Если использовать суммирование несобственного интеграла, то можно представить $\mathcal{E}_x(\omega)$ через $\delta_x(\theta, \tau)$ в другом, иногда существенно более удобном виде.

Если (1.5.9) помножить на $\cos \omega\tau$ и проинтегрировать по τ , то можно получить, воспользовавшись формулой (III. 14):

$$\mathcal{E}_x(\omega) = -\frac{1/2\pi}{\cos \omega\theta} \oint_{-\infty}^{+\infty} \delta_x(\theta, \tau) \cos \omega\tau d\tau, \quad \omega \neq 0, \quad (1.5.13)$$

или, полагая $\theta = 0$,

$$\mathcal{E}_x(\omega) = -\frac{1}{2\pi} \oint_{-\infty}^{+\infty} \delta_x(0, \tau) \cos \omega\tau d\tau, \quad \omega \neq 0. \quad (1.5.14)$$

Последняя формула определяет спектральную плотность энергии как «чистую» фурье-сопряженную от структурной функции.

Все три формулы (1.5.12) — (1.5.14) дают, разумеется, один и тот же результат и позволяют тем самым по известной структурной функции первого рода $\delta_x(\theta, \tau)$ отыскивать спектральную плотность энергии $\mathcal{E}_x(\omega)$ для почти всех ω .

Следует, наконец, также отметить, что и для тех сигналов $x(t)$, для которых существует функция корреляции первого рода $\Psi_x(\tau)$, полученные формулы приводят к правильному выражению для $\mathcal{E}_x(\omega)$. При этом формула (1.5.12) просто переходит в формулу (1.3.8).

5. Рассмотрим теперь вопрос взаимосвязи $\mathcal{E}_x(\omega)$ и $\mathcal{S}_x(\omega)$ для одного и того же сигнала. Обратимся к одному примеру —

к сигналу $x(t) = A \, 1(t)$. Для этой детерминированной функции мы нашли, согласно примеру 1.4.3 и формуле (1.5.1):

$$S_x(\omega) = \frac{A^2}{2} \delta(\omega), \quad \mathcal{E}_x(\omega) = \frac{A^2}{2\pi\omega^2}.$$

Спектральная плотность мощности всюду равна нулю, кроме точки $\omega=0$. Спектральная плотность энергии всюду принимает определенное конечное значение, кроме точки $\omega=0$, где она бесконечна. В чем причина различной формы спектров энергии и мощности для одной и той же функции времени?

Рассмотрим два физических спектральных прибора, один из которых измеряет энергию сигнала, а другой — среднюю мощность сигнала в полосе частот $(\omega, \omega+d\omega)$. При этом измеритель средней мощности представляет собой фактически измеритель энергии, за которым следует блок усреднения, делящий накопленную энергию на время, прошедшее с начала эксперимента. Подадим на вход этих приборов сигнал $x(t) = A \, 1(t)$. После момента $t=0$ в приборах протекают одинаковые переходные процессы и по мере их протекания накапливается их энергия. Когда переходные процессы закончились, энергия уже больше не возрастает и прибор, измеряющий энергию, показывает постоянную величину, равную $A^2 d\omega/\omega^2$. Прибор, измеряющий среднюю мощность (в той же полосе частот), показывает значение $A^2 d\omega/\omega^2 t$, которое при возрастании t стремится к нулю. Тем самым первый прибор дает значение спектральной плотности энергии, равное A^2/ω^2 , а второй — значение спектральной плотности средней мощности (величину, стремящуюся к нулю*) для всех частотных интервалов, не включающих в себя точку $\omega=0$).

Изложенный анализ позволяет утверждать, что независимо от вида функции $x(t)$ имеет место следующее.

Если на какой-либо частоте ω спектральная плотность энергии имеет конечное значение $\mathcal{E}_x(\omega)$, то на этой же частоте спектральная плотность мощности обращается в нуль. С другой стороны, физически очевидно, что если $S_x(\omega)$ на некоторой частоте имеет конечное значение, то на этой же частоте спектральная плотность энергии должна обращаться в бесконечность (ибо и $S_x(\omega)$ и $\mathcal{E}_x(\omega)$ определяются при рассмотрении функции $x(t)$ на бесконечном интервале времени).

*) Заметим, что при вычислении \mathcal{E}_x и S_x для $x(t) = A \, 1(t)$ мы брали интервал времени $(0, \infty)$. Поэтому при сравнении вычисленных \mathcal{E}_x и S_x с показаниями приборов последние должны проработать достаточно большое время (в принципе равное бесконечности), чтобы на входе действительно реализовалась функция $A \, 1(t)$.

Таким образом, взаимосвязь $\mathcal{E}_x(\omega)$ с $S_x(\omega)$ для какой-либо частоты ω следующая:

если $S_x(\omega) = 0$, то может существовать $\mathcal{E}_x(\omega)$;

если $S_x(\omega) > 0$, то $\mathcal{E}_x(\omega)$ расходится;

если $0 < \mathcal{E}_x(\omega) < \infty$, то $S_x(\omega) = 0$;

если $\mathcal{E}_x(\omega)$ расходится, то может существовать $S_x(\omega)$.

§ 1.6. Спектрально-корреляционный анализ сигналов третьей группы

1. Первая и вторая группы сигналов, рассмотренные выше, не охватывают все возможные сигналы. Легко найти такие сигналы, которые не принадлежат ни к первой, ни ко второй группе (например, $x(t) = at$). В то же время может возникнуть задача спектрально-корреляционного анализа этих сигналов. В настоящем параграфе мы ограничимся лишь небольшой частью таких сигналов — сигналами, принадлежащими к третьей группе, которые, как будет показано в последующих главах, имеют определенное практическое значение.

Рассмотрим такие сигналы $x(t)$, мощность которых S_x является бесконечной величиной, так называемые сигналы с неинтегрируемым спектром мощности. Бесконечность S_x еще не означает бесконечного значения спектральной плотности мощности для всех значений ω , а означает лишь расходимость интеграла (1.4.5). Тем самым для сигналов с неинтегрируемым спектром мощности можно поставить задачу отыскания $S_x(\omega)$ для тех ω и в тех случаях, когда эта спектральная плотность существует. Эта задача аналогична задаче отыскания $\mathcal{E}_x(\omega)$ для сигналов с неинтегрируемым спектром энергии, рассмотренной в предыдущем параграфе, поэтому методы ее решения будут также аналогичны методам, использованным в § 1.5.

Образует функцию

$$\Delta_x(\theta, \tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} d_x[t, t + \theta; \tau] dt, \quad (1.6.1)$$

которую назовем *структурной функцией второго рода*. Нетрудно показать, что $\Delta_x(\theta, \tau)$ обладает всеми свойствами S_1 .

Будем говорить, что сигнал $x(t)$ с неинтегрируемым спектром мощности принадлежит к третьей группе, если для всякого конечного τ существует или структурная функция второго рода $\Delta_x(\theta, \tau)$, или функция корреляции второго рода $\Phi_x(\tau)$ *).

*) Поскольку для $\tau = 0$ $\Delta_x(\theta, \tau)$ существует всегда ($\equiv 0$), то функция корреляции для сигналов третьей группы при $\tau = 0$ может и не существовать.

Если для процесса $x(t)$ существует функция корреляции $\Phi_x(\tau)$, то на основании (1.5.3) нетрудно убедиться в том, что

$$\Delta_x(\theta, \tau) = \Phi_x(\theta) - \frac{1}{2} \Phi_x(\theta + \tau) - \frac{1}{2} \Phi_x(\theta - \tau). \quad (1.6.2)$$

Для процессов с нулевым средним значением ($\Phi_x(\infty) = 0$) нетрудно обнаружить простую связь функции корреляции второго рода со структурной функцией второго рода

$$\Phi_x(\theta) = \lim_{|\tau| \rightarrow \infty} \Delta_x(\theta, \tau). \quad (1.6.3)$$

Эта формула дает возможность, зная структурную функцию для какого-либо процесса ($\langle x \rangle = 0$), определить его функцию корреляции $\Phi_x(\tau)$, если последняя существует.

Для случайного процесса со стационарными приращениями

$$\Delta_x(\theta, \tau) = d_x[\theta; \tau]. \quad (1.6.4)$$

2. Используя (1.6.2), нетрудно записать следующее спектральное разложение структурной функции:

$$\Delta_x(\theta, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos \omega \theta [1 - \cos \omega \tau] S_x(\omega) d\omega. \quad (1.6.5)$$

К этой формуле могут быть отнесены замечания, полностью аналогичные тем, которые были сделаны для формулы (1.5.10).

Полагая $\theta = 0$, имеем

$$\Delta_x(0, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} [1 - \cos \omega \tau] S_x(\omega) d\omega. \quad (1.6.6)$$

Если $x(t)$ есть процесс со стационарными приращениями, то, согласно (1.6.4), (1.5.5),

$$\Delta_x(0, \tau) = d_x[0; \tau] = \frac{1}{2} D_x[\tau] = \int_{-\infty}^{+\infty} [1 - \cos \omega \tau] S_x(\omega) d\omega.$$

Эта формула представляет известное спектральное разложение структурной функции $D_x[\tau]$ (см., например, [8]).

Таким образом, (1.6.1) и (1.6.5) дают структурную функцию и ее спектральное разложение для любых процессов третьей группы (включая сюда как частный случай процессы третьей группы со стационарными приращениями).

Обращая (1.6.5) по аргументу θ , по которому $\Delta_x(\theta, \tau)$ обладает свойствами корреляционной функции, найдем

$$S_x(\omega) = \frac{1/2\pi}{1 - \cos \omega \tau} \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta_x(\theta, \tau) \cos \omega \theta d\theta, \quad \omega \neq 0. \quad (1.6.7)$$

Умножая (1.6.2) на $\cos \omega \tau$ и интегрируя по τ , будем иметь

$$S_x(\omega) = -\frac{1}{2\pi \cos \omega \theta} \oint_{-\infty}^{+\infty} \Delta_x(\theta, \tau) \cos \omega \tau d\tau, \quad \omega \neq 0, \quad (1.6.8)$$

или для $\theta = 0$:

$$S_x(\omega) = -\frac{1}{2\pi} \oint_{-\infty}^{+\infty} \Delta_x(0, \tau) \cos \omega \tau d\tau, \quad \omega \neq 0. \quad (1.6.9)$$

Все эти три формулы не включают в рассмотрение точки $\omega=0$, ибо в этой точке $S_x(\omega)$ может иметь особенность. Вообще говоря, точка $\omega=0$ может быть включена в рассмотрение. Например, формулу (1.6.9) можно записать следующим образом:

$$S_x(\omega) = \Delta_x(0, \infty) \delta(\omega) - \frac{1}{2\pi} \oint_{-\infty}^{+\infty} \Delta_x(0, \tau) \cos \omega \tau d\tau. \quad (1.6.10)$$

Здесь второе слагаемое по-прежнему справедливо лишь для $\omega \neq 0$, а первое слагаемое имеет смысл, если существует $\Phi_x(0) = \Delta_x(0, \infty)$.

Для сигналов со стационарными приращениями, для которых задана структурная функция $D_x[\tau]$, спектральная плотность мощности может быть найдена, как следует из (1.6.9), следующим образом *):

$$S_x(\omega) = -\frac{1}{4\pi} \oint_{-\infty}^{+\infty} D_x[\tau] \cos \omega \tau d\tau. \quad (1.6.11)$$

Формулы (1.6.7) — (1.6.11) решают, таким образом, вопрос о нахождении спектральной плотности мощности $S_x(\omega)$ для сигналов с неинтегрируемым спектром мощности, принадлежащих к третьей группе.

Поскольку к третьей группе, согласно определению, могут принадлежать сигналы (с неинтегрируемым спектром), обладающие функцией корреляции, существующей по крайней мере для всех $\tau \neq 0$, то спектральная плотность мощности для них может находиться и по формуле (1.4.3).

3. Какими общими характеристиками должны обладать структурные функции и функции корреляции для сигналов третьей группы? Рассмотрим это подробнее. Пусть $x(t) = 0$ для всех $t < 0$.

*) Отметим, что в работе [9] имеется представление $S_x(\omega)$ через производные $D_x[\tau]$ с помощью обычного несобственного интеграла Коши — Римана.

Для расходимости

$$S_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \langle x^2(t) \rangle dt$$

необходимо, чтобы $\langle x^2(t) \rangle$ или была возрастающей функцией крупномасштабного времени, или чтобы $\langle x^2(t) \rangle = \infty$ независимо от значения t . В первом случае $\langle x^2(t) \rangle$ зависит от времени и, следовательно, функция $x(t)$ нестационарна. Во втором случае — стационарна.

Среди нестационарных $x(t)$ к третьей группе относятся только те, у которых при $\tau \neq 0$ конечна или $\Delta_x(\theta, \tau)$, или $\Phi_x(\tau)$. Конечность структурной функции второго рода может быть только в том случае, если $d_x[t, t+\theta; \tau]$ является не возрастающей (по модулю) функцией времени. Следовательно, $d_x[t, t+\theta; \tau]$ должна или убывать со временем t , или не зависеть от t . К последнему случаю, как мы уже видели, относятся нестационарные процессы со стационарными приращениями.

Аналогично конечность функции корреляции (см. (1.4.5)) для нестационарного процесса может быть только в том случае, если $K_x[t, t+\tau]$ для $\tau \neq 0$ не возрастает (по модулю) с ростом времени t . Поскольку, с другой стороны, по условию $\langle x^2(t) \rangle = K_x[t, t]$ должно возрастать с ростом t , то, по-видимому, в третьей группе нет нестационарных процессов, обладающих конечной функцией корреляции.

Если процесс $x(t)$, принадлежащий к третьей группе, стационарен, то он тем более обладает стационарными приращениями и, следовательно, $\Delta_x(\theta, \tau) = d_x[\theta; \tau] = K_x[\theta] - \frac{1}{2} K_x[\theta - \tau] - \frac{1}{2} K_x[\theta + \tau]$. Поскольку, с другой стороны, $K_x(0) = \langle x^2(t) \rangle = \infty$, то, следовательно, у такого процесса при $\tau = 0$ существует $\Delta_x(\theta, \tau) = 0$, а при $\tau \neq 0$ конечными являются $\Delta_x(\theta, \tau)$ (при $\theta \neq 0$, $\theta \neq \pm \tau$) и $K_x[\tau]$. Структурной функции $D_x[\tau]$ для стационарного процесса, принадлежащего к третьей группе, не существует.

4. Рассмотрим теперь несколько примеров сигналов третьей группы.

Пример 1.6.1. Рассмотрим $x(t)$ — дельта-коррелированный случайный стационарный процесс. У этого процесса, по определению, функция корреляции равна $\Phi_x(\tau) = D\delta(\tau)$. Она существует для всех τ , кроме $\tau = 0$. Спектральная плотность такого процесса

$$S_x(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} D\delta(\tau) \cos \omega\tau d\tau = \frac{D}{2\pi}$$

постоянна на всех частотах; по этой причине $x(t)$ называют белым шумом.

Нетрудно видеть, что этот случайный процесс имеет бесконечную среднюю мощность и принадлежит к третьей группе. Его структурная функция второго рода равна

$$\Delta_x(\theta, \tau) = D \delta(\theta) - \frac{1}{2} D \delta(\theta - \tau) - \frac{1}{2} D \delta(\theta + \tau)$$

и существует для почти всех θ и τ (исключая $\theta=0$ и $\tau=\pm\theta$). Структурная функция $\Delta_x[\tau]$ для него не существует.

Пример 1.6.2. Пусть имеем $x(t)$ — случайный стационарный дельта-коррелированный процесс с функцией корреляции $\Phi_x(\tau) = D\delta(\tau)$. Рассмотрим

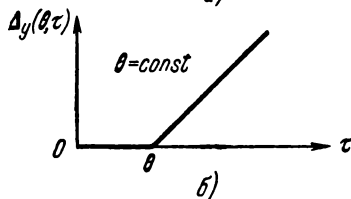
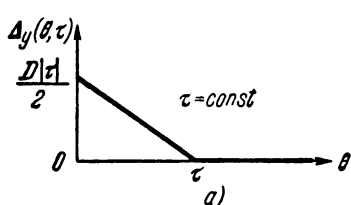


Рис. 1.4.

$$y(t) = \int_0^t x(\xi) d\xi.$$

Нетрудно видеть, что

$$\langle y^2(t) \rangle = \int_0^t \int_0^t D \delta(\xi - \eta) d\xi d\eta = D |t|.$$

Тем самым $y(t)$ есть нестационарный случайный процесс, и его средняя мощность, равная

$$S_y = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} D |t| dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{DT}{2},$$

является расходящейся величиной.

Нетрудно найти статистическую структурную функцию этого процесса:

$$d_y[t_1, t_2; \tau] = \frac{D}{2} \begin{cases} |\tau| - |t_2 - t_1|, & |\tau| \geq |t_2 - t_1| \\ 0, & |\tau| \leq |t_2 - t_1| \end{cases} = d_y[t_2 - t_1; \tau].$$

Следовательно, структурная функция второго рода равна

$$\Delta_y(\theta, \tau) = \frac{D}{2} \begin{cases} |\tau| - |\theta|, & |\tau| \geq |\theta| \\ 0, & |\tau| \leq |\theta| \end{cases} \quad (1.6.12)$$

и существует для всех конечных τ .

На рис. 1.4 изображены графики полученной структурной функции $\Delta_y(\theta, \tau)$ для $\tau = \text{const}$ (рис. 1.4, а) и $\theta = \text{const}$ (рис. 1.4, б). Из этих графиков видно, как существенно различно зависит структурная функция $\Delta_y(\theta, \tau)$ от первого и второго аргументов. График на рис. 1.4, а имеет вид обычной функции корреляции. График на рис. 1.4, б имеет вид, похожий на график структурной функции $D_y[\tau]$, которая, как нетрудно видеть, равна

$$D_y[\tau] = 2\Delta_y(0, \tau) = D|\tau|.$$

Мы получили очень интересный и важный для дальнейшего результат; интеграл от случайной дельта-коррелированной функции есть случайная функция, принадлежащая к третьей

группе и к тому же являющаяся процессом со стационарными приращениями. Можно также показать, что приращения Δy за неперекрывающиеся промежутки времени не коррелированы. Найдем спектральную плотность мощности процесса $y(t)$. Все три формулы (1.6.7)–(1.6.9) приводят, как и должно быть, к одному результату. Например,

$$S_y(\omega) = -\frac{D}{4\pi} \oint_{-\infty}^{+\infty} |\tau| \cos \omega \tau d\tau = \frac{D}{2\pi\omega^2}, \quad \omega \neq 0. \quad (1.6.13)$$

Пример 1.6.3. Пусть $y(t)$ по-прежнему равен интегралу с переменным верхним пределом от функции $x(t)$, которая теперь представляет произвольный случайный стационарный процесс с заданной функцией корреляции $\Phi_x(\tau)$ и соответствующей спектральной плотностью мощности $S_x(\omega)$ такой, что $S_x(0) \neq 0$. Тогда средний квадрат $y(t)$ равен

$$\langle y^2(t) \rangle = \int_0^t \int_0^t \Phi_x(\xi - \eta) d\xi d\eta = t \int_{-t}^{+t} \left(1 - \frac{|\xi|}{t}\right) \Phi_x(\xi) d\xi.$$

Поскольку

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{-t}^{+t} \left(1 - \frac{|\xi|}{t}\right) \Phi_x(\xi) d\xi = \oint_{-\infty}^{+\infty} \Phi_x(\xi) d\xi = 2\pi S_x(0).$$

то $\langle y^2(t) \rangle$ является функцией, возрастающей при $t \rightarrow \infty$ как $2\pi S_x(0)t$. Вследствие этого мощность процесса $x(t)$ расходится.

Нетрудно найти

$$D_y[t + \tau, t] = \int_t^{t+\tau} \int_t^{t+\tau} \Phi_x(\xi - \eta) d\xi d\eta = \tau \int_{-\tau}^{+\tau} \left(1 - \frac{|\xi|}{\tau}\right) \Phi_x(\xi) d\xi = D_y[\tau].$$

Следовательно, $y(t)$, так же как и в предыдущем примере, является нестационарным процессом со стационарными приращениями. Структурная функция $\Delta_y(0, \tau)$ равна

$$\Delta_y(0, \tau) = \frac{1}{2} D_y[\tau] = \frac{1}{2} \tau \int_{-\tau}^{+\tau} \left(1 - \frac{|\xi|}{\tau}\right) \Phi_x(\xi) d\xi.$$

Для всякого конечного τ она существует. Следовательно, случайный процесс $y(t)$ также относится к третьей группе. Можно было бы отыскать и $\Delta_y(\theta, \tau)$ для $\theta \neq 0$. При этом вывод о принадлежности $y(t)$ к третьей группе, разумеется, не изменится, поскольку $|\Delta_y(\theta, \tau)| \leq \Delta_y(0, \tau)$.

Таким образом, интеграл с переменным верхним пределом от любого случайного стационарного процесса $x(t)$ с $S_x(0) \neq 0$ является случайной функцией со стационарными приращениями, принадлежащей к третьей группе.

Нетрудно найти спектральную плотность $S_y(\omega)$. Выражая в полученном соотношении для $\Delta_y(0, \tau)$ функцию корреляции $\Phi_x(\tau)$ через спектральную плотность $S_x(\omega)$, можно получить

$$\Delta_y(0, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(\omega) \frac{1 - \cos \omega \tau}{\omega^2} d\omega.$$

Сравнивая этот результат с (1.6.5), нетрудно видеть, что

$$S_y(\omega) = \frac{S_x(\omega)}{\omega^2}. \quad (1.6.14)$$

Эта формула получена достаточно строгим путем для любого стационарного процесса $x(t)$, обладающего функцией корреляции $\Phi_x(\tau)$.

5. Рассмотрим важные для дальнейшего три случайных процесса, которые представляют собой определенное обобщение процесса, рассмотренного в примере 1.6.2.

Пусть имеется процесс $y(t)$ со структурной функцией

$$\Delta_y(0, \tau) = B |\tau|^p \quad (0 < p < 2).$$

Спектральную плотность этого процесса находим, согласно (1.6.9) (см. (II.25)):

$$S_y(\omega) = -\frac{B}{2\pi} \oint_{-\infty}^{+\infty} |\tau|^p \cos \omega \tau d\tau = \frac{B}{\pi} \Gamma(1+p) \sin \frac{\pi p}{2} \frac{1}{|\omega|^{1+p}}.$$

Нетрудно видеть, что процесс с такой спектральной плотностью является нестационарным и принадлежит к третьей группе, так как $\Delta_y(0, \tau)$ конечно для любого конечного τ и возрастает с ростом τ , а полная средняя мощность, равная

$\int_{-\infty}^{+\infty} S_y(\omega) d\omega$, является расходящейся величиной.

С процессами, обладающими спектрами типа $1/\omega^\alpha$ ($\alpha > 0$), мы еще неоднократно встретимся, к ним относятся фликкерные шумы, поэтому спектр $1/|\omega|^\alpha$ ($\alpha > 0$) будем называть спектром фликкерного типа или просто фликкерным спектром. Полученную спектральную плотность фликкерного типа для последующих целей удобнее записать в другой форме:

$$S_y(\omega) = \frac{A}{2\pi |\omega|^\gamma} \quad (1 < \gamma < 3). \quad (1.6.15)$$

Здесь постоянную A будем считать известной — эксперимент всегда позволяет ее найти. Тогда, в согласии с выше получен-

ными формулами, структурная функция будет записываться как

$$\Delta_y(0, \tau) = \frac{A}{2\Gamma(\gamma) \sin \frac{\pi}{2} (\gamma - 1)} |\tau|^{\gamma-1}. \quad (1.6.16)$$

При оперировании с фликкерными процессами, помимо спектральной плотности и структурной функции, необходимо знать и некоторые другие их характеристики, например средний квадрат. Для рассматриваемого нестационарного процесса $\langle y^2(t) \rangle$ зависит от времени. Найдем эту зависимость. Предположим, что при $t=0$ $x(t)=0$, тогда, согласно (1.6.16), (1.6.4) и (1.5.2), заменяя τ на t , имеем

$$\langle y^2(t) \rangle = 2d_y[0, 0; t] = \frac{A}{\Gamma(\gamma) \sin \frac{\pi}{2} (\gamma - 1)} |t|^{\gamma-1}. \quad (1.6.16a)$$

Таков характер нестационарности процесса, обладающего спектром (1.6.15). При $\gamma=2$, $\langle y^2(t) \rangle = A|t|$ имеем так называемый диффузионный закон нарастания среднего квадрата. Если γ близко к единице, то изменение $\langle y^2(t) \rangle$ со временем становится чрезвычайно медленным и процесс $y(t)$ можно считать квазистационарным.

Пусть теперь фликкерный процесс $y(t)$ обладает спектральной плотностью

$$S_y(\omega) = \frac{A}{2\pi |\omega|^\gamma} \quad (0 < \gamma < 1). \quad (1.6.17)$$

Нетрудно видеть, что у этого процесса существует функция корреляции, равная (см. (II. 19))

$$\Phi_y(\tau) = \frac{A}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|\omega|^\gamma} \cos \omega \tau d\omega = \frac{A}{\pi} \Gamma(1-\gamma) \sin \frac{\pi\gamma}{2} \frac{1}{|\tau|^{1-\gamma}} \quad (1.6.18)$$

для $\tau \neq 0$.

Поскольку средняя мощность S_y этого процесса расходится, а функция корреляции существует для почти всех τ , этот процесс принадлежит к третьей группе и может быть стационарным.

Рассмотренный процесс со спектральной плотностью (1.6.17) напоминает белый шум и тем ближе к нему приближается, чем меньше γ . Можно показать, что в пределе, при $\gamma \rightarrow 0$, $\Phi_y(\tau) \rightarrow A \delta(\tau)$ и, таким образом, $y(t)$ переходит в белый шум со спектральной плотностью, равной $A/2\pi$.

Мы рассмотрели случаи $\gamma < 1$ и $\gamma > 1$. Обратимся к фликкерному процессу со спектральной плотностью

$$S_y(\omega) = \frac{A}{2\pi |\omega|},$$

когда $\gamma=1$. Можно показать, что для такого процесса не существует при $\tau \neq 0$ ни функции корреляции, ни структурной функции второго рода. При этом средняя мощность процесса является расходящейся. Следовательно, этот процесс не принадлежит ни к одной из рассмотренных групп. Тем не менее шум с таким спектром в принципе существует и требует определенного подхода к себе. Можно было бы попытаться построить какую-либо новую функцию, аналогичную корреляционной или структурной, которая позволила бы находить его корреляционные характеристики, однако эффективный успех на этом пути неясен.

Гораздо проще поступить следующим образом. Реальный фликкерный шум (см. подробнее ниже § 3.3) имеет, по-видимому, спектральную плотность, равную $1/|\omega|$ лишь для частот от $\omega=0$ до $|\omega| \ll \omega_b$, где ω_b — некоторая сравнительно высокая частота, а для $|\omega| \gg \omega_b$ спектральная плотность принимает зависимость $1/|\omega|^2$. Поэтому шум со спектром $1/|\omega|$ можно заменить шумом со спектральной плотностью

$$S_\nu(\omega) = \frac{A\omega_b}{2\pi|\omega|(\omega_b + |\omega|)}. \quad (1.6.19)$$

Соответствующим выбором ω_b всегда можно добиться того, чтобы в требуемой конечной полосе частот, примаыкающей к нулю, спектр фликкерного шума имел вид $\sim 1/|\omega|$.

Для случайного процесса со спектральной плотностью (1.6.19) может быть найдена структурная функция. В самом деле, нетрудно найти для $\tau > 0$

$$\begin{aligned} \Delta_\nu(0, \tau) &= \frac{2A}{2\pi} \omega_b \int_0^\infty \frac{1 - \cos \omega\tau}{\omega(\omega_b + \omega)} d\omega = \frac{2A}{2\pi} \omega_b \tau \int_0^\infty \frac{1 - \cos x}{x(\omega_b\tau + x)} dx = \\ &= \frac{A}{\pi} \{C + \ln \omega_b\tau - \sin \omega_b\tau \operatorname{si}(\omega_b\tau) - \cos \omega_b\tau \operatorname{ci}(\omega_b\tau)\}, \end{aligned} \quad (1.6.20)$$

где $C=0,577$ — постоянная Эйлера, $\operatorname{si}(x)$, $\operatorname{ci}(x)$ — интегральные синус и косинус.

Как следует из полученного выражения, структурная функция существует для всех конечных τ . Следовательно, шум с неинтегрируемым спектром (1.6.19) является нестационарным и принадлежит к третьей группе.

При больших τ , таких, что $\omega_b\tau \gg 1$,

$$\Delta_\nu(0, \tau) \approx \frac{A}{\pi} \{C + \ln \omega_b\tau\}.$$

При $\omega_b \rightarrow \infty$ структурная функция $\Delta_\nu(0, \tau)$ должна стремиться к структурной функции процесса со спектром $1/\omega$. Легко видеть, что при $\omega_b \rightarrow \infty$ мы получаем расходимость структурной функции второго рода.

Предполагая, как и ранее, что $x(0) = 0$, получим следующее значение среднего квадрата для $t > 0$:

$$\langle y^2(t) \rangle = \frac{2A}{\pi} [C + \ln \omega_b t - \sin \omega_b t \operatorname{si}(\omega_b t) - \cos \omega_b t \operatorname{ci}(\omega_b t)]; \quad (1.6.21)$$

при $\omega_b t \gg 1$

$$\langle y^2(t) \rangle = \frac{2A}{\pi} \ln \omega_b t. \quad (1.6.21a)$$

Эта формула показывает, что зависимость $\langle y^2(t) \rangle$ от времени t является чрезвычайно слабой и большому изменению t соответствует малое возрастание $\langle y^2(t) \rangle$.

Нетрудно найти, что для малых τ и t

$$\Delta_y(0, \tau) = \frac{A}{2} \omega_b |\tau|, \quad \langle y^2(t) \rangle = A \omega_b |t|. \quad (1.6.22)$$

Формулы (1.6.20) и (1.6.21) являются точными.

Мы сохраним основные свойства $\Delta_y(0, \tau)$ и $\langle y^2(t) \rangle$, если вместо точных формул возьмем следующие приближенные ($\tau > 0$, $t > 0$):

$$\Delta_y(0, \tau) = \frac{A}{\pi} \ln(1 + \omega_b \tau), \quad \langle y^2(t) \rangle = \frac{2A}{\pi} \ln(1 + \omega_b t). \quad (1.6.23)$$

При $\omega_b \tau$, $\omega_b t \gg 1$ они совпадают с точными; при $\omega_b \tau$, $\omega_b t \ll 1$ формулы (1.6.23) дают

$$\Delta_y(0, \tau) = \frac{A}{\pi} \omega_b |\tau|, \quad \langle y^2(t) \rangle = \frac{2A}{\pi} \omega_b |t|,$$

что, вообще говоря, отличается от значений (1.6.22). Однако это отличие несущественно и полностью искупается простотой (1.6.23) по сравнению с (1.6.20) и (1.6.21). Для фликкерного процесса со спектром (1.6.19) примем структурную функцию и средний квадрат, определяемые формулами (1.6.23).

§ 1.7. Два случайных процесса. Совместные корреляции и спектральные плотности

1. Пусть наряду со случайной функцией $x(t)$ существует случайная функция $y(t)$. Задаваясь фиксированными моментами t_1, t_2, \dots, t_N , совокупность этих двух случайных функций мы можем описать $2N$ -мерной плотностью вероятности $W_{2Nx_y}(x_1, y_1, t_1; x_2, y_2, t_2; \dots; x_N, y_N, t_N)$. Оставаясь, однако, в рамках спектрально-корреляционной теории, ограничимся описанием изучаемой совокупности лишь с помощью двумерной плотности вероятности $W_{2xy}(x_1, t_1; y_2, t_2)$, из которой можно получить известным способом одномерные плотности вероятности для $x(t)$ и $y(t)$.

Полагая, как и ранее, $\langle x(t) \rangle = \langle y(t) \rangle = 0$, рассмотрим так называемую совместную корреляционную функцию

$$K_{xy}[t_1, t_2] = \langle x(t_1)y(t_2) \rangle = \int \int x_1 y_2 W_{2xy}(x_1, t_1; y_2, t_2) dx_1 dy_2. \quad (1.7.1)$$

Если эта функция не равна тождественно нулю, то, значит, существует определенная коррелированность между случайными процессами $x(t)$ и $y(t)$. Если $K_{xy}[t_1, t_2] \equiv 0$ для всех t_1 и t_2 , будем говорить, что процессы $x(t)$ и $y(t)$ не коррелированы. Из определения (1.7.1) следует, что

$$K_{xy}[t_1, t_2] = K_{yx}[t_2, t_1]. \quad (1.7.2)$$

Здесь второй аргумент всегда относится ко второму индексу. Если $x(t)$ и $y(t)$ статистически независимы, то $W_{2xy}(x_1, t_1; y_2, t_2) = W_{1x}(x_1, t_1)W_{1y}(y_2, t_2)$, и тогда из (1.7.1) следует, что

$$K_{xy}[t_1, t_2] \equiv 0.$$

Заметим, что совместная корреляционная функция $K_{xy}[t_1, t_2]$, определенная формулой (1.7.1), может рассматриваться и для детерминированных функций $x(t)$ и $y(t)$; в этом случае она просто равна произведению $x(t_1)y(t_2)$.

2. Рассмотрим теперь стационарные процессы $x(t)$ и $y(t)$. Будем считать эти процессы стационарно связанными (в узком смысле), если W_{2Nxy} не изменится при замене последовательности t_1, \dots, t_N на последовательность $t_1 + \tau, \dots, t_N + \tau$ для произвольного τ . В этом случае W_{2Nxy} зависит только от разностей $t_j - t_i$. Будем считать, что процессы стационарно связаны в широком смысле, если $K_{xy}[t_1, t_2]$ зависит только от $t_2 - t_1$ (на W_{2Nxy} никаких условий не налагается).

Нетрудно видеть, что для стационарной связанности справедливы те же выводы, что и для стационарности (в случае одного процесса). Так, стационарно связанные процессы в узком смысле, стационарно связаны и в широком смысле. Обратное справедливо только для нормально распределенной совокупности $x(t)$ и $y(t)$. В рамках спектрально-корреляционной теории нам достаточна стационарная связанность в широком смысле.

Итак, для стационарно связанных процессов $x(t)$ и $y(t)$

$$K_{xy}[t_1, t_2] = \langle x(t_1)y(t_2) \rangle = K_{xy}[t_2 - t_1].$$

Заметим, что при такой записи аргумент $K_{xy}[\tau]$ есть разность между аргументом второго индекса (y) и аргументом первого индекса (x). На основании (1.7.2) нетрудно видеть, что

$$K_{xy}[\tau] = K_{yx}[-\tau]. \quad (1.7.3)$$

Если корреляционная функция $K_x[\tau]$ является обязательно четной функцией, то взаимная корреляционная функция $K_{xy}[\tau]$ может быть любой: или четной, или нечетной, или ни той, ни другой. В самом деле, рассмотрим несколько примеров.

Пример 1.7.1. Пусть $x(t) = \xi(t)$ — случайная стационарная функция, а $y(t) = d\xi/dt$. Тогда

$$\begin{aligned} x(t) y(t + \tau) &= \xi(t) \left(\frac{d\xi}{dt} \right)_{t+\tau} = \xi(t) \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\xi(t + \tau + \Delta) - \xi(t + \tau)}{\Delta} = \\ &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\xi(t) \xi(t + \tau + \Delta) - \xi(t) \xi(t + \tau)}{\Delta}. \end{aligned}$$

Следовательно, усредняя, получим

$$K_{xy}[\tau] = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{K_{\xi}[\tau + \Delta] - K_{\xi}[\tau]}{\Delta} = \frac{dK_{\xi}[\tau]}{d\tau} = K_{\xi\xi}[\tau].$$

Поскольку $K_{\xi}[\tau]$ — четная функция, то $K_{xy}[\tau]$ — как ее производная — нечетная.

Пример 1.7.2. Пусть теперь, как и в предыдущем примере, $x(t) = \xi(t)$. Возьмем $y(t) = a\xi + b \, d\xi/dt$. Нетрудно видеть, что

$$K_{xy}[\tau] = aK_{\xi}[\tau] + b \frac{dK_{\xi}[\tau]}{d\tau}.$$

Эта корреляционная функция не является ни четной, ни нечетной.

Пример 1.7.3. Пусть $x(t) = \xi(t)$, а $y(t) = c\xi(t)$. Легко видеть, что $K_{xy}[\tau] = cK_{\xi}[\tau]$ — четная функция.

Для совместной корреляционной функции $K_{xy}[\tau]$ нетрудно доказать справедливость следующего неравенства:

$$K_{xy}[\tau] \leq \sqrt{K_x[0] K_y[0]}. \quad (1.7.4)$$

Таким образом, совместная корреляционная функция $K_{xy}[\tau]$ обладает следующими свойствами (назовем их свойствами K_2):

- 1) $K_{xy}[-\tau] = K_{yx}[\tau]$,
- 2) $|K_{xy}[\tau]| \leq \sqrt{K_{xx}[0] K_{yy}[0]}$,
- 3) $K_{xx}[\tau]$ обладает свойствами K_1 .

Как и любую функцию, совместную корреляционную функцию стационарно связанных процессов можно разложить известным способом на четную и нечетную составляющие:

$$K_{xy}[\tau] = K_{xy}^0[\tau] + K_{xy}^1[\tau],$$

где нулик и единица сверху означают соответственно четную и нечетную функции аргумента, определяемые следующим образом:

$$K_{xy}^0[\tau] = \frac{1}{2} \{K_{xy}[\tau] + K_{xy}[-\tau]\},$$

$$K_{xy}^1[\tau] = \frac{1}{2} \{K_{xy}[\tau] - K_{xy}[-\tau]\}, \quad K_{xy}^1[0] = 0.$$

Совместные корреляционные функции различных производных даны формулами (III.2).

3. Перейдем теперь к произвольным сигналам $x(t)$ и $y(t)$, принадлежащим к первой группе.

Определим *совместную функцию корреляции первого рода* $\Psi_{xy}(\tau)$ для сигналов первой группы $x(t)$ и $y(t)$ следующим образом:

$$\Psi_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} K_{xy}[t, t+\tau] dt. \quad (1.7.5)$$

Для детерминированных функций, как всегда, усреднение по ансамблю в $K_{xy}[t, t+\tau]$ можно отбросить. Можно показать, что $\Psi_{xy}(\tau)$ обладает всеми свойствами K_2 .

Введение совместной функции корреляции первого рода $\Psi_{xy}(\tau)$ приводит к необходимости введения совместной спектральной плотности энергии. В самом деле, рассмотрим следующий простой пример. Пусть $z=x+y$, где x и y — сигналы первой группы в общем случае коррелированные. Пусть нам заданы $\Psi_x(\tau)$, $\Psi_y(\tau)$ и $\Psi_{xy}(\tau)$. Требуется найти спектральную плотность энергии $\mathcal{E}_z(\omega)$ случайного процесса z .

Найдем сначала функцию корреляции $\Psi_z(\tau)$. Легко видеть, что

$$\Psi_z = \Psi_x + \Psi_{xy} + \Psi_{yx} + \Psi_y = \Psi_x + \Psi_y + 2\Psi_{xy}^0.$$

Эта формула показывает, что функция корреляции суммы двух коррелированных процессов существенно зависит от четной части совместной функции корреляции и не зависит от нечетной части. Для нахождения спектральной плотности энергии $\mathcal{E}_z(\omega)$, согласно (1.3.8), возьмем от $\Psi_z(\tau)$ косинус-фурье-сопряженную. Получим

$$\mathcal{E}_z(\omega) = \mathcal{E}_x(\omega) + \mathcal{E}_y(\omega) + 2 \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_{xy}^0(\tau) \cos \omega \tau d\tau.$$

Третье слагаемое есть некоторая спектральная плотность, зависящая от корреляции между x и y . Назовем четной совместной спектральной плотностью энергии $\mathcal{E}_{xy}^0(\omega)$ двух сигналов $x(t)$ и $y(t)$ выражение

$$\mathcal{E}_{xy}^0(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_{xy}^0(\tau) \cos \omega \tau d\tau. \quad (1.7.6)$$

Тогда искомая спектральная плотность энергии равна

$$\mathcal{E}_z(\omega) = \mathcal{E}_x(\omega) + \mathcal{E}_y(\omega) + 2\mathcal{E}_{xy}^0(\omega).$$

Возьмем другой пример. Нужно найти спектральную плотность энергии функции

$$z = x + \frac{dy}{dt},$$

где по-прежнему считаем заданными $\Psi_x(\tau)$, $\Psi_y(\tau)$, $\Psi_{xy}(\tau)$. Нетрудно получить следующее выражение для $\Psi_z(\tau)$:

$$\Psi_z(\tau) = \Psi_x(\tau) - \frac{d^2\Psi_y(\tau)}{d\tau^2} + 2 \frac{d\Psi_{xy}(\tau)}{d\tau}.$$

Совершая фурье-преобразование, можно получить

$$\mathcal{E}_z(\omega) = \mathcal{E}_x(\omega) + \omega^2 \mathcal{E}_y(\omega) + 2\omega \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_{xy}^1(\tau) \sin \omega \tau d\tau.$$

Таким образом, мы опять-таки имеем интеграл, являющийся по существу спектральной плотностью, но нечетной, ибо ω входит в интеграл под знаком синуса. Назовем нечетной совместной спектральной плотностью энергии $\mathcal{E}_{xy}^1(\omega)$ двух сигналов $x(t)$ и $y(t)$ выражение

$$\mathcal{E}_{xy}^1(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_{xy}^1(\tau) \sin \omega \tau d\tau. \quad (1.7.7)$$

Тогда искомая спектральная плотность равна

$$\mathcal{E}_z(\omega) = \mathcal{E}_x(\omega) + \omega^2 \mathcal{E}_y(\omega) + 2\omega \mathcal{E}_{xy}^1(\omega).$$

Заметим, что, определив $\mathcal{E}_{xy}^0(\omega)$ и $\mathcal{E}_{xy}^1(\omega)$, мы не можем построить $\mathcal{E}_{xy}(\omega) = \mathcal{E}_{xy}^0(\omega) + \mathcal{E}_{xy}^1(\omega)$, так как таким образом построенная $\mathcal{E}_{xy}(\omega)$ не имеет никакого физического смысла. Реальные системы таковы, что $\mathcal{E}_{xy}^0(\omega)$ и $\mathcal{E}_{xy}^1(\omega)$ никогда не войдут ни в одно выражение в виде такой суммы.

Из (1.7.6) и (1.7.7) нетрудно получить «обратные» формулы:

$$\Psi_{xy}^0(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{E}_{xy}^0(\omega) \cos \omega \tau d\omega, \quad (1.7.8)$$

$$\Psi_{xy}^1(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{E}_{xy}^1(\omega) \sin \omega \tau d\omega, \quad (1.7.9)$$

дающие возможность определения компонент совместной функции корреляции первого рода из совместных спектральных плотностей энергии.

Нетрудно видеть, что формулы (1.3.7) — (1.3.9) являются частными случаями формул (1.7.5), (1.7.6), (1.7.8), когда $y(t) = x(t)$.

4. Для сигналов $x(t)$ и $y(t)$, принадлежащих ко второй группе, также можно построить совместные функции корреляции и совместные спектральные плотности мощности.

Назовем *совместной функцией корреляции второго рода* $\Phi_{xy}(\tau)$ для сигналов второй группы $x(t)$ и $y(t)$ следующее выражение:

$$\Phi_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} K_{xy}[t, t + \tau] dt. \quad (1.7.10)$$

Для частного случая стационарно связанных процессов $x(t)$ и $y(t)$, принадлежащих ко второй группе,

$$\Phi_{xy}(\tau) = K_{xy}[\tau].$$

Для детерминированных функций, как всегда, статистическое усреднение в $K_{xy}[t, t + \tau]$ отбрасывается. Нетрудно показать, что функция корреляции $\Phi_{xy}(\tau)$ обладает всеми свойствами K_2 .

Определим совместные (четную и нечетную) спектральные плотности мощности для сигналов второй группы $x(t)$ и $y(t)$ следующим образом:

$$S_{xy}^0(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{xy}^0(\tau) \cos \omega \tau d\tau, \quad (1.7.11)$$

$$S_{xy}^1(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{xy}^1(\tau) \sin \omega \tau d\tau. \quad (1.7.12)$$

Тем самым получаем «обратные» формулы:

$$\Phi_{xy}^0(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{xy}^0(\omega) \cos \omega \tau d\omega, \quad (1.7.13)$$

$$\Phi_{xy}^1(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{xy}^1(\omega) \sin \omega \tau d\omega. \quad (1.7.14)$$

Полученные формулы (1.7.11) — (1.7.14) для $\Phi_{xy}(\tau)$, $S_{xy}(\omega)$ полностью аналогичны соответствующим формулам для $\Psi_{xy}(\tau)$ и $\mathcal{E}_{xy}(\omega)$ и обобщают формулы (1.4.3) и (1.4.4).

5. Рассмотрим некоторые примеры.

Пример 1.7.4. Рассмотрим две детерминированные функции $x(t) = A \cos \omega_0 t$ и $y(t) = B \cos (\omega_0 t + \varphi)$. Их совместная функция корреляции второго рода равна

$$\Phi_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{AB}{4T} \int_{-T}^{+T} \{ \cos (\omega_0 \tau + \varphi) + \cos [\omega_0 (2t + \tau) + \varphi] \} dt = \\ = \frac{AB}{2} \cos (\omega_0 \tau + \varphi).$$

Она имеет четную и нечетную части, равные

$$\Phi_{xy}^0(\tau) = \frac{AB}{2} \cos \varphi \cos \omega_0 \tau, \quad \Phi_{xy}^1(\tau) = -\frac{AB}{2} \sin \varphi \sin \omega_0 \tau.$$

Таким образом, две сдвинутые синусоиды всегда коррелированы; при сдвиге, равном $\varphi=0, \pi, 2\pi, \dots$, коррелированность — четная, при $\varphi = \frac{\pi}{2}, 3\frac{\pi}{2}, \dots$ — нечетная. Этим функциям корреляции соответствуют совместные спектральные плотности

$$S_{xy}^0(\omega) = \frac{AB}{2} \cos \varphi \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos \omega_0 \tau \cos \omega \tau d\tau = \\ = \frac{AB}{4} \cos \varphi [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)],$$

$$S_{xy}^1(\omega) = -\frac{AB}{2} \sin \varphi \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin \omega_0 \tau \sin \omega \tau d\tau = \\ = -\frac{AB}{4} \sin \varphi [\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)].$$

Пример 1.7.5. Пусть имеется два случайных нестационарных процесса $x(t) = \xi(t) \cos \omega_0 t$ и $y(t) = \eta(t) \sin \omega_0 t$, где ξ, η — стационарные и стационарно связанные процессы с заданной совместной корреляционной функцией $K_{\xi\eta}[\tau]$. Нетрудно найти совместную функцию корреляции

$$\Phi_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} K_{\xi\eta}[\tau] \cos \omega_0 t \sin \omega_0 (t + \tau) dt = \frac{1}{2} K_{\xi\eta}[\tau] \sin \omega_0 \tau.$$

Четная и нечетная части которой равны

$$\Phi_{xy}^0(\tau) = \frac{1}{2} K_{\xi\eta}^1[\tau] \sin \omega_0 \tau, \quad \Phi_{xy}^1(\tau) = \frac{1}{2} K_{\xi\eta}^0[\tau] \sin \omega_0 \tau$$

Отсюда на основании (III.4) — (III.6) и формул примера 1.7.4 нетрудно найти совместные спектральные плотности мощности нестационарных случайных процессов $x(t)$ и $y(t)$:

$$S_{xy}^0(\omega) = \frac{1}{4} [S_{\xi\eta}^1(\omega_0 - \omega) + S_{\xi\eta}^1(\omega_0 + \omega)], \\ S_{xy}^1(\omega) = \frac{1}{4} [S_{\xi\eta}^0(\omega_0 - \omega) - S_{\xi\eta}^0(\omega_0 + \omega)].$$

§ 1.8. Совместные структурные функции и спектральные плотности сигналов с неинтегрируемыми спектрами

1. Обратимся к $x(t)$, $y(t)$ — двум сигналам второй группы, обладающим неинтегрируемыми спектрами энергии, и поставим задачу отыскания совместных спектральных плотностей энергии $\mathcal{E}_{xy}^0(\omega)$ и $\mathcal{E}_{xy}^1(\omega)$. Для решения этой задачи необходимо, как и ранее, оперировать со структурными функциями — теперь уже с совместными структурными функциями.

Для двух произвольных сигналов $x(t)$ и $y(t)$ образуем функцию

$$d_{xy}[t_1, t_2; \tau] = \frac{1}{2} \langle [x(t_1 + \tau) - x(t_1)] [y(t_2 + \tau) - y(t_2)] \rangle, \quad (1.8.1)$$

которую назовем *совместной статистической структурной функцией*. Она дает характеристику коррелированности между приращениями процесса $x(t)$ и процесса $y(t)$.

Легко видеть, что эта совместная структурная функция обладает следующими свойствами:

- 1) $d_{xy}[t_1, t_2; 0] \equiv 0$,
- 2) $d_{xy}[t_2, t_1; \tau] = d_{yx}[t_1, t_2; \tau]$,
- 3) $d_{xy}[t_1, t_2; -\tau] = d_{xy}[t_1 - \tau, t_2 - \tau; \tau]$.

С совместной корреляционной функцией структурная функция $d_{xy}[t_1, t_2; \tau]$ связана следующим образом:

$$d_{xy}[t_1, t_2; \tau] = \frac{1}{2} \{ K_{xy}[t_1 + \tau, t_2 + \tau] + K_{xy}[t_1, t_2] - K_{xy}[t_1 + \tau, t_2] - K_{xy}[t_1, t_2 + \tau] \}. \quad (1.8.2)$$

Будем говорить, что процессы $x(t)$ и $y(t)$ обладают стационарно связанными приращениями, если

$$d_{xy}[t_1, t_2; \tau] \equiv d_{xy}[t_2 - t_1; \tau].$$

Нетрудно видеть, на основании третьего свойства $d_{xy}[t_1, t_2; \tau]$, что совместная структурная функция стационарно связанных приращений является четной по второму аргументу. По первому аргументу $d_{xy}[\theta; \tau]$ может быть разложена на сумму четной и нечетной компонент:

$$d_{xy}[\theta; \tau] = d_{xy}^0[\theta; \tau] + d_{xy}^1[\theta; \tau].$$

Будем говорить, что какая-либо функция $B_{xy}[\theta; \tau]$ обладает свойствами S_2 , если

- 1) $B_{xy}[\theta; \tau]$ как функция θ при $\tau \neq 0$ обладает свойствами K_2 ,
- 2) $B_{xy}[\theta; 0] \equiv 0$,
- 3) $B_{xy}[\theta; -\tau] = B_{xy}[\theta; \tau]$.

Можно показать, что совместная статистическая структурная функция $d_{xy}[\theta, \tau]$ обладает свойствами S_2 , тем самым по первому аргументу она обладает свойствами совместной корреляционной функции $K_{xy}[\tau]$.

Если случайные процессы $x(t)$ и $y(t)$ являются стационарно связанными процессами с заданной совместной корреляционной функцией $K_{xy}[\tau]$, то эти процессы тем более обладают стационарно связанными приращениями и совместная структурная функция равна для них, согласно (1.8.2),

$$d_{xy}[\theta; \tau] = K_{xy}[\theta] - \frac{1}{2} K_{xy}[\theta - \tau] - \frac{1}{2} K_{xy}[\theta + \tau]. \quad (1.8.3)$$

2. Для произвольных сигналов $x(t)$ и $y(t)$ построим функцию

$$\delta_{xy}(\theta, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} d_{xy}[t, t + \theta; \tau] dt, \quad (1.8.4)$$

которую назовем *совместной структурной функцией первого рода*. Нетрудно убедиться в том, что эта структурная функция обладает всеми свойствами S_2 и по первому аргументу ее можно разложить на четное и нечетное слагаемые:

$$\delta_{xy}(\theta, \tau) = \delta_{xy}^0(\theta, \tau) + \delta_{xy}^1(\theta, \tau).$$

Если для сигналов $x(t)$ и $y(t)$ существует функция корреляции первого рода $\Psi_{xy}(\tau)$, то на основании (1.8.2) и (1.7.5) имеем

$$\delta_{xy}(\theta, \tau) = \Psi_{xy}(\theta) - \frac{1}{2} \Psi_{xy}(\theta + \tau) - \frac{1}{2} \Psi_{xy}(\theta - \tau). \quad (1.8.5)$$

Несложные вычисления показывают, что четная и нечетная компоненты $\delta_{xy}(\theta, \tau)$ равны при этом

$$\delta_{xy}^0(\theta, \tau) = \Psi_{xy}^0(\theta) - \frac{1}{2} \Psi_{xy}^0(\theta + \tau) - \frac{1}{2} \Psi_{xy}^0(\theta - \tau),$$

$$\delta_{xy}^1(\theta, \tau) = \Psi_{xy}^1(\theta) - \frac{1}{2} \Psi_{xy}^1(\theta + \tau) - \frac{1}{2} \Psi_{xy}^1(\theta - \tau).$$

Эти формулы дают теперь возможность найти спектральные разложения $\delta_{xy}^0(\theta, \tau)$ и $\delta_{xy}^1(\theta, \tau)$. Используя (1.7.8) и (1.7.9), найдем искомые спектральные разложения:

$$\delta_{xy}^0(\theta, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos \omega \theta [1 - \cos \omega \tau] \mathcal{E}_{xy}^0(\omega) d\omega, \quad (1.8.6)$$

$$\delta_{xy}^1(\theta, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sin \omega \theta [1 - \cos \omega \tau] \mathcal{E}_{xy}^1(\omega) d\omega. \quad (1.8.7)$$

При получении этих формул мы пользовались существованием функции $\Psi_{xy}(\tau)$. Однако если $\mathcal{E}_{xy}^0(\omega)$ и $\mathcal{E}_{xy}^1(\omega)$ таковы, что $\Psi_{xy}(\tau)$ не существует (сигналы второй группы), то тем не менее $\delta_{xy}^0(\theta, \tau)$ и $\delta_{xy}^1(\theta, \tau)$, определенные формулами (1.8.6), (1.8.7), могут существовать, поэтому эти формулы следует рассматривать самостоятельно. Они определяют, таким образом, совместную структурную функцию первого рода через известные совместные спектральные плотности энергии.

Из формулы (1.8.7) видно, что при $\theta=0$ $\delta_{xy}^1(\theta, \tau)$ обращается в нуль, $\delta_{xy}(0, \tau)$ выражается только через $\mathcal{E}_{xy}^0(\omega)$ и тем самым не несет в себе информации о $\mathcal{E}_{xy}^1(\omega)$. Поскольку $\delta_{xy}^0(\theta, \tau)$ и $\delta_{xy}^1(\theta, \tau)$ по первому аргументу обладают всеми свойствами совместных функций корреляции первого рода, формулы (1.8.6), (1.8.7) нетрудно обратить и получить выражения $\mathcal{E}_{xy}^0(\omega)$, $\mathcal{E}_{xy}^1(\omega)$ через соответствующие структурные функции:

$$\mathcal{E}_{xy}^0(\omega) = \frac{1/2\pi}{1 - \cos \omega\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_{xy}^0(\theta, \tau) \cos \omega\theta d\theta, \quad \omega \neq 0, \quad (1.8.8)$$

$$\mathcal{E}_{xy}^1(\omega) = \frac{1/2\pi}{1 - \cos \omega\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_{xy}^1(\theta, \tau) \sin \omega\theta d\theta, \quad \omega \neq 0. \quad (1.8.9)$$

Используя суммирование несобственных интегралов, можно получить другое представление для $\mathcal{E}_{xy}^0(\omega)$ и $\mathcal{E}_{xy}^1(\omega)$. Умножая (1.8.5) на $\cos \omega\tau$, интегрируя, найдем

$$\mathcal{E}_{xy}^0(\omega) \cos \omega\theta + \mathcal{E}_{xy}^1(\omega) \sin \omega\theta = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_{xy}(\theta, \tau) \cos \omega\tau d\tau, \quad \omega \neq 0. \quad (1.8.10)$$

Хотя мы получили *одну* формулу для двух спектральных плотностей, они могут быть, тем не менее, найдены однозначно. Если подставить в интеграл правой части (1.8.10) какую-либо совместную структурную функцию первого рода $\delta_{xy}(\theta, \tau)$, то в результате мы обязательно (таково свойство $\delta_{xy}(\theta, \tau)$) получим два слагаемых, из которых одно пропорционально $\cos \omega\theta$, а другое пропорционально $\sin \omega\theta$. Приравнявая их соответственным слагаемым левой части (1.8.10), мы найдем $\mathcal{E}_{xy}^0(\omega)$ и $\mathcal{E}_{xy}^1(\omega)$.

Если в (1.8.10) положить $\theta=0$, то получим еще одну формулу для $\mathcal{E}_{xy}^0(\omega)$:

$$\mathcal{E}_{xy}^0(\omega) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_{xy}(0, \tau) \cos \omega\tau d\tau, \quad \omega \neq 0. \quad (1.8.11)$$

Для $\mathcal{E}_{xy}^1(\omega)$ подобной формулы получить не удастся. Нетрудно видеть, что при $y(t) = x(t)$ (1.8.11) переходит в (1.5.14), поскольку $\delta_{xx}(\theta, \tau) \equiv \delta_x(\theta, \tau)$.

Таким образом, мы нашли представление совместных спектральных плотностей энергии сигналов через совместную структурную функцию первого рода для двух сигналов $x(t)$ и $y(t)$. Обсудим теперь полученные результаты.

Если функции $x(t)$ и $y(t)$ принадлежат к первой группе, то (1.8.8), (1.8.9) фактически полностью совпадают с (1.7.6) и (1.7.7). Для сигналов второй группы ситуация сложнее. Бес-

конечное значение $\int_{-\infty}^{+\infty} \langle x^2(t) \rangle dt$ и $\int_{-\infty}^{+\infty} \langle y^2(t) \rangle dt$ в общем случае во-

все не ведет к бесконечности $\Psi_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \langle x(t)y(t+\tau) \rangle dt$. По-

этому в самом простом случае сигналы второй группы $x(t)$ и $y(t)$ могут иметь конечную взаимную функцию корреляции $\Psi_{xy}(\tau)$, и тогда $\mathcal{E}_{xy}^0(\omega)$ и $\mathcal{E}_{xy}^1(\omega)$ определяются согласно (1.7.6) и (1.7.7). Таким образом, в этом мыслимом случае $\mathcal{E}_x(\omega)$ и $\mathcal{E}_y(\omega)$ определяются через структурные функции первого рода, $\mathcal{E}_{xy}^0(\omega)$, $\mathcal{E}_{xy}^1(\omega)$ — через функции корреляции первого рода.

Пусть теперь $\Psi_{xy}(\tau)$ не существует, но существует для всех конечных τ совместная структурная функция первого рода $\delta_{xy}(\theta, \tau)$. В этом случае существуют $\delta_{xy}^0(\theta, \tau)$ и $\delta_{xy}^1(\theta, \tau)$. Тогда все четыре спектральные плотности $\mathcal{E}_x(\omega)$, $\mathcal{E}_y(\omega)$, $\mathcal{E}_{xy}^0(\omega)$, $\mathcal{E}_{xy}^1(\omega)$ определяются через структурные функции.

Рассмотрим теперь пример.

Пример 1.8.1. Пусть имеются две детерминированные функции $x(t) = A1(t)$ и $y(t) = B1(t - \theta_0)$, $\theta_0 > 0$. Обе эти функции принадлежат ко второй группе сигналов, и, кроме того, можно показать, что $\Psi_{xy}(\tau)$ не существует. Статистическая совместная структурная функция равна

$$d_{xy}[t, t + \theta; \tau] = \frac{AB}{2} [1(t + \tau) - 1(t)] [1(t + \tau + \theta - \theta_0) - 1(t + \theta - \theta_0)].$$

Отсюда можно найти, согласно (1.8.4), совместную структурную функцию первого рода, которая существует и равна

$$\delta_{xy}(\theta, \tau) = \begin{cases} \frac{AB}{2} [|\tau| - |\theta_0 - \theta|], & |\tau| \geq |\theta_0 - \theta|, \\ 0, & |\tau| \leq |\theta_0 - \theta|. \end{cases}$$

Вычисление интеграла в правой части (1.8.10) дает

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_{xy}(\theta, \tau) \cos \omega \tau d\tau = AB \int_{|\theta_0 - \theta|}^{\infty} [\tau - |\theta_0 - \theta|] \cos \omega \tau d\tau = -\frac{AB}{\omega^2} \cos(\theta_0 - \theta) \omega.$$

Подставляя это значение интеграла в (1.8.10), приравнявая сомножители при $\cos \omega \theta$ и $\sin \omega \theta$, находим совместные спектральные плотности энергии:

$$\mathcal{E}_{xy}^0(\omega) = \frac{AB}{2\pi} \frac{\cos \omega \theta_0}{\omega^2}, \quad \mathcal{E}_{xy}^1(\omega) = \frac{AB}{2\pi} \frac{\sin \omega \theta_0}{\omega^2}.$$

При $\theta_0 \rightarrow 0$, $B \rightarrow A$ $\mathcal{E}_{xy}^1(\omega) \rightarrow 0$, $\mathcal{E}_{xy}^0(\omega) \rightarrow \mathcal{E}_x(\omega) = A^2/2\pi\omega^2$, что, как и должно быть, совпадает с (1.5.1).

Теперь легко получить выражение для спектральной плотности энергии функции $z(t) = x(t) + ly(t)$, где l — произвольное число. Поскольку, как мы имели выше, $\mathcal{E}_z(\omega) = \mathcal{E}_x(\omega) + l^2 \mathcal{E}_y(\omega) + 2l \mathcal{E}_{xy}^0(\omega)$, то имеем

$$\mathcal{E}_z(\omega) = \frac{A^2}{2\pi\omega^2} + l^2 \frac{B^2}{2\pi\omega^2} + 2l \frac{AB}{2\pi} \frac{\cos \omega \theta_0}{\omega^2} = \frac{A^2 + 2lAB \cos \omega \theta_0 + l^2 B^2}{2\pi\omega^2}.$$

Если теперь положить, например, $B = A$ и $l = -1$, то

$$\mathcal{E}_z(\omega) = \frac{A^2}{2\pi} \frac{2(1 - \cos \omega \theta_0)}{\omega^2};$$

эта спектральная плотность существует и при $\omega = 0$, $\mathcal{E}_z(0) = A^2 \theta_0^2 / 2\pi$, что и должно быть, так как при таких значениях B и l функция $z(t)$ принадлежит к первой группе.

3. Обратимся теперь к двум сигналам $x(t)$ и $y(t)$, принадлежащим к третьей группе и обладающим корреляционными связями. Нашей задачей будет отыскание совместных спектральных плотностей мощности $S_{xy}^0(\omega)$ и $S_{xy}^1(\omega)$ для тех значений ω , для которых они существуют.

Определим *совместную структурную функцию второго рода* $\Delta_{xy}(\theta, \tau)$ для двух любых сигналов $x(t)$ и $y(t)$ следующим образом:

$$\Delta_{xy}(\theta, \tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} d_{xy}[t, t + \theta; \tau] dt. \quad (1.8.12)$$

Можно показать, что $\Delta_{xy}(\theta, \tau)$ обладает всеми свойствами S_2 и может существовать в том случае, когда $\Phi_{xy}(\tau)$ не существует (например, для большинства сигналов третьей группы).

Если $x(t)$ и $y(t)$ обладают стационарно связанными приращениями, то из (1.8.12) следует, что

$$\Delta_{xy}(\theta, \tau) = d_{xy}[\theta; \tau]. \quad (1.8.13)$$

Если $\Delta_{xy}(\theta, \tau)$ существует для всякого конечного τ , то нахождение совместных спектральных плотностей $S_{xy}^0(\omega)$ и $S_{xy}^1(\omega)$ можно провести аналогично тому, что мы делали для отыскания $\mathcal{E}_{xy}^0(\omega)$ и $\mathcal{E}_{xy}^1(\omega)$.

Предположим, что для сигналов $x(t)$ и $y(t)$ существует совместная функция корреляции второго рода $\Phi_{xy}(\tau)$; тогда из

(1.8.12), используя (1.8.2) и (1.7.10), находим

$$\Delta_{xy}(\theta, \tau) = \Phi_{xy}(\theta) - \frac{1}{2} \Phi_{xy}(\theta - \tau) - \frac{1}{2} \Phi_{xy}(\theta + \tau). \quad (1.8.14)$$

Выделяя четную и нечетную составляющие (по θ), найдем

$$\Delta_{xy}^0(\theta, \tau) = \Phi_{xy}^0(\theta) - \frac{1}{2} \Phi_{xy}^0(\theta - \tau) - \frac{1}{2} \Phi_{xy}^0(\theta + \tau),$$

$$\Delta_{xy}^1(\theta, \tau) = \Phi_{xy}^1(\theta) - \frac{1}{2} \Phi_{xy}^1(\theta - \tau) - \frac{1}{2} \Phi_{xy}^1(\theta + \tau).$$

Далее, используя (1.7.13), (1.7.14), находим спектральное разложение компонент совместной структурной функции второго рода:

$$\Delta_{xy}^0(\theta, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos \omega \theta [1 - \cos \omega \tau] S_{xy}^0(\omega) d\omega, \quad (1.8.15)$$

$$\Delta_{xy}^1(\theta, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sin \omega \theta [1 - \cos \omega \tau] S_{xy}^1(\omega) d\omega. \quad (1.8.16)$$

К этим формулам можно отнести замечания, полностью аналогичные тем, которые были сделаны для (1.8.6), (1.8.7).

Обращая полученные формулы к аргументу θ , получим

$$S_{xy}^0(\omega) = \frac{1/2\pi}{1 - \cos \omega \tau} \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta_{xy}^0(\theta, \tau) \cos \omega \theta d\theta, \quad \omega \neq 0, \quad (1.8.17)$$

$$S_{xy}^1(\omega) = \frac{1/2\pi}{1 - \cos \omega \tau} \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta_{xy}^1(\theta, \tau) \sin \omega \theta d\theta, \quad \omega \neq 0. \quad (1.8.18)$$

Умножая (1.8.14) на $\cos \omega \tau$ и интегрируя по τ , найдем

$$S_{xy}^0(\omega) \cos \omega \theta + S_{xy}^1(\omega) \sin \omega \theta = -\frac{1}{2\pi} \oint_{-\infty}^{+\infty} \Delta_{xy}(\theta, \tau) \cos \omega \tau d\tau, \quad \omega \neq 0. \quad (1.8.19)$$

Отсюда, полагая $\theta = 0$, имеем

$$S_{xy}^0(\omega) = -\frac{1}{2\pi} \oint_{-\infty}^{+\infty} \Delta_{xy}(0, \tau) \cos \omega \tau d\tau, \quad \omega \neq 0. \quad (1.8.20)$$

Тем самым формулы (1.8.17) — (1.8.20) полностью решают вопрос о совместных спектральных плотностях сигналов третьей группы, для которых существует совместная структурная функция

второго рода. Эти формулы играют основную роль в анализе корреляции между сигналами третьей группы для того случая, когда $\Phi_{xy}(\tau)$ не существует. Для тех сигналов третьей группы $x(t)$ и $y(t)$, для которых почти при всех τ существует функция корреляции $\Phi_{xy}(\tau)$, спектральные плотности определяются по-прежнему формулами (1.7.11), (1.7.12).

§ 1.9. Марковские процессы.

Уравнение Эйнштейна — Фоккера — Планка

1. Среди случайных процессов особое место занимают так называемые марковские процессы, или процессы без последствия. Возьмем случайную функцию $x(t)$ и зафиксируем некоторые моменты времени $t_1 > t_2 > t_3 > \dots > t_{N-1} > t_N$. Рассмотрим плотность условной вероятности

$$W_N(x_N, t_N; x_{N-1}, t_{N-1}; \dots; x_2, t_2 | x_1, t_1);$$

$W_N dx_1$ есть вероятность того, что значения $x_1 = x(t_1)$ лежат в интервале $x_1, x_1 + dx_1$, если в момент t_2 функция имела значение x_2 , в момент t_3 — значение x_3 , ..., в момент t_{N-1} — значение x_{N-1} и в момент t_N — значение x_N .

Случайный процесс называется марковским, если указанная условная вероятность зависит только от $x_2 = x(t_2)$ и не зависит от значений x во все предыдущие моменты времени. Другими словами, случайный процесс $x(t)$ является марковским, если плотность вероятности того или иного значения x в последующий момент времени зависит только от того значения, которое было в настоящий момент, и совершенно не зависит от всей предыдущей истории.

Для марковского процесса любая N -мерная плотность вероятности выражается через двумерную и тем самым марковский процесс *полностью* описывается двумерной плотностью вероятности. В самом деле, по определению марковского процесса

$$W_N(x_N, t_N; x_{N-1}, t_{N-1}; \dots; x_2, t_2 | x_1, t_1) = \widetilde{W}_2(x_2, t_2 | x_1, t_1),$$

где \widetilde{W}_2 — плотность вероятности переходов.

По определению условной плотности вероятности

$$\begin{aligned} W_N(x_N, t_N; \dots; x_2, t_2; x_1, t_1) &= \\ &= W_{N-1}(x_N, t_N; \dots; x_2, t_2) W_N(x_N, t_N; \dots; x_2, t_2 | x_1, t_1). \end{aligned}$$

Для этих определений нетрудно получить

$$\begin{aligned} W_N(x_N, t_N; \dots; x_2, t_2; x_1, t_1) &= \\ &= W_1(x_N, t_N) \prod_{k=2}^N \widetilde{W}_2(x_k, t_k | x_{k-1}, t_{k-1}); \quad (1.9.1) \end{aligned}$$

например,

$$W_2(x_2, t_2; x_1, t_1) = W_1(x_2, t_2) \cdot \widetilde{W}_2(x_2, t_2 | x_1, t_1).$$

Поскольку в $W_2(x_2, t_2; x_1, t_1)$ содержится фактически $W_1(x_2, t_2)$, а следовательно, и $\widetilde{W}_2(x_2, t_2 | x_1, t_1)$, то двумерная плотность вероятности $W_2(x_2, t_2; x_1, t_1)$ действительно полностью описывает марковские случайные процессы.

Выбирая $N=2$, можем записать по определению марковского процесса

$$W_2(x_2, t_2 | x_1, t_1) = \widetilde{W}_2(x_2, t_2 | x_1, t_1).$$

Тем самым плотность вероятности переходов для марковского процесса совпадает с условной плотностью вероятности W_2 . Поэтому мы ее и будем писать в виде $W_2(\dots | \dots)$, опуская верхний значок.

Двумерная плотность вероятности марковского процесса, кроме обычных условий нормировки, подчиняется еще следующему интегральному уравнению:

$$W_2(x_2, t_2; x_1, t_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} W_2(x_2, t_2; x, t) W_2(x, t | x_1, t_1) dx, \quad (1.9.2)$$

где $x=x(t)$, $t_2 < t < t_1$. Из этого интегрального уравнения легко получить интегральное уравнение для плотности вероятности переходов:

$$W_2(x_2, t_2 | x_1, t_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} W_2(x_2, t_2 | x, t) W_2(x, t | x_1, t_1) dx,$$

так называемое уравнение Смолуховского. Это уравнение показывает, что не всякая условная плотность вероятности может иметь смысл плотности вероятности переходов.

Интегрируя уравнение (1.9.2) по x_2 , получим следующее интегральное уравнение для одномерной плотности вероятности марковского процесса:

$$W(x_1, t_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} W(x, t) W_2(x, t | x_1, t_1) dx. \quad (1.9.3)$$

Это уравнение можно записать в следующей дифференциальной форме — в форме так называемого кинетического уравнения (см., например, [11]):

$$\frac{\partial W(x, t)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial x^n} [K_n(x, t) W(x, t)], \quad (1.9.4)$$

где

$$K_n(x, t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\langle [x(t+\tau) - x(t)]^n \rangle}{\tau}.$$

Здесь усреднение производится по ансамблю реализаций, соответствующему вероятности переходов, т. е.

$$\langle [x(t+\tau) - x(t)]^n \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} [x_\tau - x]^n W_2(x, t | x_\tau, t + \tau) dx_\tau. \quad (1.9.5)$$

Другими словами, полагая, что $x(t) = x$, мы усредняем $\Delta x^n = [x(t+\tau) - x(t)]^n$ по всевозможным значениям x в момент $t + \tau$.

Если отличны от нуля только первые два коэффициента $K_n(x, t)$, уравнение (1.9.4) принимает вид

$$\frac{\partial W(x, t)}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x} [K_1(x, t) W(x, t)] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [K_2(x, t) W(x, t)] \quad (1.9.6)$$

и носит название уравнения Эйнштейна — Фоккера — Планка (ЭФП).

Если нам известны $K_1(x, t)$, $K_2(x, t)$ и начальное значение плотности вероятности $W(x, t_0)$, то уравнение ЭФП определяет $W(x, t)$ для всех $t > t_0$. Если в начальный момент времени t_0 величина x принимала детерминированное значение x_0 , т. е. если

$$W(x, t_0) = \delta(x - x_0),$$

то, согласно (1.9.3), для $t > t_0$

$$W(x, t) = W_2(x_0, t_0 | x, t),$$

и одномерная плотность вероятности фактически превращается в плотность вероятности переходов; тем самым уравнение (1.9.6) есть уравнение для плотности вероятности переходов.

Представление реального физического случайного процесса в виде марковского позволяет применить к решению различных задач мощный аппарат уравнения ЭФП. Однако не любой физический случайный процесс можно описывать как марковский, так как часто на поведение $x(t)$ влияет предыстория процесса — те значения, которые принимала функция $x(t)$ в различные предыдущие времена. Однако заметим, что существует целый ряд случаев, когда реальный физический процесс нельзя описать одномерным марковским процессом, но можно описать двумерным марковским процессом, в котором марковским процессом является в сущности совокупность двух случайных функций.

Пусть совокупность $x(t)$ и $y(t)$ представляет собой марковский процесс, который в этом случае представляется плотностью вероятности переходов $W(x_2, y_2; t_2 | x_1, y_1; t_1)$ и полностью описывается плотностью вероятности

$$W(x_2, y_2, t_2; x_1, y_1, t_1).$$

Плотность вероятности $W(x, y, t)$ подчиняется тогда следующему дифференциальному уравнению (кинетическому уравнению):

$$\frac{\partial W(x, y, t)}{\partial t} = \sum_{m+n>0} \frac{(-1)^{m+n}}{n! m!} \frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial y^n} [K_{mn}(x, y, t) W(x, y, t)],$$

где

$$\begin{aligned} K_{mn}(x, y, t) &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\langle [x(t+\tau) - x(t)]^m [y(t+\tau) - y(t)]^n \rangle}{\tau} = \\ &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} [x_\tau - x]^m [y_\tau - y]^n W_2(x, y, t | x_\tau, y_\tau, t + \tau) dx_\tau dy_\tau. \end{aligned} \quad (1.9.7)$$

Если $K_{mn}(x, y, t) = 0$ для $m \geq 3$, $n \geq 3$, то для $W(x, y, t)$ получаем двумерное уравнение ЭФП

$$\begin{aligned} \frac{\partial W(x, y, t)}{\partial t} &= - \frac{\partial}{\partial x} [K_{10} W] - \frac{\partial}{\partial y} [K_{01} W] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [K_{20} W] + \\ &+ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} [K_{11} W] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} [K_{02} W]. \end{aligned} \quad (1.9.8)$$

Зная $K_{mn}(x, y, t)$ и решая (1.9.8), при задании начального распределения $W(x, y, t_0)$ найдем $W(x, y, t)$ для $t > t_0$, откуда в свою очередь легко найти одномерное распределение, например, для $y(t)$:

$$W(y, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} W(x, y, t) dx,$$

которое не может быть найдено из каких-либо уравнений ЭФП, поскольку $y(t)$ сам по себе не является марковским процессом.

2. Рассмотрим теперь стационарные марковские процессы, для которых N -мерные плотности вероятности зависят лишь от разности моментов времени.

Для одномерного стационарного марковского процесса плотность вероятности переходов и двумерная плотность вероятности принимают вид ($\Delta t = t_1 - t_2$)

$$\begin{aligned} W_2(x_2, t_2 | x_1, t_1) &\equiv W_2(x_2 | x_1, \Delta t), \\ W_2(x_2, t_2; x_1, t_1) &\equiv W_2(x_2, x_1, \Delta t). \end{aligned}$$

Что касается одномерной плотности вероятности, то она, вообще говоря, зависит от времени, если мы задаемся при $t=t_0$ начальным произвольным распределением $W(x, t_0)$, но при возрастании времени стремится к некоторому стационарному распределению:

$$W_{\text{ст}}(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} W(x, t).$$

Это следует из того, что теперь коэффициенты кинетического уравнения уже не зависят от времени и, следовательно, стационарное распределение $W_{\text{ст}}(x)$ определяется уравнением

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{d^n}{dx^n} [K_n(x) W_{\text{ст}}(x)] = 0.$$

Аналогичная ситуация имеет место и для стационарного двумерного марковского процесса — плотности вероятности зависят лишь от разности времен:

$$W(x_2, y_2, t_2 | x_1, y_1, t_1) \equiv W(x_2, y_2 | x_1, y_1, \Delta t),$$

$$W(x_2, y_2, t_2; x_1, y_1, t_1) \equiv W(x_2, y_2; x_1, y_1, \Delta t).$$

Коэффициенты кинетического уравнения K_{mn} не зависят от t , и существует стационарная плотность вероятности

$$W_{\text{ст}}(x, y) = \lim_{t \rightarrow \infty} W(x, y, t).$$

В дальнейшем мы будем рассматривать большей частью стационарные марковские процессы.

3. Обсудим теперь практические методы распознавания марковских процессов от немарковских. Сущностью марковского процесса $x(t)$ является распад N -мерной плотности вероятности на произведения плотностей вероятности перехода (1.9.1). Это ведет в свою очередь к тому, что приращения $\Delta x = x(t+\tau) - x(t)$ за неперекрывающиеся промежутки времени должны быть статистически независимыми и, следовательно, некоррелированными, причем эта некоррелированность должна иметь место вплоть до сколь угодно малых положительных τ . Это условие, кстати, легко получить из условия существования коэффициента $K_2(x)$ в уравнении ЭФП. Если $K_2(x) \neq 0$, то для малых τ можно записать

$$\langle \Delta x^2 \rangle = K_2(x) \tau. \quad (1.9.9)$$

Отсюда, рассматривая неперекрывающиеся промежутки времени $(t, t+\tau)$ и $(t+\tau, t+2\tau)$ и приращения $\Delta x_1 = x(t+\tau) - x(t)$,

$\Delta x_2 = x(t+2\tau) - x(t+\tau)$, $\Delta x_3 = x(t+2\tau) - x(t)$; имеем $\Delta x_3 = \Delta x_1 + \Delta x_2$, а на основании (1.9.9)

$$\langle \Delta x_3^2 \rangle = K_2(x) 2\tau, \quad \langle \Delta x_1^2 \rangle = K_2(x) \tau, \quad \langle \Delta x_2^2 \rangle = K_2(x) \tau,$$

и тем самым, следовательно,

$$\langle \Delta x_3^2 \rangle = \langle \Delta x_1^2 \rangle + \langle \Delta x_2^2 \rangle.$$

А это имеет место только для некоррелированных Δx_1 и Δx_2 .

Таким образом, испытание случайного стационарного процесса $x(t)$, заданного каким-либо способом, на «марковость» должно заключаться в исследовании статистической независимости Δx_i и Δx_j за неперекрывающиеся промежутки времени. Следует заметить, что исследование этой независимости часто наталкивается на почти непреодолимые трудности. В этом случае следует ограничиваться исследованием *некоррелированности* Δx_i и Δx_j . Если последняя имеет место, но вопрос о независимости остается открытым, то можно лишь как приближение полагать, что $x(t)$ является марковским процессом. Другими словами, в этом случае исследуемый процесс мы *приближенно* полагаем марковским и его вероятностное распределение лишь *приближенно* описывается уравнением ЭФП.

Если процесс оказывается марковским или его приближенно можно считать таковым, то, вычисляя $K_n(x, t)$, составляя и решая кинетическое уравнение (или уравнение ЭФП), мы получим плотность вероятности переходов, описывающую данный процесс.

Строго говоря, ни один из реальных физических процессов не является марковским, поскольку любая реальная реализация является «гладкой» и ее приращения за сколь угодно малые интервалы времени будут обязательно коррелированными. Практическая независимость приращений имеет место лишь за интервалы времени, большие некоторой величины τ_0 — времени корреляции некоторого процесса $\xi(t)$, связанного с $x(t)$.

Однако если для описания физического случайного процесса можно использовать вспомогательный процесс $\xi(t)$, время корреляции которого без заметной ошибки можно полагать равным нулю, т. е. брать дельта-коррелированный процесс $\xi(t)$, то тогда достаточно точно реальный физический процесс $x(t)$ можно представлять марковским.

4. Рассмотрим два примера. Пусть искомым случайный процесс $x(t)$ задан некоторым дифференциальным уравнением, в которое входит некоторый другой случайный процесс $\xi(t)$, все нужные характеристики которого полагаем известными. Подобные уравнения носят название стохастических дифференциальных уравнений.

Пример 1.9.1. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = a \xi(t).$$

где $\xi(t)$ — стационарный случайный процесс с нулевым средним значением и с функцией корреляции (совпадающей с корреляционной функцией $K_{\xi}[\tau]$)

$$\Phi_{\xi}(\tau) = \langle \xi^2 \rangle e^{-d|\tau|}.$$

Поставим вопрос: является ли процесс $x(t)$ марковским? Рассмотрим приращения за неперекрывающиеся промежутки времени $\Delta x = x(t+\tau) - x(t)$, $\Delta x' = x(t'+\tau) - x(t')$, $t' = t + \tau$. Нетрудно найти

$$\Delta x = a \int_t^{t+\tau} \xi(u) du, \quad \Delta x' = a \int_{t'}^{t'+\tau} \xi(u) du.$$

Очевидно, что $\langle \Delta x \rangle = 0$, $\langle \Delta x' \rangle = 0$. Производя несложные вычисления, получим

$$\langle \Delta x \Delta x' \rangle = a^2 \langle \xi^2 \rangle d^{-2} [1 - e^{-d\tau}]^2.$$

Эта величина ни при каких малых $\tau > 0$ не обращается в нуль. Следовательно, случайный процесс $x(t)$ не является марковским.

Пример 1.9.2. Рассмотрим дифференциальное уравнение предыдущего примера, но положим, что $\Phi_{\xi}(\tau) = D\delta(\tau)$. Тогда найдем, что $\langle \Delta x \Delta x' \rangle = 0$. Поскольку $x(t)$ пропорционален интегралу от дельта-коррелированного процесса, то $x(t)$ имеет нормальное распределение. Поэтому некоррелированность приращений означает их статистическую независимость. Следовательно, процесс $x(t)$ является марковским.

Найдем соответствующее кинетическое уравнение для $x(t)$. Средние значения $\langle \Delta x \rangle$ и $\langle \Delta x^2 \rangle$ равны

$$\langle \Delta x \rangle = a \int_t^{t+\tau} \langle \xi(u) \rangle du = 0, \quad \langle \Delta x^2 \rangle = a^2 \int_t^{t+\tau} \int_t^{t+\tau} \Phi_{\xi}(u-v) du dv = a^2 D\tau.$$

Следовательно, $K_1(x, t) = 0$, $K_2(x, t) = a^2 D$. Для нахождения средних значений высших степеней приращений Δx нужна дополнительная информация о $\xi(t)$, так как необходимо вычислить, например,

$$\langle \Delta x^3 \rangle = a^3 \int_t^{t+\tau} \int_t^{t+\tau} \int_t^{t+\tau} \langle \xi(u) \xi(v) \xi(r) \rangle du dv dr$$

и т. д. Пусть случайный процесс $\xi(t)$ является нормально распределенным, тогда для него имеет место

$$\langle \xi(u_1) \xi(u_2) \dots \xi(u_{2n-1}) \rangle = 0,$$

$$\langle \xi(u_1) \xi(u_2) \dots \xi(u_{2n}) \rangle = \sum_{\text{все пары}} \prod_{j \neq k}^n \langle \xi(u_j) \xi(u_k) \rangle.$$

В таком случае нетрудно показать, что $\langle \Delta x^{2n+1} \rangle = 0$, $\langle \Delta x^{2n} \rangle = D^n \tau^n a^{2n}$ и, следовательно,

$$K_3(x, t) = K_4(x, t) = \dots = 0.$$

Тем самым для плотности вероятности $W(x, t)$ марковского процесса $x(t)$ имеет место следующее уравнение ЭФП:

$$\frac{\partial W(x, t)}{\partial t} = \frac{a^2 D}{2} \frac{\partial^2 W(x, t)}{\partial x^2}.$$

Решением этого уравнения при начальном условии $W(x, t_0) = \delta(x)$ является нормальное распределение

$$W(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi a^2 D (t - t_0)}} e^{-\frac{x^2}{2a^2 D (t - t_0)}}, \quad t > t_0.$$

Марковский процесс, описываемый этим распределением, является нестационарным.

Нахождение точных значений приращений Δx для более сложных стохастических уравнений в общем случае весьма затруднительно. Поэтому представляется целесообразным анализ приближенных значений Δx , которые можно отыскать для самого общего вида стохастического дифференциального уравнения первого порядка.

5. Рассмотрим следующее дифференциальное уравнение первого порядка с дельта-коррелированной, стационарной, нормально распределенной функцией $\xi(t)$:

$$\frac{dx(t)}{dt} = f[x(t), \xi(t)]. \quad (1.9.10)$$

Этому дифференциальному уравнению соответствует следующее интегральное:

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t f[x(u), \xi(u)] du.$$

Рассмотрим приращение

$$\Delta x(\tau) = x(t + \tau) - x(t) = \int_0^\tau f[x_0 + \Delta x(u), \xi(u + t)] du. \quad (1.9.11)$$

Здесь, как всегда, $x(t) = x_0$ — фиксированная величина. Поскольку мы ограничиваемся рассмотрением приращений за малые τ (для вычисления коэффициентов $K_n(x)$ этого достаточно), то, казалось бы, в (1.9.11) можно пренебречь $\Delta x(u)$ по сравнению с x_0 . Однако в общем случае этого делать нельзя, поскольку $\Delta x(u)$ коррелировано с $\xi(u + t)$ и эта корреляция может существенно изменить статистические характеристики $\Delta x(\tau)$. Поэтому малость Δx учтем другим образом: разложим подынте-

ральную функцию в (1.9.11) в ряд по Δx :

$$\begin{aligned} f[x_0 + \Delta x(u), \xi(u+t)] = \\ = f[x_0, \xi(u+t)] + \frac{\partial f}{\partial x} [x_0, \xi(u+t)] \Delta x(u) + \\ + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} [x_0, \xi(u+t)] \Delta x^2(u) + \dots \end{aligned}$$

Ограничиваясь первыми двумя членами, получаем следующее интегральное уравнение для $\Delta x(\tau)$:

$$\Delta x(\tau) = \int_0^\tau f[x_0, \xi(u+t)] du + \int_0^\tau \frac{\partial f}{\partial x} [x_0, \xi(u+t)] \Delta x(u) du.$$

Второе слагаемое имеет высший порядок малости по сравнению с первым. Поэтому легко рассматривать приближенные решения этого уравнения. В первом приближении

$$\Delta x_1(\tau) = \int_0^\tau f[x_0, \xi(u+t)] du. \quad (1.9.12)$$

Во втором приближении

$$\Delta x_2(\tau) = \Delta x_1(\tau) + \int_0^\tau \frac{\partial f}{\partial x} [x_0, \xi(u+t)] \Delta x_1(u) du. \quad (1.9.13)$$

Рассматривая приращение $\Delta x'(\tau)$ за интервал $[t', t' + \tau]$, где $t' \gg t + \tau$, вводя обозначение $x_{00} = x(t')$, найдем для первых двух приближений $\Delta x'_1, \Delta x'_2$ формулы, совпадающие с (1.9.12), (1.9.13), где x_0 следует заменить на x_{00} .

Нетрудно показать, что для неперекрывающихся интервалов времени

$$\langle \Delta x_1(\tau) \Delta x'_1(\tau) \rangle = \langle \Delta x_1(\tau) \rangle \langle \Delta x'_1(\tau) \rangle.$$

Поэтому, учитывая малость поправки к Δx_1 , процесс $x(t)$, заданный уравнением (1.9.10), можно считать приближенно марковским.

Точное вычисление коэффициентов K_n в рассматриваемом примере встречает определенные трудности, и оно может быть проведено лишь с помощью приближений $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3$ и т. д. Рассмотрим первые два приближения (опуская нулик у x_0). Усредняя $\Delta x_2(\tau)$ и вводя корреляционную функцию

$$K_{ff'_x} \equiv \left\langle f[x, \xi(v+t)] \frac{\partial}{\partial x} [x, \xi(u+t)] \right\rangle = K_{ff'_x}(x, u-v),$$

которая вследствие стационарности $\xi(t)$ зависит лишь от x и от $(u - v)$, делая замену переменных, получим, используя (II. 17),

$$\langle \Delta x_2(\tau) \rangle = \langle f[x, \xi] \rangle \tau + \int_0^\tau (\tau - u) K_{ff'}(x, u) du.$$

Отсюда, с точностью до второго приближения,

$$K_1(x) = \langle f[x, \xi] \rangle + \lim_{\tau \rightarrow 0} \int_0^\tau \left(1 - \frac{u}{\tau}\right) K_{ff'}(x, u) du. \quad (1.9.14)$$

Второе слагаемое в этом выражении в общем случае дает ненулевой вклад, так как в состав корреляционной функции $K_{ff'}(x, u)$ может входить дельта-функция; другими словами, предел интеграла понимается так: сначала берется интеграл, а затем в полученном результате $\tau \rightarrow 0$.

Вообще говоря, имеет смысл учитывать второе приближение, только если $\langle f[x, \xi] \rangle = 0$. Если же первое слагаемое не равно нулю, то второе слагаемое является просто малой поправкой и часто его учет не дает ничего существенного.

При вычислении $K_2(x)$ ограничимся первым приближением. Усредняя $\Delta x_1^2(\tau)$ и вводя корреляционную функцию

$$K_f(x, v - u) \equiv \langle f[x, \xi(u + t)] f[x, \xi(v + t)] \rangle,$$

будем иметь

$$\langle \Delta x_1^2(\tau) \rangle = \int_0^\tau \int_0^\tau K_f(x, v - u) du dv = \int_{-\tau}^{+\tau} (\tau - |u|) K_f(x, u) du.$$

Отсюда в первом приближении

$$K_2(x) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \int_{-\tau}^{+\tau} \left(1 - \frac{|u|}{\tau}\right) K_f(x, u) du. \quad (1.9.15)$$

Наличие в $K_f(x, u)$ дельта-функции всегда приводит к $K_2(x) \neq 0$.

Теперь можно составить уравнение ЭФП (при нормально распределенной дельта-коррелированной $\xi(t)$ высшие коэффициенты $K_n(x)$ ($n \geq 3$) в первом (и втором) приближении большей частью равны нулю) для плотности вероятности $W(x, t)$ процесса $x(t)$. Однако следует иметь в виду, что приближенные значения $K_1(x)$, $K_2(x)$ ведут к приближенной плотности вероятности $W(x, t)$, и тем самым все описание $x(t)$ для общего случая становится заведомо приближенным.

Обратимся к некоторым примерам.

Пример 1.9.3. Рассмотрим случайный процесс $x(t)$, заданный уравнением

$$\frac{dx}{dt} = \varphi[x] + a\xi(t).$$

Нетрудно видеть, что $f[x(t), \xi(t)] = \varphi[x(t)] + a\xi(t)$ и что $\langle f[x, \xi] \rangle = \varphi[x]$, $K_f(x, \tau) = \varphi^2[x] + a^2 D\delta(\tau)$. Следовательно, на основании (1.9.14), (1.9.15)

$$K_1(x) = \varphi[x], \quad K_2(x) = \varphi^2[x] + a^2 D.$$

В соответствии с этим уравнение ЭФП принимает следующий вид:

$$\frac{\partial W(x, t)}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x} [\varphi[x] W(x, t)] + \frac{a^2 D}{2} \frac{\partial^2 W(x, t)}{\partial x^2}.$$

Если исходное уравнение является линейным по отношению к x , то $\varphi[x] = -bx$, уравнение ЭФП принимает вид

$$\frac{\partial W(x, t)}{\partial t} = bW(x, t) + bx \frac{\partial W(x, t)}{\partial x} + \frac{a^2 D}{2} \frac{\partial^2 W(x, t)}{\partial x^2}, \quad (1.9.16)$$

а процесс $x(t)$ становится строго марковским.

Пример 1.9.4. Пусть $f[x(t), \xi(t)] = \varphi[x(t)]\xi(t)$. Тогда нетрудно найти, что

$$\langle f[x, \xi] \rangle = 0, \quad K_{ff'}(x, \tau) = \varphi \frac{d\varphi}{dx} D\delta(\tau), \quad K_f(x, \tau) = \varphi^2 D\delta(\tau).$$

Следовательно,

$$K_1(x) = \frac{D}{2} \varphi[x] \frac{d\varphi[x]}{dx}, \quad K_2(x) = D\varphi^2[x].$$

Тем самым уравнение ЭФП для данного примера принимает вид

$$\frac{\partial W(x, t)}{\partial t} = - \frac{D}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \varphi[x] \frac{d\varphi[x]}{dx} W(x, t) \right\} + \frac{D}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \{ \varphi^2[x] W(x, t) \}.$$

6. Оставаясь в рамках приближенного описания процесса $x(t)$, заданного уравнением (1.9.10), можно использовать один упрощающий расчеты метод — метод статистической эквивалентности уравнений.

Пусть имеется два стохастических дифференциальных уравнения для $x(t)$:

$$\frac{dx}{dt} = f[x, \xi], \quad \frac{dx}{dt} = \psi[x, \xi]. \quad (1.9.17)$$

Здесь функции f и ψ разные, поэтому случайные процессы $x(t)$, описываемые этими уравнениями, различны. Пусть теперь вычисление $K_n(x)$ для обоих уравнений приводит к тому, что получаемые $K_n(x)$ в первом приближении одинаковы для обоих уравнений. В этом случае, если оставаться на позициях первого приближения, можно считать, что случайный процесс $x(t)$, описываемый этими разными уравнениями, одинаков. Назовем такие уравнения *статистически эквивалентными* (в первом приближении). Статистическая эквивалентность уравнений (1.9.17) приводит к тому, что, например, вместо первого уравнения для исследования $x(t)$ можно употреблять второе.

Основная ценность метода статистической эквивалентности заключается в том, что это второе уравнение может быть *линейным*, в то время как первое уравнение нелинейно. А для линейного (по отношению к x и ξ) уравнения нахождение $W(x, t)$ не представляет никакого труда, причем для этого не нужно даже решать уравнение ЭФП.

В самом деле, пусть, например, имеем

$$\frac{dx}{dt} = -gx + \xi(t).$$

Решение этого уравнения имеет вид ($x(0) = x_0$)

$$x(t) = x_0 e^{-gt} + e^{-gt} \int_0^t e^{gu} \xi(u) du.$$

Функция $x(t)$, как сумма (интеграл) нормально распределенных величин, сама имеет нормальное распределение. Вид нормального распределения $W(x, t)$ нам известен (см. (1.1.5)), необходимо только найти $a(t) = \langle x(t) \rangle$ и $b^2(t) = \langle x^2(t) \rangle - \langle x(t) \rangle^2$. А эти характеристики без труда находятся из решения уравнения:

$$a(t) = \langle x(t) \rangle = x_0 e^{-gt} + e^{-gt} \int_0^t e^{gu} \langle \xi(u) \rangle du = x_0 e^{-gt},$$

$$\begin{aligned} b^2(t) &= \langle [x(t) - x_0 e^{-gt}]^2 \rangle = e^{-2gt} \int_0^t \int_0^t e^{gu+gv} D\delta(u-v) du dv = \\ &= \frac{D}{2g} (1 - e^{-2gt}). \end{aligned}$$

Тем самым, следовательно, для $t \geq 0$

$$W(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \frac{D}{2g} (1 - e^{-2gt})}} \exp \left\{ -\frac{[x - x_0 e^{-gt}]^2}{\frac{D}{g} (1 - e^{-2gt})} \right\}.$$

Нетрудно проверить, что эта плотность вероятности удовлетворяет, как и должно быть, уравнению ЭФП (1.9.16), где $a=1$, $b=g$ и

$$W(x_0, 0) = \delta(x - x_0).$$

С другой стороны, более «трудное» нелинейное уравнение $dx/dt = f[x, \xi]$ может быть статистически эквивалентно более «легкому» уравнению $dx/dt = \psi[x, \xi]$, также нелинейному, но решение которого или известно, или сравнительно легко может быть найдено. В этом случае, разумеется, плотность вероятности $W(x, t)$ уже не может быть так легко определена, но если

требуется найти лишь некоторые статистические характеристики $x(t)$, как; например, $\langle x(t) \rangle$, $\langle x(t)x(t+\tau) \rangle$ и т. п., то они подчас могут быть непосредственно найдены из «легкого» уравнения.

В дальнейшем при исследовании флуктуаций в автоколебательных системах мы часто будем пользоваться методом статистической эквивалентности.

7. В реальных физических системах существует обычно несколько независимых источников шума. Кроме того, шум, порождаемый одним физическим источником, часто может быть разложен на две статистически независимые компоненты. Это приводит к тому, что в стохастическое дифференциальное уравнение входит уже не один, а несколько случайных статистически независимых процессов.

Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение первого порядка для $x(t)$, куда входят $\xi(t)$ и $\eta(t)$ — стационарные независимые дельта-коррелированные нормально распределенные случайные процессы:

$$\frac{dx}{dt} = f[x, \xi, \eta]. \quad (1.9.18)$$

Нетрудно записать приращение для $x(t)$:

$$\Delta x(\tau) = \int_t^{t+\tau} f[x(u), \xi(u), \eta(u)] du.$$

Используя рассмотренный выше метод, можно, во-первых, показать, что для приращений первого приближения выполняется условие

$$\langle \Delta x_1(\tau) \Delta x'_1(\tau) \rangle = \langle \Delta x_1(\tau) \rangle \langle \Delta x'_1(\tau) \rangle,$$

т. е. что по крайней мере приближенно процесс $x(t)$, заданный уравнением (1.9.18), можно считать марковским. Во-вторых, можно показать, что с точностью до второго приближения $K_1(x)$ определяется той же формулой (1.9.14), где теперь следует брать $\langle f[x, \xi, \eta] \rangle$ вместо $\langle f[x, \xi] \rangle$ и

$$K_{ff'_x}(x, \tau) = \left\langle f[x, \xi(t), \eta(t)] \frac{\partial f}{\partial x} [x, \xi(t+\tau), \eta(t+\tau)] \right\rangle, \quad (1.9.19)$$

и, наконец, для $K_2(x)$ в первом приближении также справедлива формула (1.9.15), где

$$K_f(x, \tau) = \langle f[x, \xi(t), \eta(t)] f[x, \xi(t+\tau), \eta(t+\tau)] \rangle. \quad (1.9.20)$$

Кроме того, уравнение (1.9.18) также может быть заменено статистически эквивалентным уравнением (по первому приближению) с теми же $K_1(x)$ и $K_2(x)$.

Пример 1.9.5. Рассмотрим уравнение

$$\frac{dx}{dt} = n (\eta \cos x - \xi \sin x), \quad (1.9.21)$$

относящееся к типу (1.9.18). Рассчитаем $K_1(x)$ и $K_2(x)$. Оставляя, как это должно быть, x фиксированным, получим

$$K_1(x) = \langle f[x, \xi, \eta] \rangle = 0,$$

$$K_f(x, \tau) = n^2 [\Phi_\eta(\tau) \cos^2 x + \Phi_\xi(\tau) \sin^2 x] = n^2 [D_\eta \delta(\tau) \cos^2 x + D_\xi \delta(\tau) \sin^2 x].$$

Следовательно,

$$K_2(x) = n^2 D_\eta \cos^2 x + n^2 D_\xi \sin^2 x.$$

Предположим, что случайные процессы $\xi(t)$ и $\eta(t)$ таковы, что $D_\eta = D_\xi = D$; тогда имеем окончательно

$$K_1(x) = 0, \quad K_2(x) = n^2 D. \quad (1.9.22)$$

Эти значения не зависят от x . Следовательно, они не изменятся, если в правой части (1.9.21) взять какое-то конкретное значение переменной x , например $x=0$. Другими словами, уравнение

$$\frac{dx}{dt} = n\eta(t) \quad (1.9.23)$$

будет иметь значения для K_1 и K_2 , даваемые теми же формулами (1.9.22).

Следовательно, уравнения (1.9.21) и (1.9.23) статистически эквивалентны и нелинейное уравнение (1.9.21) можно заменить линейным (1.9.23), которое легко решается и было нами рассмотрено в примере 1.9.2. На основании результатов этого примера плотность вероятности $W(x, t)$ для $x(t)$ при начальном условии $x(0)=0$ равна

$$W(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n^2 D t}} e^{-\frac{x^2}{2n^2 D t}}.$$

Такова в первом приближении плотность вероятности для $x(t)$, заданного уравнением (1.9.21), если $D_\xi = D_\eta = D$.

Нетрудно видеть, что уравнением, статистически эквивалентным (1.9.21), будет также уравнение

$$\frac{dx}{dt} = n\xi(t), \quad (1.9.24)$$

получаемое из (1.9.21) при подстановке в правую часть значения $x=-\pi/2$.

Если рассчитать теперь значение $K_1(x)$ с точностью до второго приближения, то можно показать, что и с такой точностью сохраняется статистическая эквивалентность уравнений (1.9.21), (1.9.23) и (1.9.24).

8. До сих пор мы рассматривали одномерные марковские процессы, представляемые одной переменной $x(t)$. Перейдем к двумерным марковским процессам. Прежде всего рассмотрим частный случай, показывающий целесообразность привлечения двумерного марковского процесса для описания конкретных случайных процессов.

Пусть случайный процесс $x(t)$ задан следующим стохастическим дифференциальным уравнением:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \xi(t), \quad (1.9.25)$$

где $\xi(t)$ обладает прежними свойствами. Нетрудно показать, что $x(t)$ не является теперь марковским процессом. В самом деле, проинтегрируем (1.9.25) один раз по t , тогда получим

$$\frac{dx}{dt} = \int_{t_0}^t \xi(u) du = \zeta(t).$$

Случайный процесс $\zeta(t)$ уже не является дельта-коррелированным, и поэтому приращения Δx и $\Delta x'$ (за неперекрывающиеся интервалы времени) уже не будут некоррелированными (или независимыми, учитывая нормальное распределение для $\zeta(t)$). Тем самым непосредственно применить метод уравнений ЭФП к (1.9.25) мы не можем.

Поступим следующим образом. Введем вторую переменную — случайную функцию $y(t) = dx/dt$. Тогда уравнение (1.9.25) запишется в виде

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = \xi(t). \quad (1.9.26)$$

Будем рассматривать теперь *совокупность* случайных величин x, y . Рассмотрим совокупность приращений за малые τ :

$$\Delta x(\tau) = x(t + \tau) - x(t) = \int_t^{t+\tau} y(u) du = y_0 \tau,$$

$$\Delta y(\tau) = y(t + \tau) - y(t) = \int_t^{t+\tau} \xi(v) dv,$$

где y_0 — фиксированная величина. За другой, неперекрывающийся интервал времени $t' \geq t + \tau$ получим

$$\Delta x'(\tau) = x(t' + \tau) - x(t') = \int_{t'}^{t'+\tau} y(u) du = y_0 \tau,$$

$$\Delta y'(\tau) = y(t' + \tau) - y(t') = \int_{t'}^{t'+\tau} \xi(v) dv.$$

Нетрудно найти средние значения:

$$\langle \Delta x \rangle = y_0 \tau, \quad \langle \Delta y \rangle = 0; \quad \langle \Delta x' \rangle = y_0 \tau, \quad \langle \Delta y' \rangle = 0.$$

Поскольку теперь, как нетрудно видеть, справедливо одновременно

$$\begin{aligned} \langle \Delta x \Delta x' \rangle &= \langle \Delta x \rangle \langle \Delta x' \rangle, & \langle \Delta x \Delta y' \rangle &= \langle \Delta x \rangle \langle \Delta y' \rangle, \\ \langle \Delta y \Delta y' \rangle &= \langle \Delta y \rangle \langle \Delta y' \rangle, & \langle \Delta x' \Delta y \rangle &= \langle \Delta x' \rangle \langle \Delta y \rangle, \end{aligned}$$

то можно считать, что совокупность Δx , Δy не коррелирована с $\Delta x'$, $\Delta y'$. Это дает основание считать совокупность случайных функций $x(t)$, $y(t)$ марковским процессом и для нахождения плотности вероятности $W(x, y, t)$ использовать двумерное уравнение ЭФП, коэффициенты которого нетрудно найти согласно (1.9.7):

$$K_{10}(x, y) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\langle \Delta x \rangle}{\tau} = y, \quad K_{01}(x, y) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\langle \Delta y \rangle}{\tau} = 0,$$

$$K_{20}(x, y) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\langle \Delta x^2 \rangle}{\tau} = 0, \quad K_{02}(x, y) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\langle \Delta y^2 \rangle}{\tau} = D,$$

$$K_{11}(x, y) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\langle \Delta x \Delta y \rangle}{\tau} = 0.$$

Таким образом, $W(x, y, t)$ подчиняется уравнению

$$\frac{\partial W(x, y, t)}{\partial t} = -y \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{D}{2} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}.$$

Следует отметить, что не только совокупность x , y образует марковский процесс, но и $y(t)$ (см. второе уравнение (1.9.26)) также является марковским процессом.

Если теперь нас интересует плотность вероятности для $x(t)$, заданного уравнением (1.9.25), то, найдя из уравнения ЭФП $W(x, y, t)$, мы найдем и $W(x, t)$:

$$W(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} W(x, y, t) dy.$$

Таким образом, стохастическое дифференциальное уравнение второго порядка мы свели к двум дифференциальным уравнениям первого порядка и их совокупность «решили» методом уравнения ЭФП. Вообще говоря, такой подход может быть распространен на дифференциальные уравнения высших порядков. Можно, например, дифференциальное уравнение третьего порядка для $x(t)$ свести к трем уравнениям первого порядка для $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$ и, если окажется, что совокупность x , y , z является марковским процессом, «решить» эти дифференциальные уравнения методом ЭФП. Мы этого случая рассматривать не будем, ограничившись общим рассмотрением двух уравнений первого порядка; при этом распространение на случай трех уравнений первого порядка не представит большого труда.

Рассмотрим общий случай двух уравнений первого порядка, в которые входят две стационарные независимые нормально распределенные дельта-коррелированные случайные функции $\xi(t)$ и $\eta(t)$, средние значения которых равны нулю:

$$\frac{dx}{dt} = I[x, y, \xi, \eta], \quad \frac{dy}{dt} = H[x, y, \xi, \eta]. \quad (1.9.27)$$

Приращения случайных функций $x(t)$ и $y(t)$ равны ($x_0 = x(t)$, $y_0 = y(t)$)

$$\Delta x(\tau) = \int_0^{\tau} I[x_0 + \Delta x(u), y_0 + \Delta y(u), \xi(u+t), \eta(u+t)] du,$$

$$\Delta y(\tau) = \int_0^{\tau} H[x_0 + \Delta x(u), y_0 + \Delta y(u), \xi(u+t), \eta(u+t)] du.$$

Разлагая подынтегральные функции в ряды по приращениям, ограничиваясь первыми производными, для малых τ получим следующие первые два приближения для приращений:

$$\Delta x_1(\tau) = \int_0^{\tau} I[x_0, y_0, \xi(u+t), \eta(u+t)] du,$$

$$\Delta y_1(\tau) = \int_0^{\tau} H[x_0, y_0, \xi(u+t), \eta(u+t)] du,$$

$$\begin{aligned} \Delta x_2(\tau) = \Delta x_1(\tau) + \int_0^{\tau} \frac{\partial I}{\partial x}[x_0, y_0, \xi(u+t), \eta(u+t)] \Delta x_1(u) du + \\ + \int_0^{\tau} \frac{\partial I}{\partial y}[x_0, y_0, \xi(u+t), \eta(u+t)] \Delta y_1(u) du, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta y_2(\tau) = \Delta y_1(\tau) + \int_0^{\tau} \frac{\partial H}{\partial x}[x_0, y_0, \xi(u+t), \eta(u+t)] \Delta x_1(u) du + \\ + \int_0^{\tau} \frac{\partial H}{\partial y}[x_0, y_0, \xi(u+t), \eta(u+t)] \Delta y_1(u) du. \end{aligned}$$

Для неперекрывающихся интервалов времени можно показать независимость $\Delta x_1(\tau)$, $\Delta y_1(\tau)$ от $\Delta x'_1(\tau)$, $\Delta y'_1(\tau)$, вследствие чего по крайней мере в первом приближении совокупность $x(t)$, $y(t)$, заданных уравнениями (1.9.27), можно считать марковским процессом.

Отыщем с точностью до второго приближения коэффициенты $K_{10}(x, y)$, $K_{01}(x, y)$. Усредняя $\Delta x_2(\tau)$ и $\Delta y_2(\tau)$, деля на τ и пере-

ходя к пределу, получим (заменяя x_0, y_0 на x, y , остающиеся фиксированными)

$$K_{10}(x, y) = \langle I[x, y, \xi, \eta] \rangle + \lim_{\tau \rightarrow 0} \int_0^{\tau} \left(1 - \frac{u}{\tau}\right) K_{II'_x}(x, y, u) du + \\ + \lim_{\tau \rightarrow 0} \int_0^{\tau} \left(1 - \frac{u}{\tau}\right) K_{HI'_y}(x, y, u) du, \quad (1.9.28)$$

$$K_{11}(x, y) = \langle H[x, y, \xi, \eta] \rangle + \lim_{\tau \rightarrow 0} \int_0^{\tau} \left(1 - \frac{u}{\tau}\right) K_{IH'_x}(x, y, u) du + \\ + \lim_{\tau \rightarrow 0} \int_0^{\tau} \left(1 - \frac{u}{\tau}\right) K_{HH'_y}(x, y, u) du, \quad (1.9.29)$$

где

$$K_{AB}(x, y, \tau) = \langle A[x, y, \xi(t), \eta(t)] B[x, y, \xi(t+\tau), \eta(t+\tau)] \rangle. \quad (1.9.30)$$

Здесь использованы буквы A и B просто для сокращения записи, смысл их очевиден.

Значения коэффициентов $K_{20}(x, y)$, $K_{11}(x, y)$, $K_{02}(x, y)$ приведем только в первом приближении. Возводя Δx_1 и Δy_1 в квадрат, усредняя и переходя к пределу, получим

$$K_{20}(x, y) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \int_{-\tau}^{+\tau} \left(1 - \frac{|u|}{\tau}\right) K_{II}(x, y, u) du, \quad (1.9.31)$$

$$K_{02}(x, y) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \int_{-\tau}^{+\tau} \left(1 - \frac{|u|}{\tau}\right) K_{HH}(x, y, u) du. \quad (1.9.32)$$

Здесь корреляционные функции обозначены для удобства в соответствии с (1.9.30).

Перемножая Δx_1 и Δy_1 , усредняя и переходя к пределу, получим

$$K_{11}(x, y) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \int_{-\tau}^{+\tau} \left(1 - \frac{|u|}{\tau}\right) K_{IH}(x, y, u) du. \quad (1.9.33)$$

Следует отметить, что здесь вместо $K_{IH}(x, y, u)$ можно подставить $K_{IH}^0(x, y, u)$ — четную (по переменной u) часть корреляционной функции, так как интегрирование ведется в симметричных пределах.

Найденные таким образом $K_{mn}(x, y)$ подставляются в уравнение ЭФП (1.9.8), решая которое можно найти $W(x, y, t)$ — плотность вероятности, соответствующую (по крайней мере в первом приближении) уравнениям (1.9.27).

При решении этих уравнений также может быть применен метод статистической эквивалентности. В качестве иллюстрации рассмотрим следующие нелинейные уравнения:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -px + n(\eta \cos y - \xi \sin y), \\ \frac{dy}{dt} &= -qx - n(\xi \cos y + \eta \sin y),\end{aligned}\quad (1.9.34)$$

где статистически независимые ξ и η имеют одинаковую функцию корреляции $\Phi_{\xi}(\tau) = \Phi_{\eta}(\tau) = D \delta(\tau)$; p, q — постоянные. Составляя уравнения (1.9.34) с (1.9.27), видим, что

$$\begin{aligned}I[x, y, \xi, \eta] &= -px + n(\eta \cos y - \xi \sin y), \\ H[x, y, \xi, \eta] &= -qx - n(\xi \cos y + \eta \sin y).\end{aligned}$$

Ограничиваясь первым приближением, получаем

$$K_{10}(x, y) = \langle I[x, y, \xi, \eta] \rangle = -px, \quad K_{01}(x, y) = \langle H[x, y, \xi, \eta] \rangle = -qx.$$

Вычисление корреляционных функций дает

$$K_{11}(x, y, \tau) = p^2 x^2 + n^2 D \delta(\tau),$$

$$K_{11}(x, y, \tau) = q^2 x^2 + n^2 D \delta(\tau), \quad K_{11}(x, y, \tau) = pq x^2 = K_{11}^0[x, y, \tau].$$

Отсюда на основании (1.9.31) — (1.9.33) получаем

$$K_{20}(x, y) = K_{02}(x, y) = n^2 D, \quad K_{11}(x, y) = 0.$$

Поскольку ни один из коэффициентов $K_{mn}(x, y)$ не зависит от y , легко найти уравнения, статистически эквивалентные (1.9.34); ими будут те же уравнения, в правой части которых можно брать любое фиксированное значение y . Возьмем, например, $y=0$. Тогда получим линейные уравнения

$$\frac{dx}{dt} = -px + n\eta(t), \quad \frac{dy}{dt} = -qx - n\xi(t), \quad (1.9.35)$$

статистически эквивалентные (1.9.34).

Легко видеть, что вследствие линейности уравнений (1.9.35) и нормального распределения ξ и η случайные процессы x и y также распределены нормально и $W(x, y, t) = W_{н2}(x, t; y, t)$ (см. (1.1.7)).

Входящие в (1.1.7) функции $b_1^2 = K_x [0]$, $b_2^2 = K_y [0]$, $c = K_{xy} [\tau]$ легко могут быть найдены из (1.9.35).

9. В заключение отметим, что очень часто физические задачи приводят к уравнению (1.9.10), в котором процесс $\xi(t)$ не является (или этого нельзя допустить по тем или иным соображениям) дельта-коррелированным; его время корреляции хотя и мало, но все же отлично от нуля и требует учета. В этом случае только при рассмотрении интервалов времени, больших времени корреляции процесса $\xi(t)$, случайный процесс $x(t)$ можно приближенно считать марковским и для него найти соответствующее кинетическое уравнение. Эти вопросы и другие, связанные с ними, подробно рассмотрены в [11].

СПЕКТРАЛЬНО-КОРРЕЛЯЦИОННЫЙ АНАЛИЗ ЛИНЕЙНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СИГНАЛОВ

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{l=1}^N b_{il} x_l + \xi_i(t) \quad (i = 1, 2, \dots, N),$$
$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^N a'_{m1} \frac{d^m x_1}{dt^m} &= \sum_{p, r} b'_{1pr} \frac{d^p \xi_r}{dt^p}, \\ \sum_{m=0}^N a'_{m2} \frac{d^m x_2}{dt^m} &= \sum_{p, r} b'_{2pr} \frac{d^p \xi_r}{dt^p}, \\ &\vdots \\ \sum_{m=0}^N a'_{ml} \frac{d^m x_l}{dt^m} &= \sum_{p, r} b'_{lpr} \frac{d^p \xi_r}{dt^p}, \end{aligned}$$

Как будет видно из дальнейшего, подобным уравнениям для выходных координат подчиняются флуктуации амплитуды и фазы колебания автогенератора. «Входные» сигналы $\xi_i(t)$ представляют при этом случайные силы, действующие на автогенератор.

Нашей задачей будет нахождение спектральных плотностей, функций корреляции и структурных функций для любой пары «выходных» сигналов $x_i(t)$, $x_j(t)$ и их выражение через анало-

гичные спектрально-корреляционные характеристики «входных» сигналов $\xi_i(t)$, $\xi_j(t)$.

Следует заметить, что теория линейного дифференциального преобразования случайных стационарных функций разработана достаточно подробно (см., например, [3, 4, 14—16]), поэтому соответствующие разделы настоящей главы будут изложены сравнительно кратко.

Более подробно будут рассмотрены линейные преобразования нестационарных процессов и, в частности, преобразования соответствующих структурных функций. Особое внимание при этом будет уделено спектрально-корреляционным характеристикам интеграла с переменным верхним пределом, подынтегральное выражение которого представляет случайную функцию времени.

§ 2.1. Уравнения с дифференциальной правой частью

В этом параграфе мы рассмотрим те частные случаи приведенного выше общего уравнения, в которых все $a'_{mi} = 0$ для $m > 0$. При этом дифференциальному преобразованию подвергаются только «входные» сигналы $\xi_i(t)$.

1. Наиболее простой линейной операцией является простая суперпозиция. Пусть $y(t)$ представляет собой суперпозицию трех входных сигналов ξ , η , ζ :

$$y(t) = b_1 \xi(t) + b_2 \eta(t) + b_3 \zeta(t).$$

Записывая это уравнение для моментов t , $t + \theta$, $t + \tau$, $t + \theta + \tau$, образуя разности и усредняя, нетрудно получить

$$d_y[t, t + \theta; \tau] =$$

$$= b_1^2 d_\xi[t, t + \theta; \tau] + b_2^2 d_\eta[t, t + \theta; \tau] + b_3^2 d_\zeta[t, t + \theta; \tau] + \\ + b_1 b_2 [d_{\xi\eta}[t, t + \theta; \tau] + d_{\eta\xi}[t + \theta, t; \tau]] + b_1 b_3 [d_{\xi\zeta}[t + \theta, t; \tau] + \\ + d_{\zeta\xi}[t, t + \theta; \tau]] + b_2 b_3 [d_{\eta\zeta}[t, t + \theta; \tau] + d_{\zeta\eta}[t + \theta, t; \tau]].$$

Интегрируя по t в пределах $[-T, +T]$, деля на $2T$ и переходя к пределу $T \rightarrow \infty$, получим на основании § 1.8

$$\Delta_y(\theta, \tau) = b_1^2 \Delta_\xi(\theta, \tau) + b_2^2 \Delta_\eta(\theta, \tau) + b_3^2 \Delta_\zeta(\theta, \tau) + \\ + 2b_1 b_2 \Delta_{\xi\eta}^0(\theta, \tau) + 2b_1 b_3 \Delta_{\xi\zeta}^0(\theta, \tau) + 2b_2 b_3 \Delta_{\eta\zeta}^0(\theta, \tau). \quad (2.1.1)$$

Таково преобразование структурной функции при суперпозиции сигналов. Особенностью полученного выражения является то, что вклад в $\Delta_y(\theta, \tau)$ дают только четные части совместных структурных функций входных сигналов.

Если для всех сигналов ξ , η , ζ существуют функции корреляции, то функция корреляции существует и для $y(t)$ и легко может быть получена из (2.1.1) при предельном переходе $\tau \rightarrow \infty$:

$$\Phi_y(\tau) = b_1^2 \Phi_\xi(\tau) + b_2^2 \Phi_\eta(\tau) + b_3^2 \Phi_\zeta(\tau) + 2b_1 b_2 \Phi_{\xi\eta}^0(\tau) + 2b_1 b_3 \Phi_{\xi\zeta}^0(\tau) + 2b_2 b_3 \Phi_{\eta\zeta}^0(\tau). \quad (2.1.2)$$

Если же хотя бы у одного из трех случайных сигналов ξ , η , ζ функции корреляции не существует, ее не существует и для $y(t)$ и следует пользоваться (2.1.1).

Для отыскания спектральной плотности $S_y(\omega)$ можно поступить двояко: обе части (2.1.1) умножить на $\cos \omega t$ и проинтегрировать по τ (при этом можно также положить $\theta=0$), или, умножая на $\cos \omega \theta$, интегрировать по θ . В первом случае следует воспользоваться формулами (1.6.8), (1.8.19), во втором случае — (1.6.7) и (1.8.17). Результат в обоих случаях, разумеется, будет одинаков:

$$S_y(\omega) = b_1^2 S_\xi(\omega) + b_2^2 S_\eta(\omega) + b_3^2 S_\zeta(\omega) + 2b_1 b_2 S_{\xi\eta}^0(\omega) + 2b_1 b_3 S_{\xi\zeta}^0(\omega) + 2b_2 b_3 S_{\eta\zeta}^0(\omega). \quad (2.1.3)$$

Эту же самую формулу мы получим, естественно, и из фурье-преобразований выражения (2.1.2).

Полученные формулы (2.1.1) и (2.1.3) нетрудно распространить на любое число слагаемых.

2. Пусть теперь $y(t)$ выражается через $\xi(t)$ следующим образом:

$$y(t) = b_0 \xi(t) + b_1 \frac{d\xi}{dt} + \dots + b_k \frac{d^k \xi}{dt^k} + \dots \quad (2.1.4)$$

Используя (2.1.1), найдем

$$\Delta_y(\theta, \tau) = \sum_n b_n^2 \Delta_{\xi(n)}(\theta, \tau) + 2 \sum_n \sum_m b_n b_m \Delta_{\xi(n) \xi(m)}^0(\theta, \tau).$$

Принимая во внимание (III. 39) и (III. 40), будем иметь

$$\begin{aligned} \Delta_y(\theta, \tau) = & b_0^2 \Delta_\xi(\theta, \tau) + (2b_2 b_0 - b_1^2) \frac{\partial^2 \Delta_\xi(\theta, \tau)}{\partial \theta^2} + \\ & + (2b_0 b_4 - 2b_1 b_3 + b_2^2) \frac{\partial^4 \Delta_\xi(\theta, \tau)}{\partial \theta^4} + \dots \\ & \dots + \sum_{n+m=2k} \sum (-1)^n b_n b_m \frac{\partial^{2k} \Delta_\xi(\theta, \tau)}{\partial \theta^{2k}} + \dots \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

Переходя к пределу $\tau \rightarrow \infty$, получим, если существует $\Phi_{\xi}(\tau)$ и ее производные,

$$\Phi_y(\tau) = b_0^2 \Phi_{\xi} + (2b_2 b_0 - b_1^2) \frac{d^2 \Phi_{\xi}}{d\tau^2} + (2b_0 b_4 - 2b_1 b_3 + b_2^2) \frac{d^4 \Phi_{\xi}}{d\tau^4} + \dots$$

$$\dots + \sum_{n+m=2k} (-1)^n b_n b_m \frac{d^{2k} \Phi_{\xi}}{d\tau^{2k}} + \dots \quad (2.1.6)$$

Для нахождения $S_y(\omega)$ умножим (2.1.5) на $\cos \omega \theta$ и проинтегрируем по θ . Тогда, принимая во внимание (III. 41), получим

$$S_y(\omega) = [b_0^2 - (2b_2 b_0 - b_1^2) \omega^2 + (2b_0 b_4 - 2b_1 b_3 + b_2^2) \omega^4 + \dots$$

$$\dots + (-1)^k \left[\sum_{n+m=2k} (-1)^n b_n b_m \right] \omega^{2k} + \dots] S_{\xi}(\omega). \quad (2.1.7)$$

Эту спектральную плотность после некоторых преобразований можно записать в другом виде, иногда более удобном, который, вообще говоря, может быть получен и с помощью коэффициентов Фурье непосредственно из исходного выражения (2.1.4):

$$S_y(\omega) = [(b_0 - b_2 \omega^2 + b_4 \omega^4 - b_6 \omega^6 + \dots)^2 +$$

$$+ (b_1 \omega - b_3 \omega^3 + b_5 \omega^5 - \dots)^2] S_{\xi}(\omega). \quad (2.1.8)$$

3. Пусть наряду с функцией $y(t)$, заданной формулой (2.1.4), имеется также и функция $z(t)$, определяемая уравнением

$$z(t) = a_0 \eta(t) + a_1 \frac{d\eta}{dt} + \dots + a_k \frac{d^k \eta}{dt^k} + \dots \quad (2.1.9)$$

Требуется найти структурную функцию $\Delta_{yz}(\theta, \tau)$ и спектральные плотности $S_{yz}^0(\Omega)$, $S_{yz}^1(\Omega)$.

Образуя разности, усредняя по ансамблю и затем по времени, после громоздких, но несложных вычислений, используя формулу (III. 38), можно найти (ограничиваясь для простоты случаем $a_3 = a_4 = a_5 = \dots = 0$; $b_3 = b_4 = b_5 = \dots = 0$)

$$\Delta_{yz}(\theta, \tau) = a_0 b_0 \Delta_{\xi\eta}(\theta, \tau) + (b_0 a_1 - a_0 b_1) \frac{\partial \Delta_{\xi\eta}(\theta, \tau)}{\partial \theta} +$$

$$+ (b_0 a_2 - b_1 a_1 + a_0 b_2) \frac{\partial^2 \Delta_{\xi\eta}(\theta, \tau)}{\partial \theta^2} +$$

$$+ (a_1 b_2 - b_1 a_2) \frac{\partial^3 \Delta_{\xi\eta}(\theta, \tau)}{\partial \theta^3} + a_2 b_2 \frac{\partial^4 \Delta_{\xi\eta}(\theta, \tau)}{\partial \theta^4}, \quad (2.1.10)$$

если, разумеется, $\Delta_{\xi\eta}(\theta, \tau)$ и соответствующие производные по θ существуют почти во всех точках θ .

Если для процессов $\xi(t)$ и $\eta(t)$ существует функция корреляции $\Phi_{\xi\eta}(\tau)$ и, почти для всех τ ее соответствующие производные, то существует и $\Phi_{yz}(\tau)$, определяемая той же формулой (2.1.10) с заменой $\Delta_{yz}(\theta, \tau) \rightarrow \Phi_{yz}(\tau)$; $\Delta_{\xi\eta}(\theta, \tau) \rightarrow \Phi_{\xi\eta}(\tau)$; $\partial/\partial\theta \rightarrow d/d\tau$.

Совершая фурье-преобразования (2.1.10), на основании (III. 41) — (III. 44) получим

$$\begin{aligned} S_{yz}^0(\omega) = & a_0 b_0 S_{\xi\eta}^0(\omega) + (b_0 a_1 - a_0 b_1) \omega S_{\xi\eta}^1(\omega) - \\ & - (b_0 a_2 - b_1 a_1 + a_0 b_2) \omega^2 S_{\xi\eta}^0(\omega) - \\ & - (a_1 b_2 - b_1 a_2) \omega^3 S_{\xi\eta}^1(\omega) + a_2 b_2 \omega^4 S_{\xi\eta}^0(\omega), \end{aligned} \quad (2.1.11)$$

$$\begin{aligned} S_{yz}^1(\omega) = & a_0 b_0 S_{\xi\eta}^1(\omega) - (b_0 a_1 - a_0 b_1) \omega S_{\xi\eta}^0(\omega) - \\ & - (b_0 a_2 - b_1 a_1 + a_0 b_2) \omega^2 S_{\xi\eta}^1(\omega) + \\ & + (a_1 b_2 - b_1 a_2) \omega^3 S_{\xi\eta}^0(\omega) + a_2 b_2 \omega^4 S_{\xi\eta}^1(\omega). \end{aligned} \quad (2.1.12)$$

4. Рассмотрим, наконец, необходимый для дальнейшего общий случай, в котором функции $x(t)$ и $y(t)$ заданы следующим образом:

$$\begin{aligned} x(t) &= a_{11} \frac{d\xi}{dt} + a_{01} \xi + b_{11} \frac{d\eta}{dt} + b_{01} \eta, \\ y(t) &= a_{12} \frac{d\xi}{dt} + a_{02} \xi + b_{12} \frac{d\eta}{dt} + b_{02} \eta. \end{aligned}$$

Структурные функции и спектральные плотности для сигналов $\xi(t)$ и $\eta(t)$, как всегда, считаем заданными.

Используя формулы всех предыдущих пунктов настоящего параграфа, а также (III. 38), после довольно длинных, но элементарных вычислений получим следующие значения структурных функций:

$$\begin{aligned} \Delta_x(\theta, \tau) = & a_{01}^2 \Delta_{\xi}(\theta, \tau) + 2a_{01}b_{01} \Delta_{\xi\eta}^0(\theta, \tau) + b_{01}^2 \Delta_{\eta}(\theta, \tau) + \\ & + 2(a_{01}b_{11} - a_{11}b_{01}) \frac{\partial \Delta_{\xi\eta}^1(\theta, \tau)}{\partial \theta} - a_{11}^2 \frac{\partial^2 \Delta_{\xi}(\theta, \tau)}{\partial \theta^2} - \\ & - 2a_{11}b_{11} \frac{\partial^2 \Delta_{\xi\eta}^0(\theta, \tau)}{\partial \theta^2} - b_{11}^2 \frac{\partial^2 \Delta_{\eta}(\theta, \tau)}{\partial \theta^2}, \end{aligned} \quad (2.1.13)$$

$$\begin{aligned} \Delta_y(\theta, \tau) = & a_{02}^2 \Delta_{\xi}(\theta, \tau) + 2a_{02}b_{02} \Delta_{\xi\eta}^0(\theta, \tau) + b_{02}^2 \Delta_{\eta}(\theta, \tau) + \\ & + 2(a_{02}b_{12} - a_{12}b_{02}) \frac{\partial \Delta_{\xi\eta}^1(\theta, \tau)}{\partial \theta} - a_{12}^2 \frac{\partial^2 \Delta_{\xi}(\theta, \tau)}{\partial \theta^2} - \\ & - 2a_{12}b_{12} \frac{\partial^2 \Delta_{\xi\eta}^0(\theta, \tau)}{\partial \theta^2} - b_{12}^2 \frac{\partial^2 \Delta_{\eta}(\theta, \tau)}{\partial \theta^2}, \end{aligned} \quad (2.1.14)$$

$$\begin{aligned} \Delta_{xy}^0(\theta, \tau) = & a_{01}a_{02}\Delta_{\xi}(\theta, \tau) + b_{01}b_{02}\Delta_{\eta}(\theta, \tau) + (a_{01}b_{02} + b_{01}a_{02})\Delta_{\xi\eta}^0(\theta, \tau) + \\ & + (a_{01}b_{12} - a_{11}b_{02} + b_{11}a_{02} - b_{01}a_{12})\frac{\partial\Delta_{\xi\eta}^1(\theta, \tau)}{\partial\theta} - a_{11}a_{12}\frac{\partial^2\Delta_{\xi}^0(\theta, \tau)}{\partial\theta^2} - \\ & - b_{11}b_{12}\frac{\partial^2\Delta_{\eta}^0(\theta, \tau)}{\partial\theta^2} - (a_{11}b_{12} + b_{11}a_{12})\frac{\partial^2\Delta_{\xi\eta}^0(\theta, \tau)}{\partial\theta^2}, \quad (2.1.15) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_{xy}^1(\theta, \tau) = & (a_{01}b_{02} - b_{01}a_{02})\Delta_{\xi\eta}^1(\theta, \tau) - (a_{11}a_{02} - a_{12}a_{01})\frac{\partial\Delta_{\xi}^0(\theta, \tau)}{\partial\theta} - \\ & - (b_{11}b_{02} - b_{12}b_{01})\frac{\partial\Delta_{\eta}^0(\theta, \tau)}{\partial\theta} + (a_{01}b_{12} - a_{11}b_{02} + b_{01}a_{12} - b_{11}a_{02}) \times \\ & \times \frac{\partial\Delta_{\xi\eta}^0(\theta, \tau)}{\partial\theta} - (a_{11}b_{12} - b_{11}a_{12})\frac{\partial^2\Delta_{\xi\eta}^1(\theta, \tau)}{\partial\theta^2}. \quad (2.1.16) \end{aligned}$$

Если существуют $\Phi_{\xi\eta}(\tau)$ и почти для всех τ соответствующие производные, то $\Phi_x(\tau)$, $\Phi_y(\tau)$, $\Phi_{xy}^0(\tau)$, $\Phi_{xy}^1(\tau)$ определяются теми же формулами, что и соответствующие структурные функции с заменой $\Delta(\theta, \tau)$ на $\Phi(\tau)$, $\partial/\partial\theta$ на $d/d\tau$.

Совершая фурье-преобразования (2.1.13) — (2.1.16), с помощью (III.41) — (III.44) нетрудно получить следующие значения спектральных плотностей:

$$\begin{aligned} S_x(\omega) = & (a_{01}^2 + \omega^2 a_{11}^2)S_{\xi}(\omega) + (b_{01}^2 + \omega^2 b_{11}^2)S_{\eta}(\omega) + \\ & + 2(a_{01}b_{01} + \omega^2 a_{11}b_{11})S_{\xi\eta}^0(\omega) + 2\omega(a_{01}b_{11} - a_{11}b_{01})S_{\xi\eta}^1(\omega), \quad (2.1.17) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_y(\omega) = & (a_{02}^2 + \omega^2 a_{12}^2)S_{\xi}(\omega) + (b_{02}^2 + \omega^2 b_{12}^2)S_{\eta}(\omega) + \\ & + 2(a_{02}b_{02} + \omega^2 a_{12}b_{12})S_{\xi\eta}^0(\omega) + 2\omega(a_{02}b_{12} - a_{12}b_{02})S_{\xi\eta}^1(\omega), \quad (2.1.18) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{xy}^0(\omega) = & (a_{01}a_{02} + \omega^2 a_{11}a_{12})S_{\xi}(\omega) + (b_{01}b_{02} + \omega^2 b_{11}b_{12})S_{\eta}(\omega) + \\ & + [(a_{01}b_{02} + b_{01}a_{02}) + \omega^2(a_{11}b_{12} + b_{11}a_{12})]S_{\xi\eta}^0(\omega) + \\ & + (a_{01}b_{12} - a_{11}b_{02} + b_{11}a_{02} - b_{01}a_{12})\omega S_{\xi\eta}^1(\omega), \quad (2.1.19) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{xy}^1(\omega) = & \omega(a_{11}a_{02} - a_{12}a_{01})S_{\xi}(\omega) + \omega(b_{11}b_{02} - b_{12}b_{01})S_{\eta}(\omega) + \\ & + [(a_{01}b_{02} - b_{01}a_{02}) + \omega^2(a_{11}b_{12} - b_{11}a_{12})]S_{\xi\eta}^1(\omega) - \\ & - (a_{01}b_{12} - a_{11}b_{02} + b_{01}a_{12} - b_{11}a_{02})\omega S_{\xi\eta}^0(\omega). \quad (2.1.20) \end{aligned}$$

§ 2.2. Стохастическое дифференциальное уравнение первого порядка

В настоящем параграфе будет рассмотрено стохастическое дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = -ax + \xi(t).$$

Постоянный коэффициент $a \geq 0$. Структурная функция, спектральная плотность и необходимые вероятностные характеристики $\xi(t)$ заданы (при этом, как всегда, предполагается, что $\langle \xi(t) \rangle = 0$). Требуется отыскать структурные функции и спектральную плотность функции $x(t)$.

1. Начнем рассмотрение со случая $a=0$, когда

$$\frac{dx(t)}{dt} = \xi(t).$$

Если при $t=0$ $x=x_0$, то решение этого уравнения может быть записано в виде

$$x(t) = x_0 + \int_0^t \xi(u) du. \quad (2.2.1)$$

Начальное значение x_0 может быть или детерминированным, или случайным. Примем, без потери общности, что $x_0=0$. Тогда, как нетрудно найти,

$$\langle x(t) \rangle = 0.$$

Допустим, что структурная функция $\Delta_x(\theta, \tau)$ существует. Тогда на основании (III. 39) для нее получаем следующее дифференциальное уравнение второго порядка:

$$\frac{\partial^2 \Delta_x(\theta, \tau)}{\partial \theta^2} = -\Delta_\xi(\theta, \tau). \quad (2.2.2)$$

Для нахождения $\Delta_x(\theta, \tau)$ необходимо знание начальных условий. Их можно получить, исходя из свойств структурной функции. Поскольку $\Delta_x(\theta, \tau)$ есть четная функция θ , то ее производная по θ нечетна. Следовательно, должно быть

$$\left(\frac{\partial \Delta_x(\theta, \tau)}{\partial \theta} \right)_{\theta=0} = 0.$$

Тем самым одна из постоянных интегрирования определится. Для нахождения второй произвольной постоянной можно воспользоваться, например, предельным значением

$$\lim_{\theta \rightarrow \infty} \Delta_x(\theta, \tau) = 0.$$

Используя эти условия, можно найти

$$\Delta_x(\theta, \tau) = \oint_0^\infty du \int_0^u \Delta_\xi(v, \tau) dv. \quad (2.2.3)$$

Однако при этом вопрос об условиях существования $\Delta_x(\theta, \tau)$ остается открытым. Для решения этого вопроса выразим $\Delta_x(\theta, \tau)$

через $\Phi_{\xi}(\tau)$, которую будем предполагать существующей. Подставляя в (2.2.3)

$$\Delta_{\xi}(v, \tau) = \Phi_{\xi}(v) - \frac{1}{2} \Phi_{\xi}(v - \tau) - \frac{1}{2} \Phi_{\xi}(v + \tau),$$

производя несложные, но довольно громоздкие вычисления, найдем

$$\Delta_x(\theta, \tau) = \frac{1}{2} \int_{\theta}^{\theta+\tau} du \int_{u-\tau}^u \Phi_{\xi}(v) dv. \quad (2.2.4)$$

Отсюда легко сделать заключение, что $\Delta_x(\theta, \tau)$ существует только в том случае, если существует $\Phi_{\xi}(\tau)$. Если же для $\xi(t)$ функция корреляции обращается в бесконечность почти для всех τ , то, несмотря на существование $\Delta_{\xi}(\theta, \tau)$, структурная функция $\Delta_x(\theta, \tau)$ не существует.

Полагая $\tau \rightarrow \infty$, из вышеприведенных формул для $\Delta_x(\theta, \tau)$ нетрудно получить формулы для $\Phi_x(\tau)$:

$$\Phi_x(\tau) = \oint_{\tau}^{\infty} du \int_0^u \Phi_{\xi}(v) dv, \quad \Phi_x(\tau) = \frac{1}{2} \oint_{\tau}^{\infty} du \int_{-\infty}^u \Phi_{\xi}(v) dv. \quad (2.2.5)$$

Несмотря на то, что эти формулы различны, они должны давать одинаковый результат, если $\Phi_x(\tau)$ существует. Сравнивая их, нетрудно видеть, что должно быть выполнено условие

$$\int_{-\infty}^0 \Phi_{\xi}(v) dv = \int_0^{\infty} \Phi_{\xi}(v) dv = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{\xi}(v) dv = 0, \quad (2.2.6)$$

которое является необходимым (но, разумеется, не достаточным *) для существования $\Phi_x(\tau)$.

Для нахождения спектральной плотности $S_x(\omega)$ умножим (2.2.3) на $\cos \theta \omega$ и проинтегрируем по θ ; в результате получим

$$S_x(\omega) = \frac{S_{\xi}(\omega)}{\omega^2} \quad (\omega \neq 0). \quad (2.2.7)$$

Эта формула получена в предположении существования структурной функции у процесса $x(t)$. Однако можно показать, что для справедливости (2.2.7) достаточно лишь существования $S_{\xi}(\omega)$ для всех $\omega \neq 0$.

2. Помимо структурной функции второго рода, часто необходимо знать корреляционную функцию $K_x[t_1, t_2]$ и статистическую структурную функцию $d_x[t_1, t_2; \tau]$.

*) Можно показать, что достаточным условием является условие $\lim_{\omega \rightarrow 0} (S_{\xi}(\omega)/\omega) = 0$.

На основании (2.2.1) найдем

$$K_x[t_1, t_2] = \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} K_\xi[u, v] du dv. \quad (2.2.8)$$

Отсюда следует (как уже отмечалось раньше в примере 1.6.3), что $x(t)$ является в общем случае нестационарным процессом, даже если $\xi(t)$ — стационарная случайная функция. В последнем случае

$$K_x[t_1, t_2] = \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} \Phi_\xi[u - v] du dv. \quad (2.2.9)$$

Для статистической структурной функции имеем в общем случае

$$d_x[t_1, t_2; \tau] = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_1+\tau} \int_{t_2}^{t_2+\tau} K_\xi[u, v] du dv. \quad (2.2.10)$$

Для стационарного $\xi(t)$

$$\begin{aligned} d_x[t_1, t_2; \tau] &= \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_1+\tau} \int_{t_2}^{t_2+\tau} \Phi_\xi(u - v) du dv = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\tau \int_0^\tau \Phi_\xi[u - v - (t_2 - t_1)] du dv = d_x[t_2 - t_1; \tau], \end{aligned} \quad (2.2.11)$$

и, следовательно, $x(t)$ является процессом со стационарными приращениями. В частном случае $t_1 = t_2$

$$d_x[0; \tau] = \frac{1}{2} \int_0^\tau \int_0^\tau \Phi_\xi(u - v) du dv = \frac{1}{2} \int_{-\tau}^\tau (\tau - |u|) \Phi_\xi(u) du. \quad (2.2.12)$$

Пример 2.2.1. Пусть $\xi(t)$ — дельта-коррелированный стационарный процесс с $\Phi_\xi(\tau) = D\delta(\tau)$. Этот случай мы уже рассматривали выше (см. пример 1.6.2) и нашли значения $d_x[t_1, t_2; \tau]$, $\Delta_x(\theta, \tau)$, $D_x[\tau]$, $S_x(\omega)$, данные формулами (1.6.12), (1.6.13) (в этих формулах y следует заменить на x).

Кроме этого, с помощью (2.2.6), (2.2.8) легко убедиться в том, что $\Phi_x(\tau)$ не существует, а корреляционная функция равна

$$K_x[t_1, t_2] = D \min\{t_1, t_2\}.$$

3. В формулах (2.2.8) — (2.2.12) предполагалось, что у процесса $\xi(t)$ известна корреляционная функция. Однако если $\xi(t)$ принадлежит, например, к третьей группе, то для него $K_\xi[t_1, t_2]$ обычно неизвестна (известна $d_\xi[t_1, t_2; \tau]$), а из статистической

структурной функции корреляционная определяется неоднозначно.

Однако если задаться начальными условиями, то для $\xi(t)$ удастся однозначно определить $K_\xi[t_1, t_2]$ из статистической структурной функции. В самом деле, раскрывая выражение $\frac{1}{2} \langle [\xi(u) - \xi(v)]^2 \rangle$, получим

$$d_\xi[v, v; u - v] = \frac{1}{2} K_\xi[u, u] + \frac{1}{2} K_\xi[v, v] - K_\xi[u, v].$$

С другой стороны,

$$\frac{1}{2} \langle [\xi(u) - \xi(0)]^2 \rangle = d_\xi[0, 0; u].$$

Если теперь положить, что $\xi(0) = 0$ (все реализации $\xi(t)$ выходят при $t=0$ из одной нулевой точки), то

$$d_\xi[0, 0; u] = \frac{1}{2} K_\xi[u, u] = \frac{1}{2} \langle \xi^2(u) \rangle. \quad (2.2.18)$$

Воспользовавшись этим, получим окончательно

$$K_\xi[u, v] = d_\xi[0, 0; u] + d_\xi[0, 0; v] - d_\xi[v, v; u - v]. \quad (2.2.14)$$

Если $\xi(t)$ — процесс со стационарными приращениями, то имеем

$$K_\xi[u, v] = d_\xi[0; u] + d_\xi[0; v] - d_\xi[0; u - v]. \quad (2.2.15)$$

Таким образом, ценой привязки реализаций $\xi(t)$ в момент $t=0$ удалось для нестационарного процесса выразить корреляционную функцию через структурную $d_\xi[t_1, t_2; \tau]$. Нетрудно понять, что собственно другого и нельзя было ожидать, так как нестационарный процесс существенно определяется в общем случае начальными условиями.

Может оказаться так, что при достаточно большом t $K_\xi[t, t+\tau]$ примет вполне определенную зависимость от t и τ , отличавшуюся от той, которая была при малом t . Это будет значить, что мы получим тогда $K_\xi[t, t+\tau]$ для нестационарного процесса, «не зависящую» от начальных условий. Другими словами, асимптотическое выражение $K_\xi[t, t+\tau]$ (при $t \rightarrow \infty$) уже не будет зависеть от переходных процессов, связанных с привязкой реализаций в момент $t=0$. И это асимптотическое значение $K_\xi[t, t+\tau]$ можно принять за собственно корреляционную функцию нестационарного процесса, заданного статистической структурной функцией $d_\xi[t_1, t_2; \tau]$.

Теперь уже нетрудно выразить статистическую структурную функцию $d_x[t_1, t_2; \tau]$ через $d_\xi[t_1, t_2; \tau]$. Предполагая, следовательно,

что $\xi'(0) = 0$ (а кроме того, мы имели $x(0) = 0$), согласно (2.2.10) и (2.2.14), получаем

$$d_x[t_1, t_2; \tau] = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_1+\tau} \int_{t_2}^{t_2+\tau} (d_\xi[0, 0; u] + d_\xi[0, 0; v] - d_\xi[v, v, u-v]) du dv. \quad (2.2.16)$$

Если $\xi(t)$ имеет стационарные приращения, то

$$d_x[t_1, t_2; \tau] = \frac{1}{2} \tau \int_{t_1}^{t_1+\tau} d_\xi[0; u] du + \\ + \frac{1}{2} \tau \int_{t_2}^{t_2+\tau} d_\xi[0; v] dv - \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_1+\tau} \int_{t_2}^{t_2+\tau} d_\xi[0; u-v] du dv.$$

Полагая $t_1 = t_2 = t$, имеем ($\Delta x = x(t+\tau) - x(t)$) из (2.2.16)

$$\frac{\langle \Delta x^2 \rangle}{2} = d_x[t, t; \tau] = \\ = \tau \int_t^{t+\tau} d_\xi[0, 0; u] du - \frac{1}{2} \int_t^{t+\tau} \int_t^{t+\tau} d_\xi[v, v; u-v] du dv. \quad (2.2.17)$$

Если $\xi(t)$ — процесс со стационарными приращениями,

$$\frac{\langle \Delta x^2 \rangle}{2} = d_x[t, t; \tau] = \tau \int_t^{t+\tau} d_\xi[0; u] du - \int_0^\tau (\tau - v) d_\xi[0; v] dv. \quad (2.2.18)$$

Полученные формулы для $d_x[t_1, t_2; \tau]$ также естественно связаны с привязкой $\xi(t)$ в точке $t=0$. Для получения структурной функции, свободной от начальных условий и, следовательно, от переходных процессов, необходимо брать достаточно большие t_1 и t_2 . Практически достаточно положить $t_1, t_2 \gg \tau$, и полученный тогда вид $d_x[t_1, t_2; \tau]$ и будет являться искомой структурной функцией, независимой от начальных условий.

Таким образом, вместо предыдущих формул имеем следующее приближенное асимптотическое значение структурной функции:

$$d_x[t_1, t_2; \tau] = \frac{\tau^2}{2} \{d_\xi[0, 0; t_1] + d_\xi[0, 0; t_2]\} - \\ - \frac{1}{2} \int_0^\tau \int_0^\tau d_\xi[t_1, t_2; t_2 - t_1 + u - v] du dv, \quad (2.2.19)$$

а следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{\langle \Delta x^2 \rangle}{2} &= d_x[t, t; \tau] = \\ &= \tau^2 d_\xi[0, 0; t] - \frac{1}{2} \int_0^\tau \int_0^\tau d_\xi[t, t; u - v] du dv. \end{aligned} \quad (2.2.20)$$

Если $\xi(t)$ — процесс со стационарными приращениями, то

$$\begin{aligned} d_x[t_1, t_2; \tau] &= \frac{\tau^2}{2} \{d_\xi[0; t_1] + d_\xi[0; t_2]\} - \\ &- \frac{1}{2} \int_0^\tau \int_0^\tau d_\xi[0; t_2 - t_1 + u - v] du dv, \end{aligned} \quad (2.2.21)$$

$$\frac{\langle \Delta x^2 \rangle}{2} = d_x[t, t; \tau] = \tau^2 d_\xi[0; t]. \quad (2.2.22)$$

Условие $t_1, t_2 \gg \tau$ является до некоторой степени неточным; более точным условием справедливости формул (2.2.19) — (2.2.22), правые части которых представляют собой фактически первые члены разложения вышеприведенных точных выражений для $d_x[t_1, t_2; \tau]$, является малость последующих членов разложения в каком-то заданном интервале изменения τ .

Если, исходя из каких-либо физических соображений, можно указать τ_{\max} такое, что условия $\tau < \tau_{\max}$ достаточно для описания (разумеется, приближенного) процесса $x(t)$, то можно найти такие t_{10}, t_{20} , что для всех $t_1 > t_{10}, t_2 > t_{20}$ формула (2.2.19) и другие могут считаться достаточно точными. Если же упомянутого τ_{\max} указать нельзя, то следует обращаться к точной формуле (2.2.17).

Следует сказать также, что освобождение от начальных условий никогда не может быть полным. Могут быть такие случайные процессы $\xi(t)$ (например, фликкерные), что у $x(t)$ да и у $\xi(t)$ никогда не кончатся переходные процессы, ибо сам шум может быть, по существу, переходным процессом (см. гл. 3). В этом случае ценность асимптотических формул сохраняется лишь для временных промежутков по t_1 и t_2 , а также для τ , много меньших t_{10}, t_{20} .

Другими словами, может быть такая ситуация, где лишь при рассмотрении некоторых временных промежутков $[0, T]$ ($T \ll t_{10}, t_{20}$) начальные условия действительно не играют роли, и тогда $d_x[t_1, t_2; \tau]$ в своей асимптотической форме справедливо при $\Delta t_1, \Delta t_2, \tau \in [0, T]$.

При этом предельный переход $t_{10} \rightarrow \infty, t_{20} \rightarrow \infty$, такой, при котором t_{10} и t_{20} могут выпадать из конечного результата

(см. ниже, например, § 4.5), обеспечивает ценность формул (2.2.19) — (2.2.22) для всех значений аргументов.

Возьмем, например, $\xi(t)$ — процесс со стационарными приращениями, обладающий спектральной плотностью $S_\xi(\omega) = A/2\pi |\omega|^\gamma$ ($1 < \gamma < 3$). Рассмотрим характеристики $x(t)$, предполагая, что $\xi(0) = 0$.

Прежде всего нетрудно видеть, что $S_x(\omega) = A/2\pi |\omega|^{\gamma+2}$, $\Phi_x(\tau)$ и $\Delta_x(\theta, \tau)$ не существуют. Согласно п. 5 § 1.6 структурная функция процесса $\xi(t)$ равна

$$\Delta_\xi(0, \tau) = \frac{A}{2\Gamma(\gamma) \sin \frac{\pi}{2}(\gamma-1)} |\tau|^{\gamma-1} \equiv B |\tau|^{\gamma-1}.$$

Поскольку $\xi(t)$ имеет стационарные приращения,

$$d_\xi[0; \tau] = \Delta_\xi(0, \tau) = B |\tau|^{\gamma-1}. \quad (2.2.23)$$

Отсюда, пользуясь (2.2.22), можно найти приближенное асимптотическое значение статистической структурной функции процесса $x(t)$, равное

$$d_x[t, t; \tau] = B\tau^2 t^{\gamma-1}. \quad (2.2.24)$$

4. Пусть теперь $a > 0$. В этом случае общее решение уравнения

$$\frac{dx}{dt} = -ax + \xi(t)$$

состоит из общего решения соответствующего однородного уравнения (переходные процессы) и частного решения неоднородного (вынужденное решение, обязанное $\xi(t)$). Считая, что переходные процессы затухают, на основании формулы (IV.5) имеем следующее значение для вынужденного решения, которое имеет место при $t \gg a^{-1}$:

$$x(t) = \int_0^\infty e^{-au} \xi(t-u) du, \quad \langle x(t) \rangle = 0. \quad (2.2.25)$$

Образуя приращения и усредняя, нетрудно найти следующую связь статистических структурных функций $d_x[t_1, t_2; \tau]$ и $d_\xi[t_1, t_2; \tau]$:

$$d_x[t_1, t_2; \tau] = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-au-av} d_\xi[t_1-u, t_2-v; \tau] du dv. \quad (2.2.26)$$

Характер этого двойного интеграла позволяет сделать вывод о том, что если существует $d_\xi[t_1, t_2; \tau]$, то существует и $d_x[t_1, t_2; \tau]$.

Полагая $t_2 = t_1 + \theta$ и усредняя по t_1 , из (2.2.26) найдем

$$\Delta_x(\theta, \tau) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-a(u+v)} \Delta_\xi(\theta + u - v, \tau) du dv. \quad (2.2.27)$$

Из полученных формул нетрудно найти формулы для преобразования корреляционной функции $K[t_1, t_2]$ и функции корреляции $\Phi(\tau)$:

$$K_x[t_1, t_2] = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-a(u+v)} K_\xi[t_1 - u, t_2 - v] du dv, \quad (2.2.28)$$

$$\Phi_x(\tau) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-a(u+v)} \Phi_\xi(\tau + u - v) du dv. \quad (2.2.29)$$

Последнюю формулу, пользуясь (II.18) (где следует положить $T \rightarrow \infty$), можно записать в другом, иногда более удобном для вычисления виде:

$$\Phi_x(\tau) = \frac{1}{2a} \int_0^\infty [\Phi_\xi(\tau + u) + \Phi_\xi(\tau - u)] e^{-au} du. \quad (2.2.30)$$

Если $\Phi_x(\tau)$ существует для всех τ , то нетрудно найти среднюю мощность $x(t)$ (см. (II.23)):

$$S_x = \Phi_x(0) = \frac{1}{a} \int_0^\infty \Phi_\xi(u) e^{-au} du. \quad (2.2.31)$$

Умножая (2.2.27) на $\cos \theta \omega$ и интегрируя по θ , найдем преобразование спектральных плотностей:

$$S_x(\omega) = \frac{S_\xi(\omega)}{a^2 + \omega^2}. \quad (2.2.32)$$

Анализируя полученные выражения, нетрудно видеть, что стационарному процессу $\xi(t)$ соответствует стационарный процесс $x(t)$. Нестационарность $\xi(t)$ ведет в общем случае к нестационарности $x(t)$. Если процесс $\xi(t)$ есть процесс со стационарными приращениями, то таковым же будет и процесс $x(t)$.

§ 2.3. Система двух стохастических дифференциальных уравнений первого порядка

Рассмотрим некоторые частные случаи следующей системы двух уравнений первого порядка:

$$\frac{dx}{dt} = -ax - by + \xi(t), \quad \frac{dy}{dt} = -b_1x - a_1y + \eta(t).$$

Коэффициенты a, a_1, b, b_1 полагаем такими, что собственные решения этой системы (при $\xi(t) \equiv \eta(t) \equiv 0$) затухают или предполагаются равными нулю. Все необходимые характеристики ξ и η считаем заданными. Требуется отыскать структурные функции, функции корреляции и спектральные плотности процессов x и y .

1. Начнем рассмотрение с частного случая

$$\frac{dx}{dt} = -ax + \xi(t), \quad \frac{dy}{dt} = -a_1y - b_1x + \eta(t), \quad (2.3.1)$$

где $a > 0, a_1 > 0$. Пренебрегая переходными процессами, рассматриваем только установившиеся процессы (соответствующие таким $t > 0$, что $\min\{a, a_1\}t \gg 1$).

Поскольку в первое уравнение (2.3.1) $y(t)$ не входит, то оно может быть рассмотрено отдельно, а в таком виде оно было рассмотрено в § 2.2 и все необходимые данные о $x(t)$ содержатся в формулах (2.2.25) — (2.2.32).

Поскольку $x(t)$ не зависит от $y(t)$, решение второго уравнения можно взять в виде

$$y(t) = \int_0^{\infty} e^{-a_1 v} z(t-v) dv, \quad \text{«}$$

где

$$z(t) = -b_1 x(t) + \eta(t).$$

Тем самым и второе уравнение фактически свелось к рассмотренному выше уравнению. Следовательно, на основании (2.2.27), (2.2.32) имеем

$$\Delta_y(\theta, \tau) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-a_1(u+v)} \Delta_z(\theta+u-v, \tau) du dv, \quad S_y(\omega) = \frac{S_z(\omega)}{a_1^2 + \omega^2}.$$

Используя (2.1.1) и (2.1.3), для функции $z(t)$ находим

$$\Delta_z(\theta, \tau) = b_1^2 \Delta_x(\theta, \tau) - 2b_1 \Delta_{x\eta}(\theta, \tau) + \Delta_{\eta}(\theta, \tau),$$

$$S_z(\omega) = b_1^2 S_x(\omega) - 2b_1 S_{x\eta}(\omega) + S_{\eta}(\omega).$$

Перемножая приращения $\Delta x, \Delta \eta$ и усредняя по ансамблю, определим совместную статистическую структурную функцию

$$d_{x\eta}[t_1, t_2; \tau] = \int_0^{\infty} e^{-au} d_{\xi\eta}[t_1-u, t_2; \tau] du,$$

где структурную функцию $d_{\xi\eta}[t_1, t_2; \tau]$ считаем заданной. Отсюда имеем

$$\Delta_{x\eta}(\theta, \tau) = \int_0^{\infty} e^{-au} \Delta_{\xi\eta}(\theta + u, \tau) du \quad (2.3.2)$$

и, следовательно,

$$2\Delta_{x\eta}^0(\theta, \tau) = \int_0^{\infty} e^{-au} [\Delta_{\xi\eta}(\theta + u, \tau) + \Delta_{\xi\eta}(-\theta + u, \tau)] du. \quad (2.3.3)$$

Умножая это выражение на $\cos \theta \omega$ и интегрируя по θ , можно найти (см. также (III. 12))

$$2S_{x\eta}^0(\omega) = 2 \frac{aS_{\xi\eta}^0(\omega) + \omega S_{\xi\eta}^1(\omega)}{a^2 + \omega^2}. \quad (2.3.4)$$

Таким образом, для $y(t)$ имеем окончательно

$$\begin{aligned} \Delta_y(\theta, \tau) = & \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-a_1(u+v)} [b_1^2 \Delta_x(\theta + u - v, \tau) - \\ & - 2b_1 \Delta_{xy}^0(\theta + u - v, \tau) + \Delta_{\eta}(\theta + u - v, \tau)] du dv. \end{aligned} \quad (2.3.5)$$

Если у сигналов $\xi(t)$ и $\eta(t)$ существуют функции корреляции, то

$$\begin{aligned} \Phi_y(\tau) = & \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-a_1(u+v)} [b_1^2 \Phi_x(\tau + u - v) - \\ & - 2b_1 \Phi_{x\eta}^0(\tau + u - v) + \Phi_{\eta}(\tau + u - v)] du dv, \end{aligned}$$

где

$$\Phi_{x\eta}^0(\tau) = \Delta_{x\eta}^0(\tau, \infty).$$

Спектральная плотность $S_y(\omega)$ равна

$$S_y(\omega) = \frac{1}{a_1^2 + \omega^2} \left[S_{\eta}(\omega) + b_1 \frac{b_1 S_{\xi}(\omega) - 2aS_{\xi\eta}^0(\omega) - 2\omega S_{\xi\eta}^1(\omega)}{a^2 + \omega^2} \right]. \quad (2.3.6)$$

Для нахождения совместных характеристик $x(t)$ и $y(t)$ найдем прежде $\Delta_{xy}(\theta, \tau)$. Из выражений для $x(t)$ и $y(t)$ нетрудно найти

$$d_{xy}[t_1, t_2; \tau] = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-au - a_1 v} d_{\xi\eta}[t_1 - u, t_2 - v; \tau] du dv$$

и, следовательно,

$$\Delta_{xy}(\theta, \tau) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-au - a_1 v} \Delta_{\xi z}(\theta + u - v, \tau) du dv.$$

С другой стороны,

$$d_{\xi z}[t_1, t_2; \tau] = -b_1 d_{\xi x}[t_1, t_2; \tau] + d_{\xi \eta}[t_1, t_2; \tau],$$

$$\Delta_{\xi z}(\theta, \tau) = -b_1 \Delta_{\xi x}(\theta, \tau) + \Delta_{\xi \eta}(\theta, \tau).$$

Кроме того,

$$d_{\xi x}[t_1, t_2; \tau] = \int_0^\infty e^{-au} d_{\xi}[t_1, t_2 - u, \tau] du,$$

$$\Delta_{\xi x}(\theta, \tau) = \int_0^\infty e^{-au} \Delta_{\xi}(\theta - u, \tau) du.$$

Таким образом, окончательно имеем следующее выражение для совместной структурной функции второго рода:

$$\begin{aligned} \Delta_{xy}(\theta, \tau) = & -b_1 \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-au - a_1 v - a\omega} \Delta_{\xi}(\theta + u - v - \omega, \tau) du dv d\omega + \\ & + \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-au - a_1 v} \Delta_{\xi \eta}(\theta + u - v, \tau) du dv. \end{aligned} \quad (2.3.7)$$

Если существуют для почти всех τ $\Phi_{\xi}(\tau)$ и $\Phi_{\xi \eta}(\tau)$, то

$$\begin{aligned} \Phi_{xy}(\tau) = & -b_1 \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-au - a_1 v - a\omega} \Phi_{\xi}(\tau + u - v - \omega) du dv d\omega + \\ & + \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-au - a_1 v} \Phi_{\xi \eta}(\tau + u - v) du dv. \end{aligned} \quad (2.3.8)$$

Совершая фурье-преобразования (2.3.7) или (2.3.8), можно с помощью (II. 1) — (II. 4) после несложных вычислений получить

$$\begin{aligned} S_{xy}^0(\omega) = & \frac{1}{(a^2 + \omega^2)(a_1^2 + \omega^2)} \{ -b_1 a_1 S_{\xi}(\omega) + \\ & + (a a_1 + \omega^2) S_{\xi \eta}^0(\omega) + (a_1 - a) \omega S_{\xi \eta}^1(\omega) \}, \\ S_{xy}^1(\omega) = & \frac{1}{(a^2 + \omega^2)(a_1^2 + \omega^2)} \{ -b_1 \omega S_{\xi}(\omega) + \\ & + (a a_1 + \omega^2) S_{\xi \eta}^1(\omega) - (a_1 - a) \omega S_{\xi \eta}^0(\omega) \}. \end{aligned} \quad (2.3.9)$$

Таким образом, полученные формулы полностью решают поставленную задачу.

2. В дальнейшем нам придется неоднократно сталкиваться с системой (2.3.1). Часто при этом сигналы $\xi(t)$ и $\eta(t)$ будут являться случайными дельта-коррелированными функциями. Поэтому имеет смысл в виде примера специально рассмотреть соответствующий частный случай системы (2.3.1).

Пример 2.3.1. Пусть $\xi(t)$ и $\eta(t)$ являются стационарными дельта-коррелированными процессами со следующими характеристиками:

$$\Phi_{\xi}(\tau) = D_1 \delta(\tau), \quad \Phi_{\eta}(\tau) = D_2 \delta(\tau), \quad \Phi_{\xi\eta}(\tau) = D_{12} \delta(\tau);$$

$$S_{\xi}(\omega) = D_1/2\pi, \quad S_{\eta}(\omega) = D_2/2\pi, \quad S_{\xi\eta}^0(\omega) = D_{12}/2\pi, \quad S_{\xi\eta}^1(\omega) = 0.$$

В этом случае (на основании п. 1 настоящего параграфа) функции корреляции у $x(t)$ и $y(t)$ существуют и равны ($\tau > 0$)

$$\Phi_x(\tau) = \frac{D_1}{2a} e^{-a\tau},$$

$$\Phi_y(\tau) = \frac{D_2}{2a_1} e^{-a_1\tau} + \frac{b_1}{a_1(a_1^2 - a^2)} (a_1 e^{-a\tau} - a e^{-a_1\tau}) \left(D_1 \frac{b_1}{2a} - D_{12} \right),$$

(2.3.10)

$$\Phi_{xy}^0(\tau) = \frac{b_1 D_1}{2a(a^2 - a_1^2)} (a_1 e^{-a\tau} - a e^{-a_1\tau}) + \frac{D_{12}}{2(a + a_1)} (e^{-a\tau} + e^{-a_1\tau}),$$

$$\Phi_{xy}^1(\tau) = \left[\frac{D_{12}}{2(a + a_1)} - \frac{b_1 D_1}{2(a^2 - a_1^2)} \right] (e^{-a_1\tau} - e^{-a\tau}).$$

Спектральные плотности принимают вид:

$$S_x(\omega) = \frac{D_1}{2\pi(a^2 + \omega^2)}, \quad S_y(\omega) = \frac{1}{2\pi(a_1^2 + \omega^2)} \left[D_2 + \frac{b_1^2 D_1 - 2ab D_{12}}{a^2 + \omega^2} \right],$$

$$S_{xy}^0(\omega) = \frac{1}{2\pi(a^2 + \omega^2)(a_1^2 + \omega^2)} [-b_1 a_1 D_1 + (aa_1 + \omega^2) D_{12}],$$

(2.3.11)

$$S_{xy}^1(\omega) = \frac{\omega}{2\pi(a^2 + \omega^2)(a_1^2 + \omega^2)} [-b_1 D_1 + (a - a_1) D_{12}].$$

Для наиболее распространенного случая, когда $D_1 = D_2 = D$, $D_{12} = 0$, т. е. когда дельта-коррелированные процессы $\xi(t)$ и $\eta(t)$ независимы и обладают одинаковой интенсивностью, имеем функции корреляции ($\tau > 0$)

$$\Phi_x(\tau) = \frac{D}{2a} e^{-a\tau}, \quad \Phi_y(\tau) = \frac{D}{2a_1} e^{-a_1\tau} + \frac{D b_1^2}{2a a_1} \frac{a_1 e^{-a\tau} - a e^{-a_1\tau}}{a_1^2 - a^2},$$

(2.3.12)

$$\Phi_{xy}^0(\tau) = -\frac{D b_1}{2a} \frac{a_1 e^{-a\tau} - a e^{-a_1\tau}}{a_1^2 - a^2}, \quad \Phi_{xy}^1(\tau) = -\frac{D b_1}{2} \frac{e^{-a\tau} - e^{-a_1\tau}}{a_1^2 - a^2},$$

и спектральные плотности

$$S_y(\omega) = \frac{D}{2\pi(a^2 + \omega^2)}; \quad S_y(\omega) = \frac{D}{2\pi(a_1^2 + \omega^2)} \left[1 + \frac{b_1^2}{a^2 + \omega^2} \right], \quad (2.3.13)$$

$$S_{xy}^0(\omega) = -\frac{Db_1a_1}{2\pi(a^2 + \omega^2)(a_1^2 + \omega^2)}, \quad S_{xy}^1(\omega) = -\frac{Db_1\omega}{2\pi(a^2 + \omega^2)(a_1^2 + \omega^2)}.$$

3. К рассмотренным уравнениям (2.3.1) близко примыкают уравнения

$$\frac{dx}{dt} = -ax + \xi(t), \quad \frac{dy}{dt} = -b_1x + \eta(t) = z, \quad (2.3.14)$$

которые получаются из (2.3.1) при $a_1=0$. Здесь мы полагаем, что $a>0$.

Все формулы для $x(t)$ получаются прежними и совпадают с полученными в п. 4 § 2.2. Результатами этого же параграфа можно воспользоваться и для $y(t)$, если полагать, что $y(0)=0$. А именно, для структурной функции второго рода можем записать:

$$\Delta_y(\theta, \tau) = \frac{1}{2} \int_0^{\theta+\tau} du \int_{u-\tau}^u \Phi_z(v) dv. \quad (2.3.15)$$

Таким образом, для существования $\Delta_y(\theta, \tau)$ необходимо существование почти для всех τ функции корреляции $\Phi_z(\tau)$, которая в свою очередь равна

$$\Phi_z(\tau) = b_1^2 \Phi_x(\tau) - 2b_1 \Phi_{x\eta}^0(\tau) + \Phi_\eta(\tau),$$

где

$$2\Phi_{x\eta}^0(\tau) = \int_0^\infty e^{-au} [\Phi_{\xi\eta}(\tau+u) + \Phi_{\xi\eta}(-\tau+u)] du.$$

Принимая во внимание (2.2.29), имеем окончательно

$$\begin{aligned} \Phi_z(\tau) = & b_1^2 \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-a(u+v)} \Phi_\xi(\tau+u-v) du dv - \\ & - b_1 \int_0^\infty e^{-au} [\Phi_{\xi\eta}(\tau+u) + \Phi_{\xi\eta}(-\tau+u)] du + \Phi_\eta(\tau). \end{aligned} \quad (2.3.16)$$

Формулы (2.3.15)–(2.3.16) и решают вопрос о структурной функции $\Delta_y(\theta, \tau)$: она существует, если существуют почти для всех τ функции корреляции $\Phi_\xi(\tau)$, $\Phi_\eta(\tau)$, $\Phi_{\xi\eta}(\tau)$.

Если процессы $\xi(t)$ и $\eta(t)$ таковы, что для них функции корреляции не существуют, а существуют только структурные функции, то $\Delta_y(\theta, \tau)$ не существует, а можно указать только $\Delta_z(\theta, \tau)$, которая равна

$$\Delta_z(\theta, \tau) = b_1^2 \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-a(u+v)} \Delta_\xi(\theta + u - v, \tau) - \\ - b_1 \int_0^\infty e^{-au} [\Delta_{\xi\eta}(\theta + u, \tau) + \Delta_{\xi\eta}(-\theta + u, \tau)] du + \Delta_\eta(\theta, \tau). \quad (2.3.17)$$

Полученные формулы (2.3.16), (2.3.17) полезны и в том случае, когда, имея уравнения (2.3.14), мы интересуемся не $y(t)$, а $z(t)$.

Для этого же случая рассмотрим совместные характеристики $x(t)$ и $z(t)$. Нетрудно найти

$$\Delta_{xz}(\theta, \tau) = -b_1 \Delta_x(\theta, \tau) + \int_0^\infty e^{-au} \Delta_{\xi\eta}(\theta + u, \tau) du, \\ \Phi_{xz}(\tau) = -b_1 \Phi_x(\tau) + \int_0^\infty e^{-au} \Phi_{\xi\eta}(\tau + u) du.$$

Отсюда определяем четные и нечетные части совместной структурной функции:

$$\Delta_{xz}^0(\theta, \tau) = -b_1 \Delta_x(\theta, \tau) + \\ + \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-au} [\Delta_{\xi\eta}(\theta + u, \tau) + \Delta_{\xi\eta}(-\theta + u, \tau)] du, \\ \Delta_{xz}^1(\theta, \tau) = \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-au} [\Delta_{\xi\eta}(\theta + u, \tau) - \Delta_{\xi\eta}(-\theta + u, \tau)] du, \quad (2.3.18)$$

и совместной функции корреляции:

$$\Phi_{xz}^0(\tau) = -b_1 \Phi_x(\tau) + \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-au} [\Phi_{\xi\eta}(\tau + u) + \Phi_{\xi\eta}(-\tau + u)] du, \\ \Phi_{xz}^1(\tau) = \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-au} [\Phi_{\xi\eta}(\tau + u) - \Phi_{\xi\eta}(-\tau + u)] du. \quad (2.3.19)$$

Таким образом, для существования совместных структурных функций (функций корреляции) $x(t)$ и $z(t)$ достаточно существования структурных функций (функций корреляции) процессов $\xi(t)$ и $\eta(t)$.

Для нахождения спектральных плотностей $y(t)$, $z(t)$, а также совместных спектральных плотностей $x(t)$ и $y(t)$ нет необходимости обращаться к (2.3.15)–(2.3.19), поскольку искомые спектральные плотности могут быть получены непосредственно из (2.3.6), (2.3.9). Легко найти:

$$\begin{aligned} S_z(\omega) &= S_\eta(\omega) + b_1 \frac{b_1 S_\xi^0(\omega) - 2a S_{\xi\eta}^0(\omega) - 2\omega S_{\xi\eta}^1(\omega)}{a^2 + \omega^2}, \\ S_y(\omega) &= \frac{1}{\omega^2} S_z(\omega), \\ S_{xy}^0(\omega) &= \frac{1}{\omega^2(a^2 + \omega^2)} \{ \omega^2 S_{\xi\eta}^0(\omega) - a\omega S_{\xi\eta}^1(\omega) \}, \\ S_{xy}^1(\omega) &= \frac{1}{\omega^2(a^2 + \omega^2)} \{ -b_1\omega S_\xi(\omega) + \omega^2 S_{\xi\eta}^1(\omega) + a\omega S_{\xi\eta}^0(\omega) \}. \end{aligned} \quad (2.3.20)$$

Совместные спектральные плотности для $x(t)$ и $z(t)$ нетрудно получить из (2.3.18) или (2.3.19):

$$\begin{aligned} S_{xz}^0(\omega) &= \frac{-b_1 S_\xi(\omega) + a S_{\xi\eta}^0(\omega) + \omega S_{\xi\eta}^1(\omega)}{a^2 + \omega^2}, \\ S_{xz}^1(\omega) &= \frac{a S_{\xi\eta}^1(\omega) - \omega S_{\xi\eta}^0(\omega)}{a^2 + \omega^2}. \end{aligned} \quad (2.3.21)$$

Пример 2.3.2. Если теперь вновь обратиться к примеру 2.3.1, то нетрудно найти для $x(t)$ и $z(t)$ следующие функции корреляции и спектральные плотности ($\tau > 0$):

$$\begin{aligned} \Phi_z(\tau) &= b_1^2 \frac{D_1}{2a} e^{-a\tau} - b_1 D_{12} e^{-a\tau} + D_2 \delta(\tau), \quad S_z(\omega) = \frac{D_2}{2\pi} + b_1 \frac{b_1 D_1 - 2a D_{12}}{2\pi(a^2 + \omega^2)}, \\ \Phi_{xz}^0(\tau) &= \left[-b_1 \frac{D_1}{2a} + \frac{1}{2} D_{12} \right] e^{-a\tau}, \quad S_{xz}^0(\omega) = \frac{-b_1 D_1 + a D_{12}}{2\pi(a^2 + \omega^2)}, \\ \Phi_{xz}^1(\tau) &= -\frac{1}{2} D_{12} e^{-a\tau}, \quad S_{xz}^1(\omega) = -\frac{\omega D_{12}}{2\pi(a^2 + \omega^2)}. \end{aligned} \quad (2.3.22)$$

4. Рассмотрим теперь тот частный случай исходной системы двух дифференциальных уравнений первого порядка, когда $b \neq 0$:

$$\frac{dx}{dt} = by + \xi, \quad \frac{dy}{dt} = -a_1 y - b_1 x + \eta. \quad (2.3.23)$$

Здесь $a_1 > 0$, $bb_1 > 0$, $\xi = \xi(t)$, $\eta = \eta(t)$ — стационарные случайные процессы.

Из (2.3.23) нетрудно найти следующие дифференциальные уравнения для x и y :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + bb_1 x &= \frac{d\xi}{dt} + a_1 \xi + b\eta \equiv \xi_1, \\ \frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + bb_1 y &= \frac{d\eta}{dt} - b_1 \eta \equiv \eta_1. \end{aligned} \quad (2.3.24)$$

Характеристическое уравнение этой системы имеет вид

$$\lambda^2 + a_1 \lambda + bb_1 = 0. \quad (2.3.25)$$

Его корни, равные $-\lambda_{1,2} = -\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - bb_1}$, в силу $a_1 > 0$, $bb_1 > 0$ всегда имеют отрицательную вещественную часть и могут быть вещественными или комплексно-сопряженными. Рассмотрим сначала случай вещественных корней $-\lambda_1$ и $-\lambda_2$. В этом случае установившиеся значения для $x(t)$ и $y(t)$ (для t такого, что $\min\{\lambda_1, \lambda_2\}t \gg 1$) принимают вид (см. (IV.6))

$$\frac{x(t)}{y(t)} = \frac{1}{(\lambda_2 - \lambda_1)} \int_0^\infty [e^{-\lambda_1 u} - e^{-\lambda_2 u}] \frac{\xi_1(t-u)}{\eta_1(t-u)} du. \quad (2.3.26)$$

Отсюда нетрудно получить формулы для функций корреляции $x(t)$ и $y(t)$:

$$\begin{aligned} \frac{\Phi_x(\tau)}{\Phi_y(\tau)} &= \frac{1}{(\lambda_2 - \lambda_1)^2} \int_0^\infty \int_0^\infty [e^{-\lambda_1 u} - e^{-\lambda_2 u}] \times \\ &\times [e^{-\lambda_1 v} - e^{-\lambda_2 v}] \frac{\Phi_{\xi_1}(\tau + u - v)}{\Phi_{\eta_1}(\tau + u - v)} du dv. \end{aligned} \quad (2.3.27)$$

Используя формулы (2.1.13)–(2.1.16), находим связь функций корреляций, входящих в (2.3.27), с функциями корреляции процессов $\xi(t)$ и $\eta(t)$:

$$\begin{aligned} \Phi_{\xi_1}(\tau) &= a_1^2 \Phi_\xi(\tau) - \frac{d^2 \Phi_\xi(\tau)}{d\tau^2} + b^2 \Phi_\eta(\tau) + 2a_1 b \Phi_{\xi\eta}^0(\tau) - 2b \frac{d\Phi_{\xi\eta}^1(\tau)}{d\tau}, \\ \Phi_{\eta_1}(\tau) &= b_1^2 \Phi_\eta(\tau) - \frac{d^2 \Phi_\eta(\tau)}{d\tau^2} - 2b_1 \frac{d\Phi_{\xi\eta}^1(\tau)}{d\tau}, \\ \Phi_{\xi_1\eta_1}^0(\tau) &= -a_1 b_1 \Phi_\xi(\tau) - b b_1 \Phi_{\xi\eta}^0(\tau) + a_1 \frac{d\Phi_{\xi\eta}^1(\tau)}{d\tau} - \frac{d^2 \Phi_{\xi\eta}^0(\tau)}{d\tau^2}, \\ \Phi_{\xi_1\eta_1}^1(\tau) &= b b_1 \Phi_{\xi\eta}^1(\tau) + b_1 \frac{d\Phi_\xi(\tau)}{d\tau} + b \frac{d\Phi_\eta(\tau)}{d\tau} + a_1 \frac{d\Phi_{\xi\eta}^0(\tau)}{d\tau} - \frac{d^2 \Phi_{\xi\eta}^1(\tau)}{d\tau^2}. \end{aligned} \quad (2.3.28)$$

Для нахождения спектральных плотностей $x(t)$ и $y(t)$ проще всего воспользоваться разложением характеристического уравнения на множители

$$\lambda^2 + a_1 \lambda + b b_1 = (\lambda + \lambda_1)(\lambda + \lambda_2).$$

Теперь нетрудно получить спектральную плотность левой части уравнений (2.3.24), равную

$$(\omega^2 + \lambda_1^2)(\omega^2 + \lambda_2^2) S_x(\omega),$$

$$S_y(\omega).$$

Тем самым имеем

$$S_x(\omega) = \frac{S_{\xi_1}(\omega)}{(\omega^2 + \lambda_1^2)(\omega^2 + \lambda_2^2)}, \quad S_y(\omega) = \frac{S_{\eta_1}(\omega)}{(\omega^2 + \lambda_1^2)(\omega^2 + \lambda_2^2)}, \quad (2.3.29)$$

где на основании формул (2.1.17) — (2.1.20)

$$\begin{aligned} S_{\xi_1}(\omega) &= (a_1^2 + \omega^2) S_{\xi}(\omega) + b^2 S_{\eta}(\omega) + 2a_1 b S_{\xi\eta}^0(\omega) - 2b\omega S_{\xi\eta}^1(\omega), \\ S_{\eta_1}(\omega) &= b_1^2 S_{\xi}(\omega) + \omega^2 S_{\eta}(\omega) - 2b_1\omega S_{\xi\eta}^1(\omega). \end{aligned} \quad (2.3.30)$$

Поскольку формула для $\Phi_{xy}(\tau)$ по структуре не отличается от формулы для $\Phi_x(\tau)$ или $\Phi_y(\tau)$, нетрудно видеть, что

$$S_{xy}^1(\omega) = \frac{S_{\xi_1\eta_1}^1(\omega)}{(\omega^2 + \lambda_1^2)(\omega^2 + \lambda_2^2)}, \quad S_{xy}^0(\omega) = \frac{S_{\xi_1\eta_1}^0(\omega)}{(\omega^2 + \lambda_1^2)(\omega^2 + \lambda_2^2)}, \quad (2.3.31)$$

где

$$\begin{aligned} S_{\xi_1\eta_1}^0(\omega) &= -a_1 b_1 S_{\xi}(\omega) + [\omega^2 - b b_1] S_{\xi\eta}^0(\omega) + a_1 \omega S_{\xi\eta}^1(\omega), \\ S_{\xi_1\eta_1}^1(\omega) &= -b_1 \omega S_{\xi}(\omega) - b \omega S_{\eta}(\omega) + \\ &\quad + [\omega^2 + b b_1] S_{\xi\eta}^1(\omega) - a_1 \omega S_{\xi\eta}^0(\omega). \end{aligned} \quad (2.3.32)$$

Обратимся теперь к случаю комплексных корней, когда $a_1^2 < 4b b_1$. Обозначим $-\lambda_{1,2} = -m \pm jn$. Легко видеть, что формулы (2.3.26) и (2.3.27) остаются справедливыми и в этих случаях. Так как разложение характеристического уравнения принимает вид

$$\lambda^2 + a_1 \lambda + b_1 b = (\lambda + m - jn)(\lambda + m + jn),$$

то спектральная плотность левой части уравнений (2.3.24) равна

$$[m^2 + (\omega - n)^2] [m^2 + (\omega + n)^2] \begin{matrix} S_x(\omega), \\ S_y(\omega). \end{matrix}$$

Следовательно, искомые спектральные плотности равны

$$\begin{aligned} S_x(\omega) &= \frac{S_{\xi_1}(\omega)}{[m^2 + (\omega - n)^2] [m^2 + (\omega + n)^2]}, \\ S_y(\omega) &= \frac{S_{\eta_1}(\omega)}{[m^2 + (\omega - n)^2] [m^2 + (\omega + n)^2]}, \\ S_{xy}^0(\omega) &= \frac{S_{\xi_1\eta_1}^0(\omega)}{[m^2 + (\omega - n)^2] [m^2 + (\omega + n)^2]}, \\ S_{xy}^1(\omega) &= \frac{S_{\xi_1\eta_1}^1(\omega)}{[m^2 + (\omega - n)^2] [m^2 + (\omega + n)^2]}. \end{aligned} \quad (2.3.33)$$

§ 2.4. Система трех уравнений первого порядка

1. Рассмотрим общий случай линейной системы трех стохастических дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= -b_{11}x_1 - b_{12}x_2 - b_{13}x_3 + \xi_1, \\ \frac{dx_2}{dt} &= -b_{21}x_1 - b_{22}x_2 - b_{23}x_3 + \xi_2, \\ \frac{dx_3}{dt} &= -b_{31}x_1 - b_{32}x_2 - b_{33}x_3 + \xi_3,\end{aligned}\quad (2.4.1)$$

где $x_1 = x_1(t)$, $x_2 = x_2(t)$, $x_3 = x_3(t)$ — «выходные» функции, а $\xi_1 = \xi_1(t)$, $\xi_2 = \xi_2(t)$, $\xi_3 = \xi_3(t)$ — «входные» стационарные случайные процессы, в общем случае статистически взаимозависимые, с заданными функциями корреляции и спектральными плотностями.

Будем также полагать, что коэффициенты системы b_{ij} таковы, что при $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 0$ собственные решения системы (2.4.1) затухают, и, как всегда, уделим внимание вынужденному решению, порождаемому случайными процессами $\xi_1(t)$, $\xi_2(t)$, $\xi_3(t)$.

Действуя известными методами, находим следующий вид дифференциальных уравнений для $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$:

$$Lx_i = F_i \quad (i = 1, 2, 3). \quad (2.4.2)$$

Здесь L — линейный дифференциальный оператор, равный

$$L = \frac{d^3}{dt^3} + (b_{11} + b_{22} + b_{33}) \frac{d^2}{dt^2} + (B_{11} + B_{22} + B_{33}) \frac{d}{dt} + \Delta, \quad (2.4.3)$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}, \quad (2.4.4)$$

а B_{ij} есть алгебраические дополнения элементов b_{ij} определителя Δ .

Функции F_i , стоящие в правой части уравнений (2.4.2), являются случайными функциями, связанными с ξ_1 , ξ_2 , ξ_3 следующим образом:

$$\begin{aligned}F_1 = F_1(t) &= \frac{d^2 \xi_1}{dt^2} + \frac{d}{dt} [(b_{22} + b_{33}) \xi_1 - b_{12} \xi_2 - b_{13} \xi_3] + \\ &\quad + B_{11} \xi_1 + B_{21} \xi_2 + B_{31} \xi_3, \\ F_2 = F_2(t) &= \frac{d^2 \xi_2}{dt^2} + \frac{d}{dt} [-b_{21} \xi_1 + (b_{11} + b_{33}) \xi_2 - b_{23} \xi_3] + \\ &\quad + B_{12} \xi_1 + B_{22} \xi_2 + B_{32} \xi_3, \\ F_3 = F_3(t) &= \frac{d^2 \xi_3}{dt^2} + \frac{d}{dt} [-b_{31} \xi_1 - b_{32} \xi_2 + (b_{11} + b_{22}) \xi_3] + \\ &\quad + B_{13} \xi_1 + B_{23} \xi_2 + B_{33} \xi_3.\end{aligned}\quad (2.4.5)$$

Характеристическое уравнение, соответствующее (2.4.2), имеет вид

$$\lambda^3 + (b_{11} + b_{22} + b_{33})\lambda^2 + (B_{11} + B_{22} + B_{33})\lambda + \Delta = 0.$$

По условию затухания собственных решений все корни этого уравнения должны иметь отрицательные вещественные части. Это будет выполнено, если

$$\begin{aligned} b_{11} + b_{22} + b_{33} > 0, \quad B_{11} + B_{22} + B_{33} > 0, \\ \Delta > 0, \quad (b_{11} + b_{22} + b_{33})(B_{11} + B_{22} + B_{33}) - \Delta > 0. \end{aligned} \quad (2.4.6)$$

Будем считать эти неравенства выполненными.

2. Вычисление функций корреляции $x_i(t)$ и их выражение через функции корреляции для $\xi_i(t)$ является чрезвычайно громоздким, хотя и принципиально простым, делом. Поэтому мы ограничимся только тем, что укажем путь нахождения $\Phi_{x_i x_j}(\tau)$.

Пусть корни характеристического уравнения вещественны, отрицательны, различны и равны $-\lambda_1, -\lambda_2, -\lambda_3$. Тогда на основании (IV.8)

$$\begin{aligned} x_i(t) = \frac{1}{\Delta} \int_0^{\infty} [(\lambda_3 - \lambda_2)e^{-\lambda_1 u} + (\lambda_1 - \lambda_3)e^{-\lambda_2 u} + (\lambda_2 - \lambda_1)e^{-\lambda_3 u}] \times \\ \times F_i(t-u) du \quad (i=1, 2, 3). \end{aligned} \quad (2.4.7)$$

Используя эти выражения для $x_i(t)$, путем перемножения, усреднения и интегрирования можно найти корреляционные функции $\Phi_{x_i x_j}(\tau)$, которые окажутся выраженными через $\Phi_{F_i F_j}(\tau)$. Последние на основании (2.4.5) с помощью формул § 2.1 можно выразить, наконец, через функции корреляции $\Phi_{\xi_i \xi_j}(\tau)$.

Если один корень характеристического уравнения веществен, отрицателен и равен $-\lambda_1$, а два других корня комплексно сопряжены и равны $-m \pm jn$, то на основании (IV.9)

$$\begin{aligned} x_i(t) = \frac{1}{\Delta_1} \int_0^{\infty} \left[e^{-\lambda_1 u} + e^{-mu} \left(\frac{\lambda_1 - m}{n} \sin nu - \cos nu \right) \right] F_i(t-u) du \\ (i=1, 2, 3), \end{aligned} \quad (2.4.8)$$

где $\Delta_1 = \lambda_1^2 + m^2 + n^2 - 2m\lambda_1$. В остальном процедура вычисления функций корреляций $\Phi_{x_i x_j}(\tau)$ остается прежней.

3. Гораздо проще найти спектральные плотности для исследуемых функций $x_i(t)$. Для случая трех вещественных отрицательных корней характеристического уравнения

$$\begin{aligned} \lambda^3 + (b_{11} + b_{22} + b_{33})\lambda^2 + (B_{11} + B_{22} + B_{33})\lambda + \Delta = \\ = (\lambda + \lambda_1)(\lambda + \lambda_2)(\lambda + \lambda_3) \end{aligned}$$

спектральное преобразование уравнений $Lx_i = F_i$ принимает вид

$$(\omega^2 + \lambda_1^2)(\omega^2 + \lambda_2^2)(\omega^2 + \lambda_3^2) S_{x_i}(\omega) = S_{F_i}(\omega).$$

Отсюда сразу же могут быть написаны значения $S_{x_i}(\omega)$:

$$S_{x_i}(\omega) = \frac{S_{F_i}(\omega)}{(\omega^2 + \lambda_1^2)(\omega^2 + \lambda_2^2)(\omega^2 + \lambda_3^2)}. \quad (2.4.9)$$

Спектральные плотности правых частей уравнений (2.4.2) с помощью формул § 2.1 могут быть выражены через $S_{\xi_i \xi_j}(\omega)$. Для $F_1(t)$ имеем, например,

$$\begin{aligned} S_{F_1}(\omega) = & [(B_{11} - \omega^2)^2 + (b_{22} + b_{33})^2 \omega^2] S_{\xi_1}(\omega) + [B_{21}^2 + b_{12}^2 \omega^2] S_{\xi_2}(\omega) + \\ & + [B_{31}^2 + b_{13}^2 \omega^2] S_{\xi_3}(\omega) + 2 \{B_{11} B_{21} - [b_{12}(b_{22} + b_{33}) + B_{21}] \omega^2\} S_{\xi_1 \xi_2}^0(\omega) + \\ & + 2 \{[-B_{11} b_{12} - B_{21}(b_{22} + b_{33})] \omega + b_{12} \omega^3\} S_{\xi_1 \xi_2}^1(\omega) + \\ & + 2 \{B_{11} B_{31} - [b_{13}(b_{22} + b_{33}) + B_{31}] \omega^2\} S_{\xi_1 \xi_3}^0(\omega) + \\ & + 2 \{[-B_{11} b_{13} - B_{31}(b_{22} + b_{33})] \omega + b_{13} \omega^3\} S_{\xi_1 \xi_3}^1(\omega) + \\ & + 2 [B_{21} B_{31} - b_{12} b_{13} \omega^2] S_{\xi_2 \xi_3}^0(\omega) + 2 (-b_{13} B_{21} + b_{12} B_{31}) \omega S_{\xi_2 \xi_3}^1(\omega). \end{aligned} \quad (2.4.10)$$

$S_{F_2}(\omega)$ и $S_{F_3}(\omega)$ получаются из (2.4.10) заменой

$$\xi_1, \xi_2, \xi_3; b_{22} + b_{33}, b_{12}, b_{13}; B_{11}, B_{21}, B_{31}$$

соответственно на

$$\xi_2, \xi_1, \xi_3; b_{11} + b_{33}, b_{21}, b_{23}; B_{22}, B_{12}, B_{32}$$

и на

$$\xi_3, \xi_2, \xi_1; b_{11} + b_{22}, b_{32}, b_{31}; B_{33}, B_{23}, B_{13}.$$

Аналогично находятся совместные спектральные плотности

$$S_{x_i x_j}^{0,1}(\omega) = \frac{S_{F_i F_j}^{0,1}(\omega)}{(\omega^2 + \lambda_1^2)(\omega^2 + \lambda_2^2)(\omega^2 + \lambda_3^2)}, \quad (2.4.11)$$

где $S_{F_i F_j}^0(\omega)$ и $S_{F_i F_j}^1(\omega)$ находятся через $S_{\xi_i \xi_j}^0(\omega)$, $S_{\xi_i \xi_j}^1(\omega)$. Для пары комплексно-сопряженных корней

$$\begin{aligned} \lambda^3 + (b_{11} + b_{22} + b_{33}) \lambda^2 + (B_{11} + B_{22} + B_{33}) \lambda + \Delta = \\ = (\lambda + \lambda_1)(\lambda + m - jn)(\lambda + m + jn) \end{aligned}$$

и спектральная плотность левой части (2.4.2) равна

$$(\omega^2 + \lambda_1^2) [m^2 + (\omega - n)^2] [m^2 + (\omega + n)^2] S_{x_i}(\omega).$$

Отсюда спектральные плотности функций $x_i(t)$ равны

$$S_{x_i}(\omega) = \frac{S_{F_i}^0(\omega)}{(\omega^2 + \lambda_1^2)[m^2 + (\omega - n)^2][m^2 + (\omega + n)^2]}, \quad (2.4.12)$$

$$S_{x_i x_j}^{0,1}(\omega) = \frac{S_{F_i F_j}^{0,1}(\omega)}{(\omega^2 + \lambda_1^2)[m^2 + (\omega - n)^2][m^2 + (\omega + n)^2]}. \quad (2.4.13)$$

Выражение спектральных плотностей $S_{F_i F_j}^{0,1}(\omega)$ через спектральные плотности случайных функций ξ_1, ξ_2, ξ_3 в общем случае приводит к очень громоздким формулам. Однако для случая $S_{\xi_1 \xi_2}^1(\omega) \equiv S_{\xi_1 \xi_3}^1(\omega) \equiv S_{\xi_2 \xi_3}^1(\omega) \equiv 0$ эти формулы упрощаются и, например, для $S_{F_1 F_2}^0(\omega)$ и $S_{F_1 F_2}^1(\omega)$ принимают вид:

$$\begin{aligned} S_{F_1 F_2}^0(\omega) = & \{B_{11}B_{12} - [(b_{22} + b_{33})b_{21} + B_{12}]\omega^2\} S_{\xi_1}(\omega) + \\ & + \{B_{21}B_{22} - [(b_{11} + b_{33})b_{12} + B_{21}]\omega^2\} S_{\xi_2}(\omega) + \\ & + [B_{31}B_{32} + b_{13}b_{23}\omega^2] S_{\xi_3}(\omega) + \{B_{11}B_{22} + B_{21}B_{12} + \\ & + [(b_{22} + b_{33})(b_{11} + b_{33}) + b_{12}b_{21} - B_{11} - B_{22}]\omega^2 + \omega^4\} S_{\xi_1 \xi_2}^0(\omega) + \\ & + \{B_{11}B_{32} + B_{31}B_{12} + [b_{13}b_{21} - b_{23}(b_{22} + b_{33}) + B_{32}]\omega^2\} S_{\xi_1 \xi_3}^0(\omega) + \\ & + \{B_{21}B_{32} + B_{31}B_{22} + [b_{12}b_{23} - b_{13}(b_{11} + b_{33}) - B_{21}]\omega^2\} S_{\xi_2 \xi_3}^0(\omega). \end{aligned} \quad (2.4.14)$$

$$\begin{aligned} S_{F_1 F_2}^1(\omega) = & \{[B_{11}b_{21} + B_{12}(b_{22} + b_{33})]\omega - b_{21}\omega^3\} S_{\xi_1}(\omega) + \\ & + \{-[B_{21}(b_{11} + b_{33}) + B_{22}b_{12}]\omega + b_{12}\omega^3\} S_{\xi_2}(\omega) + \\ & + (B_{31}b_{23} - B_{32}b_{13})\omega S_{\xi_3}(\omega) + \{[B_{22}(b_{22} + b_{33}) - B_{11}(b_{11} + b_{33}) + \\ & + B_{21}b_{21} - B_{12}b_{12}]\omega + (b_{11} - b_{22})\omega^3\} S_{\xi_1 \xi_2}^0(\omega) + \\ & + \{[B_{11}b_{23} + B_{32}(b_{22} + b_{33}) + B_{31}b_{21} - B_{12}b_{13}]\omega - b_{23}\omega^3\} S_{\xi_1 \xi_3}^0(\omega) + \\ & + \{[B_{21}b_{23} - B_{32}b_{12} - B_{31}(b_{11} + b_{33}) - B_{22}b_{13}]\omega + b_{13}\omega^3\} S_{\xi_2 \xi_3}^0(\omega). \end{aligned} \quad (2.4.15)$$

Спектральные плотности $S_{F_1 F_3}^{0,1}(\omega)$ и $S_{F_2 F_3}^{0,1}(\omega)$ находятся из (2.4.14) и (2.4.15) заменой

$$\xi_1, \xi_2, \xi_3; \quad b_{22} + b_{33}, \quad b_{11} + b_{33}, \quad b_{12}, \quad b_{13}, \quad b_{21}, \quad b_{23};$$

$$B_{11}, \quad B_{21}, \quad B_{31}, \quad B_{12}, \quad B_{22}, \quad B_{32}$$

соответственно на

$$\xi_1, \xi_3, \xi_2; \quad b_{22} + b_{33}, \quad b_{11} + b_{22}, \quad b_{13}, \quad b_{12}, \quad b_{31}, \quad b_{32};$$

$$B_{11}, \quad B_{31}, \quad B_{21}, \quad B_{13}, \quad B_{33}, \quad B_{23}$$

и на

$$\xi_3, \xi_2, \xi_1; \quad b_{11} + b_{22}, \quad b_{11} + b_{33}, \quad b_{32}, \quad b_{31}, \quad b_{23}, \quad b_{21};$$

$$B_{33}, \quad B_{23}, \quad B_{13}, \quad B_{32}, \quad B_{22}, \quad B_{12}.$$

Глава 3

ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ШУМЫ И ФЛУКТУАЦИИ ПАРАМЕТРОВ ЭЛЕМЕНТОВ РАДИОСХЕМ

Источниками флуктуаций амплитуды и фазы колебания автогенератора являются различные электрические шумы и флуктуации, существующие в любых реальных схемах автогенераторов.

К ним относятся естественные шумы — тепловой и дробовой, обязанные соответственно тепловому движению носителей заряда и дискретной природе заряда, и технические шумы — фликкерный шум и флуктуации параметров, обязанные нестабильности электрических параметров элементов радиосхем, таких, например, как сопротивление, емкость, крутизна лампы и т. п.

Разделение шумов на естественные и технические связано с тем, что первые существуют всегда, независимо от способов изготовления, например, сопротивлений или ламп, в то время как величина и характеристики технических флуктуаций в радиоделах существенно зависят от технологии приготовления последних.

В первых параграфах настоящей главы кратко рассматривается физика естественных шумов и приводятся их основные характеристики (см. литературу обзорного типа [17—20]).

Более подробное изложение относится к фликкерным шумам и флуктуациям параметров. Это связано с тем, что литература по этим вопросам представляет большей частью многочисленные и разбросанные журнальные статьи, а систематическое и достаточно полное единое освещение технических флуктуаций практически отсутствует.

§ 3.1. Тепловой шум

1. Тепловой шум представляет собой случайную ЭДС $\mathcal{E}(t)$, существующую между двумя любыми точками проводника и обязанную тепловому, хаотическому движению свободных электронов внутри этого проводника. Тем самым тепловой шум существенно зависит от температуры проводника.

С другой стороны, ЭДС теплового шума должна зависеть также и от активного сопротивления проводника. Это нетрудно понять из следующего. Тепловую ЭДС проводника можно считать своего рода «собственным излучением». На основании закона Кирхгофа излучательная способность тела для определенной частоты излучения прямо пропорциональна его поглощательной способности для той же частоты. Как известно, при приложении к проводнику переменного напряжения какой-либо частоты в нем начинает поглощаться мощность, и ее величина пропорциональна сопротивлению проводника r . Следовательно, мощность теплового шума должна быть также прямо пропорциональна r .

Поглощение мощности проводником происходит практически на всех звуковых и радиочастотах от постоянного тока ($\omega=0$) до миллиметровых волн. Тем самым на основании закона Кирхгофа спектр теплового шума должен также простирается от $\omega=0$ до миллиметрового диапазона. Поскольку далее поглощательная способность проводника для широкого диапазона частот зависит только от r , но не от частоты, спектральная плотность теплового шума не должна зависеть непосредственно от частоты (зависимость от ω может входить только через зависимость r от ω) и при постоянном значении r иметь одно и то же значение для всех частот. Следовательно, тепловой шум должен быть белым шумом.

Эти рассуждения носят общий термодинамический характер и существует возможность термодинамического вывода величины спектральной плотности мощности теплового шума — спектральной плотности $S_g(\omega)$ (см., например, [19, 21—24]).

Рассматривая тепловое движение электронов внутри проводника, можно привести и кинетический вывод спектральной плотности

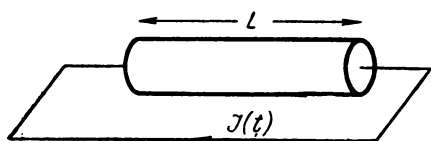


Рис. 3.1.

мощности теплового шума. Этот вывод представляется тем более ценным, что он дает возможность учета эффекта уменьшения спектральной плотности $S_T(\omega) \equiv S_g(\omega)$ на высоких частотах (что наблюдается

в эксперименте), а также и оценки порядка тех частот, на которых спектральная плотность начинает уменьшаться.

2. Приведем вывод для $S_T(\omega)$, основанный на классическом кинетическом представлении о движении электронов внутри проводника. Рассмотрим проводник цилиндрической формы, замкнутый «накоротко» внешней цепью (рис. 3.1). В этом проводнике электроны движутся хаотически по различным направлениям.

Анализируя случайный ток $\mathcal{J}(t)$, протекающий по внешней цепи благодаря движению электронов в проводнике, достаточно принять во внимание только одну продольную компоненту скорости электронов, которую обозначим v .

Поскольку к проводнику не приложено никакого внешнего электрического поля (и, следовательно, регулярный ток через проводник отсутствует), можно считать, что скорость движения отдельного электрона внутри проводника является постоянной между моментами его столкновений с ионами кристаллической решетки проводника. После столкновения скорость электрона приобретает другое значение, независимое от значения скорости до столкновения. Таким образом, скорость движения электрона после k -го столкновения v_k является случайной величиной со средним нулевым значением и статистически не зависит от v_l для $l \neq k$. Время между последующими столкновениями (в течение которого электрон имеет постоянную скорость) есть время свободного пробега τ_0 , и оно является также случайным. Будем полагать, что известно вероятностное распределение τ_0 .

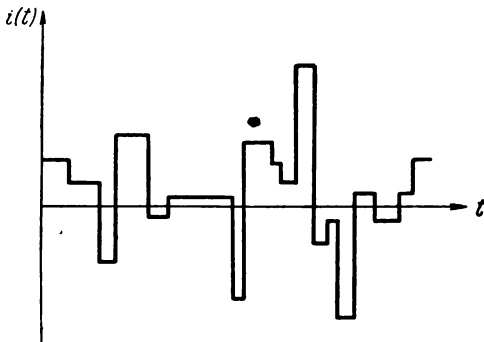


Рис. 3.2

Полный ток $\mathcal{J}(t)$ во внешней цепи есть суперпозиция статистически независимых токов $i_n(t)$, связанных с движением отдельных электронов:

$$\mathcal{J}(t) = \sum_{n=1}^M i_n(t).$$

Здесь M — полное число свободных электронов в проводнике.

Во время свободного пробега электрон, имеющий скорость v , вызывает во внешней цепи наведенный ток, равный ev/L , где e — заряд электрона, L — длина проводника. Тем самым, рассматривая движение одного электрона в проводнике для вызываемого им тока во внешней цепи, имеем следующее выражение:

$$i(t) = \sum_k \frac{e}{L} v_k(t - t_k),$$

где t_k — момент k -го столкновения. Вид этой функции показан на рис. 3.2.

Случайную скорость движения электрона $v_k(t)$ можно записать как $v_k(t) = v_k H(t)$, где

$$H(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & 0 < t < \tau_0, \\ 0, & t > \tau_0. \end{cases}$$

Случайная функция $v_k(t)$ (она случайна потому, что ее «амплитуда» v_k и длительность τ_0 суть случайные величины) принадлежит к первой группе сигналов. Найдем ее функцию корреляции первого рода $\Psi_v(\tau)$, равную, согласно (1.3.7),

$$\Psi_v(\tau) = \left\langle \int_{-\infty}^{+\infty} v_k(t) v_k(t + \tau) dt \right\rangle.$$

Совершая интегрирование, нетрудно найти, что (для $\tau > 0$)

$$\Psi_v(\tau) = \langle v_k^2 \left\{ \begin{array}{ll} \tau_0 - \tau, & \tau < \tau_0 \\ 0, & \tau > \tau_0 \end{array} \right\} \rangle.$$

Поскольку скорость и время свободного пробега можно считать статистически независимыми величинами, .

$$\Psi_v(\tau) = \langle v_k^2 \rangle \int_{\tau}^{\infty} (\tau_0 - \tau) W(\tau_0) d\tau_0, \quad \tau > 0,$$

где $W(\tau_0)$ — плотность вероятности времени свободного пробега.

При рассмотрении движения отдельного электрона естественно принять, что вероятность n его столкновений за время t подчиняется закону Пуассона и равна

$$P(n, t) = \frac{(\varepsilon t)^n}{n!} e^{-\varepsilon t},$$

где ε — среднее число столкновений в единицу времени. Тогда плотность распределения вероятностей для времени свободного пробега τ_0 будет равна

$$W(\tau_0) = \varepsilon e^{-\varepsilon \tau_0}.$$

Средний квадрат скорости теплового движения электрона можно определить из известного закона о равном распределении энергии по степеням свободы. Поскольку мы учитываем лишь одну компоненту скорости, то, согласно этому закону,

$$\frac{m_e \langle v^2 \rangle}{2} = \frac{kT}{2},$$

где m_e — масса электрона, k — постоянная Больцмана, T — абсолютная температура.

Таким образом, на основании вышесказанного, получаем

$$\Psi_v(\tau) = \frac{kT}{m_e \epsilon} e^{-\epsilon |\tau|}.$$

Функция корреляции для тока $i(t)$, принадлежащего ко второй группе сигналов, равна, на основании (1.4.9),

$$\Phi_i(\tau) = \frac{e^2}{L^2} \epsilon \Psi_v(\tau) = \frac{e^2 kT}{L^2 m_e} e^{-\epsilon |\tau|}.$$

Для полного тока $\mathcal{J}(t)$, вследствие некогерентности движения различных электронов, имеем

$$\Phi_{\mathcal{J}}(\tau) = M \Phi_i(\tau) = \frac{M e^2 kT}{L^2 m_e} e^{-\epsilon |\tau|}.$$

Можно показать, что активное сопротивление рассмотренного проводника равно

$$r = \frac{m_e \epsilon L^2}{e^2 M}.$$

В таком случае

$$\Phi_{\mathcal{J}}(\tau) = \epsilon r^{-1} kT e^{-\epsilon |\tau|}.$$

Мы определили функцию корреляции внешнего теплового флуктуационного тока $\mathcal{J}(t)$. Для нахождения функции корреляции тепловой ЭДС рассмотрим эквивалентную схему короткозамкнутого проводника, показанную на рис. 3.3. Вследствие $\mathcal{J}(t) = \mathcal{E}(t)/r$ имеем $\Phi_{\mathcal{E}}(\tau) = r^2 \Phi_{\mathcal{J}}(\tau)$. Таким образом,

$$\Phi_{\mathcal{E}}(\tau) \equiv \Phi_{\tau}(\tau) = \epsilon r kT e^{-\epsilon |\tau|}. \quad (3.1.1)$$

Спектральная плотность теплового шума равна отсюда

$$S_{\mathcal{E}}(\omega) \equiv S_{\tau}(\omega) = \frac{1}{\pi} r kT \frac{\epsilon^2}{\epsilon^2 + \omega^2}. \quad (3.1.2)$$

Из полученного выражения следует, что постоянство спектральной плотности теплового шума имеет место только для частот $\omega \ll \epsilon$, на которых

$$S_{\tau}(\omega) = \frac{1}{\pi} r kT. \quad (3.1.3)$$

Эта формула носит название формулы Найквиста *).

Оценки показывают, что среднее число столкновений электронов с ионами решетки проводника за одну секунду по

*) Точнее говоря, формула Найквиста относится не к спектральной плотности $S_{\mathcal{E}}(\omega)$, а к «физической» спектральной плотности $\overline{\mathcal{E}_f^2} = 4\pi S_{\mathcal{E}}(2\pi f) = 4kT/r$.

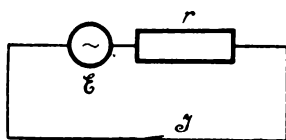


Рис. 3.3.

порядку величины равно $\epsilon \gg 10^{12}$. Частота, соответствующая значению $\epsilon = 10^{12}$, принадлежит миллиметровым волнам. Следовательно, для всех частот, вплоть до сантиметровых волн, можно пользоваться формулой (3.1.3) и тепловой шум считать белым шумом.

Функция корреляции, соответствующая спектральной плотности (3.1.3), может быть получена из (3.1.1) при предельном переходе $\epsilon \rightarrow \infty$ и имеет вид

$$\Phi_{\tau}(\tau) = 2rkT\delta(\tau). \quad (3.1.4)$$

Практически спектральная плотность теплового шума реального проводника (сопротивления) начинает падать с частотой значительно раньше. Это связано с тем, что активное сопротивление такого проводника зависит от частоты $r = r(\omega)$, уменьшаясь с возрастанием ω , хотя бы вследствие шунтирующего действия собственной емкости проводника. Тем самым это спадающее $S_{\tau}(\omega)$ не противоречит формуле (3.1.3).

Уменьшение спектральной плотности теплового шума с возрастанием частоты, согласно (3.1.2), приводит к тому, что полная мощность теплового шума является конечной величиной, равной

$$S_{\tau} = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{\tau}(\omega) d\omega = \Phi_{\tau}(0) = \epsilon rkT. \quad (3.1.5)$$

При термодинамическом выводе формулы Найквиста сразу же получают формулу (3.1.3). Если ее считать справедливой для всех частот ω , то полная мощность теплового шума S_{τ} становится бесконечно большой величиной. В этом недостаток термодинамического подхода к рассмотрению спектра флуктуаций теплового шума.

3. Формула (3.1.2) была получена классическим путем, без привлечения квантовомеханических представлений о движении электрона внутри проводника. Это справедливо до тех пор, пока соблюдается условие $hf \ll kT$, где h — постоянная Планка. Для комнатной температуры это условие справедливо для всех частот, много меньших $kT/h = 6,06 \cdot 10^{13}$ гц.

Однако при низких температурах проводника на миллиметровых волнах уже нельзя пользоваться формулой (3.1.2) и необходимо учитывать квантовомеханические эффекты. Этот учет приводит к следующей формуле спектральной плотности теплового шума:

$$S_{\tau}(\omega) = \frac{1}{\pi} r \frac{\hbar \omega}{e^{\frac{\hbar \omega}{kT}} - 1}, \quad \hbar = \frac{h}{2\pi}.$$

При $\hbar\omega \ll kT$ эта формула, как и должно быть, переходит в формулу Найквиста.

Легко видеть, что здесь $S_T(\omega)$ также уменьшается с возрастанием ω , но по сравнению с (3.1.2) это уменьшение идет более резко. Полная мощность теплового шума в этом случае равна

$$S_T = \frac{2r}{\pi} \int_0^\infty \frac{\hbar\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1} d\omega = \frac{2\pi^2}{3} r kT \frac{kT}{h}.$$

Эта формула будет эквивалентна формуле (3.1.5), если в последней положить $\epsilon = \frac{2\pi^2}{3} \frac{kT}{h}$. Для комнатной температуры это дает значение $\epsilon = 4 \cdot 10^{14}$. Таково эквивалентное число соударений электронов с ионами кристаллической решетки проводника за одну секунду.

§ 3.2. Дробовой шум

1. Дробовой шум, существующий в электронных лампах, представляет собой флуктуации протекающего через них тока, связанные с дискретной природой электрического тока и с нерегулярностью последовательного вылета электронов с катода лампы [25].

В анодной цепи электронного прибора во время пролета электрона от катода к аноду возникает импульс наведенного тока, который представляет собой элементарный импульс анодного тока. Сумма этих импульсов, образующая анодный ток лампы, имеет постоянную составляющую — среднее значение анодного тока I_0 и флуктуационную часть — собственно дробовой шум $i_{др}(t)$.

Движение электрона в промежутке катод — анод зависит от существующего там электрического и магнитного поля. Электрическое поле в свою очередь зависит не только от напряжений на электродах, но и от наличия пространственного заряда между катодом и анодом.

Подробный анализ дробового шума будет проведен лишь для простейшего электронного прибора — плоского диода, работающего в режиме так называемого температурного ограничения. В этом режиме все электроны, покидающие катод, забираются анодом; при этом пространственный заряд в промежутке катод — анод мал, так что им можно пренебречь, а электрическое поле можно считать постоянным. Этот режим называется температурно ограниченным потому, что при этих условиях анодный ток зависит только от эмиссионной способности катода, которая ограничивается его температурой. Все реальные электронные

вакуумные приборы работают, как правило, однако, в другом режиме, в режиме ограничения пространственным зарядом, когда в промежутке катод — анод имеется значительный пространственный заряд, и анодный ток лампы определяется именно им. Электрическое поле в какой-либо точке при этом существенно зависит от положения рассматриваемой точки между анодом и катодом. В этом случае вблизи катода имеется даже

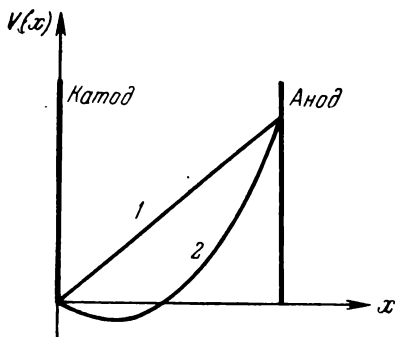


Рис. 3.4.

область обратного по знаку электрического поля (создаваемая пространственным зарядом), которая тормозит вылетающие из катода электроны. На рис. 3.4 показано распределение потенциала в плоском диоде для случаев температурного ограничения (1) и ограничения пространственным зарядом (2). Дробовой шум, как показывает строгое рассмотрение, сильно зависит от наличия пространственного заряда [20]. Тем не менее мы рассмотрим расчет дробового шума лишь для

режима температурного ограничения, а затем введем поправку, учитывающую пространственный заряд.

2. Рассмотрим движение отдельного электрона в промежутке катод — анод, описываемое следующим уравнением:

$$m_e \frac{d^2 x}{dt^2} = e \frac{dV(x)}{dx} = \frac{eV_a}{l}.$$

Здесь $V(x)$ — потенциал электрического поля, V_a — анодное напряжение, l — расстояние между анодом и катодом. Пренебрежем начальной скоростью электрона. Тогда его скорость равна

$$v = \frac{eV_a}{m_e l} t.$$

Закон движения электрона примет вид

$$x = \frac{eV_a}{2m_e l} t^2.$$

Введем величину τ_0 — время пролета отдельным электроном промежутка анод — катод. Оно определяется из условия $x=l$, $t=\tau_0$ и равно

$$\tau_0 = l \sqrt{\frac{2m_e}{eV_a}}.$$

Во внешней цепи импульс наведенного тока равен

$$i(t) = \frac{ve}{l} = \begin{cases} \frac{2e}{\tau_0} t, & 0 \leq t \leq \tau_0, \\ 0, & \tau_0 < t < 0. \end{cases}$$

Вид этого импульса показан на рис. 3.5.

Полный ток во внешней цепи представляет собой суперпозицию случайно приходящих импульсов $i(t)$:

$$\mathcal{I}(t) = \sum_k i(t - t_k).$$

Здесь t_k — время возникновения k -го импульса. Среднее значение тока равно (см. (1.4.7))

$$I_0 = \langle \mathcal{I}(t) \rangle = \varepsilon \int_0^{\tau_0} i(t) dt = \varepsilon e,$$

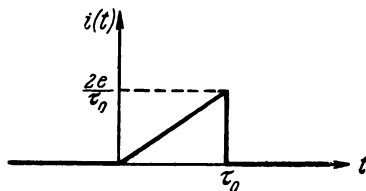


Рис. 3.5.

где ε — среднее число электронов, вылетающих из катода в единицу времени.

Рассмотрим теперь флуктуации тока, которые и являются дробовым шумом

$$i_{\text{др}}(t) = \mathcal{I}(t) - I_0.$$

Согласно (1.4.10) спектральная плотность дробового шума равна

$$S_{i_{\text{др}}}(\omega) \equiv S_{\text{др}}(\omega) = \varepsilon \mathcal{S}_i(\omega),$$

где $\mathcal{S}_i(\omega)$ — спектральная плотность энергии импульса наведенного тока $i(t)$. Поскольку $i(t)$ является детерминированной функцией, то на основании (1.3.4)

$$\mathcal{S}_i(\omega) = \frac{1}{2\pi} |C_i(\omega)|^2,$$

где

$$C_i(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} i(t) e^{j\omega t} dt = \frac{2e}{\tau_0^2} \int_0^{\tau_0} t e^{j\omega t} dt = \frac{2e}{\theta^2} [e^{j\theta}(1 - j\theta) - 1],$$

$\theta = \omega\tau_0$ есть так называемый угол пролета.

Вычисляя $\mathcal{S}_i(\omega)$ и принимая во внимание, что $\varepsilon = I_0/e$, найдем следующее значение спектральной плотности дробового шума:

$$S_{\text{др}}(\omega) = \frac{1}{2\pi} e I_0 M(\theta).$$

Функция $M(\theta)$, учитывающая конечность времени пролета электрона, равна

$$M(\theta) = \frac{4}{\theta^4} (2 + \theta^2 - 2\theta \sin \theta - 2 \cos \theta). \quad (3.2.1)$$

График этой функции приведен на рис. 3.6. При $\theta = \omega\tau_0 \ll 1$ $M(\theta) = 1$. Таким образом, для всех частот $\omega \ll \tau_0^{-1}$ спектральная плотность дробового шума является постоянной величиной и дробовой шум на этих частотах можно считать белым шумом.

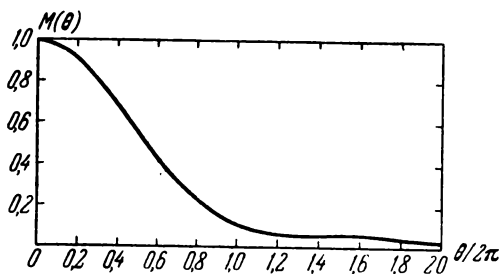


Рис. 3.6.

При возрастании ω функция $M(\theta)$ довольно быстро начинает уменьшаться и на частоте $\omega = 2\pi/\tau_0$ спектральная плотность дробового шума уменьшается уже в десять раз. При больших ω $M(\theta)$ стремится к нулю как $4/\omega^2\tau^2$.

3. Рассмотрим теперь влияние пространственного заряда, существующе-

го в промежутке катод — анод, на дробовой шум. Наличие пространственного заряда сказывается, вообще говоря, многосторонне: он влияет на время пролета τ_0 , на форму импульса наведенного тока и на абсолютную величину спектральной плотности дробового шума. Последнее влияние является для нас основным, и мы остановимся только на нем.

Пространственный заряд вводит в рассмотрение новый фактор — определенное взаимодействие между электронами. Это взаимодействие нарушает случайность последовательных импульсов тока, вследствие чего интенсивность шума уменьшается. Физически это уменьшение связано с тем, что электроны, вылетевшие из катода, попадают в область пространственного заряда, увеличивают его и это увеличение пространственного заряда несколько уменьшает тот первоначальный импульс наведенного тока, который был бы в отсутствие пространственного заряда. Поэтому при приближенном рассмотрении можно считать, что вместо импульса наведенного тока $i(t)$ при наличии пространственного заряда имеет место импульс $i(t)\Gamma$, где $0 < \Gamma < 1$. Это, естественно, приводит к тому, что спектральная плотность дробового шума уменьшается и становится равной

$$S_{др}(\omega) = \frac{1}{2\pi} e I_0 \Gamma^2 M(\omega\tau_0). \quad (3.2.2)$$

Коэффициент Γ^2 называется коэффициентом депрессии дробового шума. Таким образом, формула (3.2.2) описывает самое общее значение спектральной плотности дробового шума.

Нетрудно подсчитать полную мощность дробового шума:

$$\langle i_{др}^2(t) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{др}(\omega) d\omega = \Gamma^2 e \int_0^{\tau_0} i^2(t) dt = \frac{4}{3} \frac{e I_0 \Gamma^2}{\tau_0},$$

которая, разумеется, является конечной величиной, и ширину спектра дробового шума $\Pi_{др}$:

$$\Pi_{др} = \frac{\langle i_{др}^2(t) \rangle}{2S_{др}(0)} = \frac{4}{3} \frac{\pi}{\tau_0}. \quad (3.2.3)$$

Функция корреляции дробового шума равна

$$\begin{aligned} \Phi_{др}(\tau) &= \int_{-\infty}^{+\infty} S_{др}(\omega) \cos \omega \tau d\omega = \\ &= \Phi_{др}(0) \begin{cases} \left(1 - \frac{|\tau|}{\tau_0}\right)^2 \left(1 + \frac{|\tau|}{2\tau_0}\right), & |\tau| \leq \tau_0, \\ 0, & |\tau| \geq \tau_0, \end{cases} \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

где

$$\Phi_{др}(0) = \langle i_{др}^2(t) \rangle = \frac{4}{3} \frac{e I_0 \Gamma^2}{\tau_0}.$$

Заметим, что большинство электронных ламп работает на таких частотах, где $\omega \ll \tau_0^{-1}$. Для них дробовой шум можно считать белым шумом и принимать, что

$$S_{др}(\omega) = \frac{1}{2\pi} e I_0 \Gamma^2, \quad (3.2.5)$$

$$\Phi_{др}(\tau) = e I_0 \Gamma^2 \delta(\tau). \quad (3.2.6)$$

Легко, кстати, проверить, что формулы (3.2.5) и (3.2.6) получаются из (3.2.2) и (3.2.4) при предельном переходе $\tau_0 \rightarrow 0$. Формула (3.2.5) носит название формулы Шоттки *).

4. Общая формула (3.2.2) была нами получена для диода. Если рассматривать дробовой шум для триодов, тетродов и пентодов, то, наряду с нерегулярностью вылета электронов с катода, следует еще учитывать и случайности попадания электронов на тот или иной электрод. Эта случайность приводит к дополнительному шуму — так называемому шуму токораспределения, который тем больше, чем больше электродов в электронной лампе [19].

*) Точнее говоря, формула Шоттки относится к «физической» спектральной плотности $i_{др}^2 f = 4\pi S_{др}(2\pi f) = 2e I_0 \Gamma^2$.

Теоретический учет этого дополнительного шума не приносит каких-либо особенностей для суммарного шума, влияя главным образом лишь на его величину. Поэтому и в этом случае суммарный шум можно считать дробовым, описывать его формулами (3.2.2) или (3.2.5), а характер лампы учитывать величиной коэффициента депрессии Γ^2 , который может быть определен экспериментально для любой электронной лампы. Для обычных электронных ламп, триодов и пентодов, работающих в номинальном режиме, $\Gamma^2 = 0,1 \div 0,2$.

§ 3.3. Фликкерный шум элементов лампового каскада

1. Фликкерный шум, иначе называемый шумом эффекта мерцания, был впервые обнаружен [26] при исследовании дробового шума электронных ламп на низких частотах. При измерении шума лампы на частотах порядка 10 кГц и выше наблюдаемая интенсивность шума полностью соответствовала величине дробовых шумов, однако при

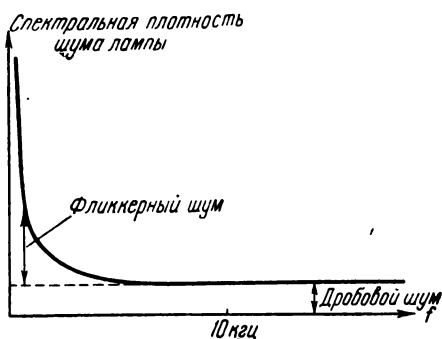


Рис. 3.7.

уменьшении частоты наблюдения, начиная примерно с 1 кГц, наблюдаемая интенсивность шума резко возрастала (рис. 3.7). Шум, обуславливающий это превышение, и был назван фликкерным шумом в лампах, первую теорию которого, а также и название предложил Шоттки [27].

Схема, позволяющая обнаружить и измерить фликкерный шум электронных

ламп, изображена на рис. 3.8. Через электронную лампу протекает постоянный ток, создающий на нагрузочном сопротивлении r падение напряжения $V = Ir$. Это сопротивление должно быть проволочным (причина этого будет указана ниже), а источники питания E и E_1 достаточно стабильными.

Наличие шумов в данной схеме проявляется в том, что на сопротивлении r , помимо постоянной составляющей V , существуют флуктуации напряжения $v(t)$. Они создаются, во-первых, тепловым шумом сопротивлений схемы, во-вторых, дробовым шумом лампы и, в-третьих, фликкерным шумом. Первые два шума дают постоянное значение спектральной плотности мощности, фликкерный шум обуславливает ее возрастание на малых частотах измерения.

Таким образом, отвлекаясь от тепловых и дробовых шумов схемы, можно считать, что полный ток через нагрузочное сопротивление r равен $I + v(t)/r = I + i_{\Phi}(t)$, где флуктуации тока $i_{\Phi}(t)$ и представляют фликкерный шум лампы.

Многочисленные экспериментальные исследования (см., например, [28—37]) приводят к следующей зависимости спектральной плотности мощности фликкерного шума от частоты и тока I :

$$S_v(\omega) = \frac{I^b B}{2\pi |\omega|^\gamma}, \quad (3.3.1)$$

где b близко к 2, γ зависит от типа, экземпляра и режима работы ламп и в большинстве случаев лежит в пределах от 0,6 до

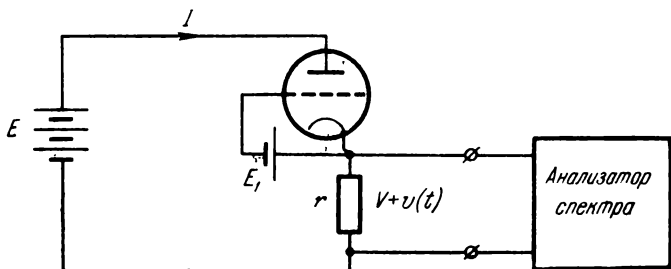


Рис. 3.8.

2,0, особенно часто принимая значения, близкие к единице. Указанная зависимость (3.3.1) была обнаружена для фликкерного шума электронных ламп в диапазоне частот от 0,1 гц до $5 \div 10$ кгц.

Причиной фликкерного шума ламп, как было еще отмечено в работе [26], являются хаотические медленные процессы, происходящие на катоде лампы и случайно изменяющие его эмиссионную способность. Например, попадание различных примесных атомов или примесных центров [27, 38] из глубины катода на его поверхность или исчезновение их с поверхности в глубину существенно изменяет эмиссию с отдельных точек катода.

Флуктуации эмиссии катода могут происходить от флуктуаций работы выхода катодов, от флуктуаций сопротивления тонкого высокоомного слоя, существующего в оксидном катоде [33, 39], и от многих других причин. Фликкерный шум электронных ламп можно трактовать, например, как флуктуации эффективной площади катода; это к тому же объясняет его название. Эффект мерцания катода — эффект резкого уменьшения эмиссии с отдельных точек катода, приводит к тому, что эти точки как бы перестают «работать» и не дают вклада в общую эмиссию

катода. Фликкерный шум можно рассматривать также и как флукутации начальных скоростей электронов, вылетающих с катода.

Главным в этих случайных процессах является их сравнительная медленность — то, что обуславливает сильное возрастание спектральной плотности фликкерного шума на низких частотах.

Отметим, что фликкерный шум ламп фактически локализован в полупроводниковом покрытии катода, поэтому в лампах с чисто металлическими катодами (например, вольфрамовыми) фликкерный шум практически отсутствует [31, 37, 40].

Как известно, у электронных ламп с оксидными катодами, помимо фликкерного шума, имеет место дрейф эмиссии и старение, во время которых изменяются параметры катода [40]. Можно, по-видимому, считать [41], что все три вышеупомянутых процесса в электронных лампах являются составляющими (с разными постоянными времени) единого процесса старения катода лампы, процесса в общем случае нестационарного. Фликкерный шум есть наиболее быстрая часть этого процесса (частоты от 10^{-1} до 10^4 гц). Дрейф эмиссии — промежуточная часть (частоты от 10^{-4} до 10^{-2} гц). Само старение лампы — процесс, длящийся часами, порождает электрический шум в области частот ниже 10^{-4} гц и вплоть до сколь угодно малых частот.

2. Кроме электронных ламп, фликкерный шум обнаружен также в так называемых гранулированных сопротивлениях (см., например, [42—46]), представляющих собой конгломерат (обычно пленку) из хорошо проводящих, достаточно малых частиц. Для таких сопротивлений (включенных вместо лампы по схеме рис. 3.8), кроме теплового шума на низких частотах, наблюдается зависящий от тока шум, называемый иногда «токовым» или «контактным» шумом. Токсовая и частотная зависимость этого шума (который можно называть фликкерным шумом непроволочных сопротивлений) для достаточно малых мощностей, рассеиваемых на сопротивлении, полностью соответствует (3.3.1). Для линейных непроволочных сопротивлений (обычно применяемых в радиосхемах) коэффициент b практически равен двум. Для сопротивлений, имеющих явную нелинейность, b заметно отличается от 2. В большинстве случаев $\gamma=1$ или несколько больше. Для гранулированных сопротивлений фликкерный шум наблюдается в области частот от долей герца вплоть до мегагерц.

Опыт показывает, что у проволочных сопротивлений никакого фликкерного шума не обнаруживается. Следовательно, именно гранулированность проводящего слоя является причиной фликкерного шума. Хотя на сегодняшний день полной и закон-

ченной теории фликкерного шума непроволочных сопротивлений нет, тем не менее природа его ясна. Гранулированные сопротивления, пленки обладают флуктуациями проводимости, связанными, по-видимому, с флуктуациями контактов между отдельными хорошо проводящими гранулами. При протекании по такому сопротивлению тока, вследствие флуктуаций величины сопротивления, возникают флуктуации падения напряжения, которые и являются фликкерным шумом сопротивления. Именно поэтому, во избежание лишнего источника шумов, в схеме рис. 3.8 нагрузочное сопротивление r должно быть проволочным.

Если вместо электронной лампы в цепь, показанную на рис. 3.8, включить какой-нибудь полупроводник, например нить кремния или германия, кристаллический детектор, контактные фотоэлементы, фотосопротивление, термистор и т. п., то на фоне тепловых и дробовых шумов будет опять-таки существовать шум (см., например, [47—53]), спектральная плотность которого подчиняется формуле (3.3.1). Этот шум есть фликкерный шум полупроводников (называемый иногда «избыточным» шумом). И в этом случае фликкерный шум обнаружен в диапазоне от долей герца до тех частот, где он становится сравним с дробовым (в некоторых случаях до нескольких десятков мегагерц).

Причиной фликкерного шума полупроводников являются различные нестационарные процессы, в основном процессы старения, протекающие в районах скачков потенциала (потенциальных барьеров) между полупроводниками разного типа и на границах металл — полупроводник [54, 55]. Феноменологически фликкерный шум полупроводников может быть связан с медленными флуктуациями концентрации носителей вблизи потенциальных барьеров.

Известно также [56], что в газовом разряде (в этом случае на месте электронной лампы в схеме рис. 3.8 стоит, например, неоновая лампа) на низких частотах также существует шум со спектральной плотностью, описываемой формулой (3.3.1), т. е. имеет место фликкерный шум газового разряда.

3. Таким образом, во многих совершенно различных элементах радиосхем*) обнаруживается низкочастотный шум, называемый фликкерным шумом, обладающий спектральной плотностью мощности в достаточно широком диапазоне частот, пропорциональной $\omega^{-\gamma}$ ($0,6 < \gamma < 3$), и токовой зависимостью, пропорциональной I^b , где $b > 1$ и чаще всего близко к двум.

Случай $b \approx 2$ легко объясняется флуктуациями величины проводимости исследуемого объекта. В самом деле, если полагать,

*) Заметим, что фликкерный шум наблюдается также в вакуумных фотоэлементах [57] и фотоумножителях [58].

что сопротивление лампы, полупроводника и т. п. флуктуирует, т. е. равно

$$r_1 = \langle r_1 \rangle + \Delta r_1(t),$$

где $\langle \Delta r_1(t) \rangle = 0$, то нетрудно найти, что достаточно малые флуктуации сопротивления создают флуктуационное напряжение

$$v(t) = -I \frac{r_1}{r_1 + r} \Delta r_1(t).$$

Следовательно,

$$S_v(\omega) = I^2 \left(\frac{r_1}{r_1 + r} \right)^2 S_{\Delta r_1}(\omega).$$

Если изучаемый объект можно считать в соответствующем режиме линейным, то $S_{\Delta r_1}(\omega)$ не зависит от тока и тогда $b=2$. Если объект исследования явно нелинеен, то $S_{\Delta r_1}(\omega)$ зависит от тока I и тогда $b \neq 2$, отклоняясь в ту или другую сторону.

Наблюдаемая токовая зависимость $\sim I^2$ позволяет перейти к более удобным для дальнейшего анализа *относительным* флуктуациям. В отношении фликкерного шума электронных ламп это означает, что вместо абсолютных фликкерных флуктуаций тока лампы $i_\Phi(t)$ будем рассматривать *относительные* $\delta i_\Phi(t) = i_\Phi(t)/I$, где I — постоянная составляющая тока лампы. Поскольку $v(t) \sim i_\Phi(t)$, то вместо (3.3.1) получим

$$S_{\delta i_\Phi}(\omega) \equiv S_\Phi(\omega) = \frac{A_\Phi}{2\pi |\omega|^\gamma}. \quad (3.3.2)$$

Этой формулой и будем пользоваться в дальнейшем при представлении фликкерного шума ламп.

Величины A_Φ и γ , которые зависят от экземпляра и типа лампы, от режима, в котором работает лампа, будем считать известными. Так, например, у современных пальчиковых ламп, по данным А. И. Чикина [37], для γ и A_Φ имеют место следующие пределы:

$$10^{-13} \leq A_\Phi \leq 10^{-15}, \quad 0,8 \leq \gamma \leq 1,5.$$

Наиболее типичными значениями являются $A_\Phi \approx 10^{-14}$, $0,9 \leq \gamma \leq 1,1$.

Фликкерный шум непроволочных сопротивлений, полупроводников и т. п. целесообразно описывать относительными флуктуациями величины их сопротивления.

4. Обратимся теперь к рассмотрению спектра фликкерного шума. Прежде всего необходимо отметить, что экспериментальные исследования [59—62] позволяют утверждать, что, по всей вероятности, закон $\sim \omega^{-\gamma}$ справедлив для сколь угодно малых частот. Тогда можно считать, что при $\gamma < 1$ фликкерный шум является *стационарным* процессом, а при $\gamma \geq 1$ — *нестационарным* процессом с неинтегрируемым спектром, причем для $\gamma > 1$

можно полагать, что фликкерный шум есть процесс со стационарными приращениями (см. п. 5 § 1.6).

Таким образом, с точки зрения случайных процессов фликкерный шум, обладающий спектром $\sim \omega^{-\gamma}$, не представляет собой ничего удивительного и его влияние на процессы флуктуаций в автоколебательных системах можно учесть, используя математический аппарат, развитый в гл. 1 и гл. 2 для процессов с неинтегрируемыми спектрами.

Более интересным и менее ясным является вопрос о *физической природе* процессов, обладающих спектрами фликкерного типа. Хотя этому вопросу посвящено довольно большое количество работ [19, 27, 38, 41, 63—65], нельзя еще утверждать, что на сегодняшний день вопрос полностью ясен. Тем не менее определенные предположения о «тонкой структуре» фликкерного спектра, не противоречащие экспериментальным данным, могут быть сделаны.

Обратимся к п. 3 § 1.4 и попробуем «построить» случайный процесс, обладающий фликкерным спектром.

Пусть имеем случайную функцию $v(t)$ со спектром фликкерного типа. Представим $v(t)$ как суперпозицию случайно приходящих импульсов

$$v(t) = \sum_k g_k y(t - t_k),$$

где g_k — случайная величина с $\langle g_k \rangle = 0$, $\langle g_k^2 \rangle = g^2$, t_k — случайные моменты времени. Предположим, что функция импульсного типа $y(t)$ является детерминированной. На основании (1.4.10)

$$S_v(\omega) = g^2 \varepsilon \mathcal{E}_y(\omega), \quad (3.3.3)$$

где ε — среднее число импульсов, возникающих в единицу времени.

Тем самым вопрос о природе спектра фликкерного типа переносится со случайного процесса на детерминированную функцию импульсного типа $y(t)$. Другими словами, необходимо найти такую функцию (и объяснить ее физический смысл), которая обладает спектром энергии фликкерного типа.

Рассмотрим следующий вид $y(t)$:

$$y(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ y_0 t^{-\sigma}, & t > 0, \end{cases} \quad 0 < \sigma < 1. \quad (3.3.4)$$

Коэффициент Фурье этой функции легко может быть найден с помощью (II. 24):

$$C_y(\omega) = \int_0^{\infty} \frac{y_0 e^{j\omega t}}{t^\sigma} dt = y_0 \frac{\Gamma(1-\sigma)}{\omega^{1-\sigma}} e^{-j\frac{\pi}{2}(1-\sigma)}, \quad \omega \neq 0.$$

Отсюда на основании (1.3.4) находим спектральную плотность энергии функции (3.3.4):

$$\mathcal{E}_y(\omega) = \frac{y_0^2 [\Gamma(1-\sigma)]^2}{2\pi |\omega|^{2(1-\sigma)}}, \quad \omega \neq 0. \quad (3.3.5)$$

Объединяя (3.3.3) и (3.3.5), получаем

$$S_v(\omega) = \frac{A_v}{2\pi |\omega|^\gamma}, \quad \omega \neq 0, \quad (3.3.6)$$

где $A_v = g^2 \varepsilon y_0^2 [\Gamma(1-\sigma)]^2$, $\gamma = 2(1-\sigma)$, $0 < \gamma < 2$.

Таким образом, казалось бы, задача решена. Найдена функция, обладающая спектром $\omega^{-\gamma}$ для всех $\omega \neq 0$. Однако найденная функция (3.3.4), а следовательно и $v(t)$, может в некоторые моменты t становиться *неограниченной*.

Физически такая функция не может реализоваться. Величина тока, например, через электронную лампу в любой момент времени является конечной величиной. Следовательно, искомая функция $y(t)$ должна быть *ограниченной* для любого значения t .

Видоизменим (3.3.4) и рассмотрим функцию

$$y(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ \frac{y_0}{(t + \tau_0)^\sigma}, & t > 0, \end{cases} \quad 0 < \sigma < 1, \quad (3.3.7)$$

где $\tau_0 > 0$ есть некоторая постоянная. Коэффициент Фурье равен теперь

$$C_y(\omega) = y_0 e^{-j\omega\tau_0} \int_{\tau_0}^{\infty} u^{-\sigma} e^{j\omega u} du = y_0 e^{-j\omega\tau_0} \omega^{\sigma-1} \int_{\omega\tau_0}^{\infty} v^{-\sigma} e^{jv} dv.$$

Используя специальные функции $C(x, \sigma)$ и $S(x, \sigma)$ (см. Приложение V и (II. 24)), имеем

$$C_y(\omega) = y_0 e^{-j\omega\tau_0} \omega^{\sigma-1} \left[\Gamma(1-\sigma) e^{j\frac{\pi}{2}(1-\sigma)} - C(\omega\tau_0, \sigma) - jS(\omega\tau_0, \sigma) \right].$$

Соответствующее точное выражение для $\mathcal{E}_y(\omega)$ является достаточно громоздким, и мы не будем его здесь приводить. Рассмотрим лишь поведение спектральной плотности энергии при достаточно малых и достаточно больших ω .

Для всех частот ω , удовлетворяющих неравенству $|\omega\tau_0| \gg 1$, на основании (V. 4) имеем, отбрасывая члены высших степеней малости:

$$C_y(\omega) \approx y_0 e^{-j\omega\tau_0} \omega^{\sigma-1} \left[-\frac{\sin \omega\tau_0}{(\omega\tau_0)^\sigma} + j \frac{\cos \omega\tau_0}{(\omega\tau_0)^\sigma} \right] = j \frac{y_0}{\omega\tau_0^\sigma}.$$

Следовательно,

$$\mathcal{E}_y(\omega) = \frac{y_0^2/\tau_0^{2\sigma}}{2\pi\omega^2} \sim \frac{1}{\omega^2}. \quad (3.3.8)$$

Полученная зависимость $\mathcal{E}_y(\omega)$ от частоты является весьма примечательной. Пропорциональность ω^{-2} для достаточно больших частот получилась как следствие *ограниченности* всюду положительной функции $y(t)$. Можно показать в общем случае, что для любой положительной ограниченной функции $y(t)$ на достаточно больших частотах ω спектральная плотность $\mathcal{E}_x(\omega)$ всегда будет убывать не медленнее, чем ω^{-2} .

Для малых частот, таких, что $|\omega\tau_0| \ll 1$, на основании (V.3) получим следующее значение коэффициента Фурье функции $y(t)$:

$$\begin{aligned} C_y(\omega) &\approx y_0 e^{-j\omega\tau_0\omega^{\sigma-1}} \left[\Gamma(1-\sigma) e^{j\frac{\pi}{2}(1-\sigma)} - \frac{(\omega\tau_0)^{1-\sigma}}{1-\sigma} - j \frac{(\omega\tau_0)^{2-\sigma}}{2-\sigma} \right] \approx \\ &\approx y_0 e^{-j\omega\tau_0\omega^{\sigma-1}} \Gamma(1-\sigma) e^{j\frac{\pi}{2}(1-\sigma)}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\mathcal{E}_y(\omega) = \frac{y_0^2 [\Gamma(1-\sigma)]^2}{2\pi |\omega|^\gamma}, \quad 0 < \gamma = 2(1-\sigma) < 2. \quad (3.3.9)$$

Таким образом, фликкерный спектр для функции $y(t)$, заданной формулой (3.3.7), сохранился только для достаточно малых частот. И в этом диапазоне он полностью совпадает со спектром (3.3.5), полученным для (3.3.4).

Можно показать, что если взять любую ограниченную положительную функцию $y(t)$, такую, которая для достаточно больших t ведет себя как $t^{-\sigma}$ (рис. 3.9), то для достаточно малых частот ω мы опять получим спектральную плотность энергии вида (3.3.9). Именно медленно спадающий «хвост» функции $y(t)$ формирует спектр фликкерного типа на малых частотах. Чем медленнее спадает «хвост», тем быстрее растет $\mathcal{E}_y(\omega)$ при $\omega \rightarrow 0$.

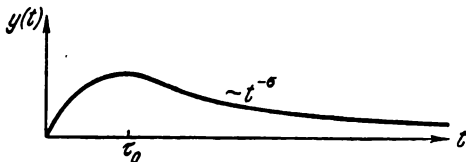


Рис. 3.9.

При достаточно большом ε — числе импульсов, возникающих в единицу времени, медленно спадающий «хвост» импульса $y(t)$ обеспечивает в каждый данный момент времени t большое число слагаемых в суммарном шуме $v(t)$. Поэтому можно ожидать, что на основании центральной предельной теоремы теории

вероятностей вероятностное распределение фликкерного шума $v(t)$ является нормальным.

Произведенный анализ позволяет сделать следующие выводы:

1) По-видимому, никакой реальный физический процесс не может обладать чисто фликкерным спектром $\sim \omega^{-\gamma}$ во всем диапазоне частот, а этот спектр имеет место только для частот $|\omega| \ll 1/\tau_0$, где τ_0 — некоторая постоянная времени.

2) Нормально распределенный процесс, обладающий фликкерным спектром для всех частот $|\omega| \ll 1/\tau_0$, может быть представлен в виде суперпозиции большого числа случайно приходящих ограниченных импульсов, обладающих медленно спадающими «хвостами».

3) С феноменологической точки зрения фликкерный шум может представлять собой суперпозицию каких-то случайных единичных событий (например, рождение и захват носителей в полупроводниках, «умирание» активных центров на поверхности катода в электронных лампах, изменение величины сопротивления между отдельными контактами в гранулированных сопротивлениях и т. п.), каждое из которых порождает импульс (тока напряжения или сопротивления), пропорциональный $t^{-\sigma}$ для больших t .

5. Имеется еще одна трудность в отношении физической интерпретации фликкерного шума. Она связана с расходимостью средней мощности:

$$\langle v^2 \rangle \equiv \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \langle v^2_t \rangle dt = \int_{-\infty}^{+\infty} S_v(\omega) d\omega. \quad (3.3.10)$$

Легко видеть, что для конечности этого интеграла необходимо, чтобы на достаточно малых частотах спектральная плотность $S_v(\omega)$ возрастала медленнее, чем ω^{-1} , а на достаточно высоких частотах убывала быстрее, чем ω^{-1} . На основании вышесказанного ясно, что для всех реальных физических процессов последнее условие всегда выполняется. Тем самым расходимость $\langle v^2 \rangle$ связана с зависимостью $S_v(\omega) \sim \omega^{-\gamma}$ (при $\gamma \geq 1$), имеющей место на всех частотах $|\omega| \ll \tau_0^{-1}$. Центр тяжести этой проблемы лежит, разумеется, не в плоскости математического описания фликкерного шума, ибо для сигналов третьей группы (к которой принадлежит фликкерный шум) мы имеем соответствующий математический аппарат. Вопрос сводится к следующему. Каким образом реальный физический процесс может иметь бесконечно большую мощность? Ответ следующий: в любом реальном эксперименте, длящемся конечное время, измерен-

ная мощность любого сигнала никогда точно не соответствует (3.3.10) и всегда является конечной величиной.

Рассмотрим это обстоятельство подробнее. Пусть мы «включили» фликкерный шум $v(t)$ в момент $t=0$. Спектральная плотность $S_v(\omega)$, входящая в интеграл (3.3.10), получается при математическом расчете как результат спектрального анализа случайной функции $v(t)$, рассматриваемой от $t=0$ до $t=\infty$. Однако любой эксперимент длится всегда конечное время T . Это значит, что для спектрального анализа (скажем, автоматически выполняемого спектральным анализатором) берется лишь отрезок $v(t)$ для $0 \leq t \leq T$. Это приводит к тому, что, во-первых, измеренная спектральная плотность $S_{vT}(\omega)$ является достоверной по отношению к рассчитанной лишь для частот, заведомо больших T^{-1} , и что, во-вторых, поведение $S_v(\omega)$ для $\omega \ll 2\pi T^{-1}$ никоим образом не сказывается на величине измеренной спектральной плотности. Другими словами, для эксперимента, длящегося время T , полный спектр процесса $v(t)$ важен лишь до частоты T^{-1} , так как более низкие частоты экспериментом не учитываются. Для фликкерного шума это означает, что средняя мощность, измеренная за время T , всегда является конечной величиной, в общем случае зависящей от T .

Нетрудно оценить значение измеренной мощности

$$\langle v^2 \rangle_T \equiv \frac{1}{T} \int_0^T \langle v_i^2 \rangle dt = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{vT}(\omega) d\omega.$$

Несложный расчет показывает, что при достаточно больших T для $v(t)$, соответствующего импульсу $y(t)$, заданному формулой (3.3.7), получаем

$$\langle v^2 \rangle_T = \begin{cases} C_1 + D_1 (T/\tau_0)^{\gamma-1}, & \gamma > 1, \\ C_2 + D_2 \ln(T/\tau_0), & \gamma = 1, \\ C_3 + D_3 (\tau_0/T)^{1-\gamma}, & \gamma < 1, \end{cases} \quad (3.3.11)$$

где C_i, D_i — некоторые постоянные. Отсюда видно, что при $\gamma < 1$ существует конечное значение предела $\lim_{T \rightarrow \infty} \langle v^2 \rangle_T = \langle v^2 \rangle$ и, следовательно, сходимость (3.3.10). Можно считать, таким образом, что случаю $\gamma < 1$ соответствует стационарный процесс. При $\gamma \geq 1$ мощность $\langle v^2 \rangle_T$ неограниченно возрастает при возрастании T , и фликкерный шум в этом случае является нестационарным процессом. Отметим, что (3.3.11) для $\gamma > 1$ и $\gamma = 1$ практически совпадает с соответственно (1.6.16а) и (1.6.21а). Поэтому $\langle v^2 \rangle_T$ есть не что иное, как $\langle v^2(T) \rangle$ при $v(0) = 0$.

Таким образом, расхожимость (3.3.10) для случаев $\gamma \geq 1$ связана с тем, что: 1) (3.3.10) написано при рассмотрении $v(t)$ в интервале $[0, \infty]$; 2) при $\gamma \geq 1$ имеется неограниченное возрастание $\langle v^2 \rangle_T$ при $T \rightarrow \infty$ из-за неинтегрируемости фликкерного шума.

Возрастание средней мощности фликкерного шума с ростом T может трактоваться, скажем, для случая $\gamma=2$ аналогично возрастанию среднего квадрата блужданий броуновской частицы, связанному с накапливанием уходов частицы. В случае фликкерного шума аналогичное накапливание имеет место на медленно спадающих «хвостах» функции $y(t)$. Для случая $\gamma=1$ это накапливание идет очень медленно, в результате чего мы имеем логарифмический диффузионный закон и квазистационарность фликкерного шума.

Мы получили бы бесконечно большое значение средней мощности фликкерного шума, если бы измеряли его сколь угодно долго. Практически же $\langle v^2 \rangle_T$ всегда остается величиной много меньшей той мощности, которая подводится к лампе или непроволочному сопротивлению на постоянном токе. Лишь в некоторых исключительных случаях эти мощности могут быть сравнимыми.

Рассмотрим, например, такой пример. Пусть в момент $t=0$ в цепь постоянного тока включено непроволочное сопротивление величиной r . С течением времени в этом сопротивлении происходят процессы, связанные с его старением, в результате которых меняется его величина. Эти процессы старения, как уже говорилось выше, генерируют фликкерный шум рассматриваемого сопротивления.

Пусть по истечении очень большого промежутка времени T , во время которого сопротивление все время оставалось включенным в цепь, в результате старения величина сопротивления изменилась и стала равной $2r$. Если падение напряжения на сопротивлении поддерживалось все время постоянным, то разница в начальной и конечной мощности, выделяемой на этом сопротивлении, равна одной второй от начальной мощности. Можно сказать, что эта разница и «ушла» в мощность фликкерного шума.

Приведенные рассуждения являются, разумеется, весьма грубыми и приближенными. На самом деле следует рассматривать ансамбль сопротивлений, включенных в цепь, ибо нестационарность фликкерного шума не позволяет сравнивать усреднение во времени с усреднением по ансамблю. Кроме этого, условие $\langle \Delta r(t) \rangle = 0$ означает, что в ансамбле сопротивления стареют «в разные стороны» и возрастание $\langle v^2 \rangle_T$ с ростом T по существу означает «расползание» $v^2(T)$ для разных сопротивлений ан-

самбля также в разные стороны. Тем не менее приведенный пример позволяет почувствовать, откуда может, в принципе, браться сравнительно большая мощность реального фликкерного шума при неограниченном возрастании T .

§ 3.4. Флуктуации параметров элементов радиосхем

1. В предыдущих параграфах мы рассмотрели основные электрические шумы, существующие в элементах радиосхем. Эти шумы представляли собой флуктуации токов или напряжений или, лучше сказать, флуктуирующие токи и напряжения, существующие в цепях радиосхем. Эти флуктуирующие токи и напряжения складывались с токами и напряжениями сигналов, не изменяя характера последних. Поэтому выше рассмотренные электрические шумы можно назвать аддитивными шумами, аддитивными флуктуациями.

Кроме аддитивных флуктуаций, существуют и другие, которые влияют на сигналы, проходящие через радицепи, модулируя их. Такие шумы и флуктуации можно назвать мультипликативными. По существу это есть флуктуации параметров радиочепей и, в частности, тех параметров, от которых зависит, например, коэффициент передачи четырехполосников.

Основными параметрами, определяющими коэффициенты передачи радиотехнических линейных четырехполосников, являются сопротивление r , емкость C , индуктивность L и крутизна лампы S .

Вообще говоря, в принципе могут существовать *естественные* термодинамические флуктуации параметров, обязанные тепловым движениям молекул и атомов (например, естественные флуктуации емкости конденсатора из-за тепловых механических движений пластин конденсатора относительно друг друга), однако в литературе почти нет никаких указаний на исследования таких флуктуаций.

Дискретная природа электрического тока, приводящая к дробовым шумам, может также приводить к флуктуациям параметров лампы. Ими могут быть, например, флуктуации внутреннего сопротивления и емкости лампы. Эти флуктуации также почти не изучены, и каких-либо конкретных данных о них нет.

Наиболее хорошо изученными и, кстати, наиболее существенными флуктуациями параметров являются флуктуации, связанные с фликкерным шумом различных элементов радиосхем. К их рассмотрению мы и перейдем, начав с флуктуаций параметров сопротивлений.

2. Как было уже сказано в предыдущем параграфе, фликкерный шум непроволочных гранулированных сопротивлений,

наблюдаемый при пропускании постоянного тока через сопротивление, связывается с существованием флуктуаций величины сопротивления. Вводя в рассмотрение относительные флуктуации величины сопротивления $\delta r = \Delta r(t) / \langle r \rangle$, $\langle \delta r^2 \rangle \ll 1$, можно на основании экспериментальных данных [41—43, 46, 49, 60] считать, что спектральная плотность $\delta r(t)$ равна

$$S_{\delta r}(\omega) = \frac{A_r}{2\pi |\omega|^\gamma}. \quad (3.4.1)$$

Здесь γ для обычных сопротивлений, применяемых в радиосхемах, практически равна единице. Величина A_r сильно зависит от того материала, из которого приготовлено сопротивление, от технологии приготовления последнего, от величины сопротивления и лежит в общем случае, имея очень большой разброс, в пределах $10^{-10} \div 10^{-16}$. Для отечественных сопротивлений типа ВС и МЛТ, на основании данных Т. Д. Разиной [46], можно найти, что величина A_r лежит большей частью в пределах $5 \cdot 10^{-14} \div 2 \cdot 10^{-16}$. В качестве «среднего» значения можно принять $A_r = 10^{-15}$.

Все эти измерения выполнены на постоянном токе при непосредственном наблюдении фликкерного шума. Однако если флуктуации величины сопротивления действительно существуют, то они должны обнаруживаться и при пропускании переменного сигнала такой частоты, на которой фликкерный шум практически уже не существует. Такие эксперименты были проведены на частоте 60 кГц [36] и действительно подтвердили модулирующее действие фликкерного шума непроволочных сопротивлений. Пропускание при этом добавочной постоянной составляющей тока через сопротивление (в пределах допустимой мощности, рассеиваемой на сопротивлении) не изменило величины $S_{\delta r}(\omega)$.

Таким образом, можно утверждать, что гранулированные сопротивления обладают флуктуациями своей величины со спектральной плотностью (3.4.1), не зависящей (в определенных пределах) ни от величины, ни от частоты протекающего по ним тока *).

3. Существование флуктуаций величины сопротивлений, стоящих в каскаде и обеспечивающих выбранный режим работы электронной лампы в схеме, уже до рассмотрения собственных флуктуаций лампы приводит к необходимости существования флуктуаций крутизны лампы, ибо последняя существенно зависит от режима работы лампы.

*) Если по гранулированному сопротивлению не протекает постоянная составляющая тока, а имеется только высокочастотная компонента, то очевидно, что аддитивный низкочастотный фликкерный шум не генерируется этим сопротивлением.

где

$$r^2 = R_k^2 + \left(\frac{D}{m+1} R_s \right)^2 + (DR_\phi)^2.$$

Принимая во внимание (3.4.1), получим следующее окончательное выражение для спектральной плотности относительных флуктуаций крутизны пентода, обязанных флуктуациям сопротивлений питающей схемы:

$$S_{\delta S}(\omega) = \frac{1}{9} \left(\frac{m+1}{m} rS \right)^2 \frac{A_r}{2\pi |\omega| v}. \quad (3.4.5)$$

Указанный расчет произведен для случая, когда емкости C_k , C_a , C_ϕ играют свою роль только для частоты сигнала (предполагаемого достаточно высокочастотным) и не оказывают влияния на низкочастотные фликкерные флуктуации потенциалов U_k , U_a . Как показывают примерные оценки, множитель $\frac{1}{9} \left(\frac{m+1}{m} rS \right)^2$ в зависимости от применяемых ламп принимает значение от 0,05 до 0,5.

Естественно ожидать, кстати, что как флуктуации сопротивлений δR , так и связанные с ними флуктуации крутизны δS ведут непосредственно к флуктуациям коэффициента усиления каскада. Последние действительно были обнаружены [36].

4. Рассмотрим теперь, к флуктуациям каких параметров приводит фликкерный шум электронных ламп. Как уже говорилось, фликкерный шум ламп по существу представляет собой медленные и сравнительно большие флуктуации эмиссии катода, ведущие к флуктуациям пространственного заряда и флуктуациям тока лампы. Поэтому можно предполагать, что фликкерный шум ламп приводит к флуктуациям внутреннего сопротивления R_i , крутизны S и емкости лампы C . Имея дело преимущественно с пентодами, обычно не интересуются внутренним сопротивлением лампы, так как оно мало влияет на параметры каскада. Мы также не будем его рассматривать, тем более что экспериментальные исследования флуктуаций R_i для усилительных ламп, по-видимому, не проводилось.

Может ли фликкерный шум лампы приводить к флуктуациям крутизны и тем самым модулировать по амплитуде проходящий через лампу сигнал? Совершенно очевидно, что такая модуляция должна иметь место, ибо крутизна, во-первых, непосредственно зависит от тока лампы и, во-вторых, зависит от режима питания лампы (который при наличии сопротивлений R_k , R_a , R_ϕ , R_a зависит в свою очередь опять-таки от тока лампы).

Рассчитаем флуктуации крутизны δS , обязанные флуктуациям тока лампы δi_ϕ . Предположим, что флуктуации эмиссии катода приводят к изменению средних начальных скоростей

электронов. В этом случае мы должны рассматривать для тока катода I_k так называемый «исправленный» закон «трех вторых», который дается выражением [67]

$$I_k = BU_D^{3/2} + AU_D v, \quad (3.4.6)$$

где B и A — постоянные, а v — начальная скорость электронов, которую полагаем флуктуирующей. Обычный закон «трех вторых»

$$I_k = BU_D^{3/2}$$

не позволяет найти влияние флуктуаций эмиссии катода на ток и крутизну лампы, так как он предполагает полную депрессию флуктуаций тока лампы (режим, далекий от насыщения).

Рассматривая схему рис. 3.10, полагая, что блокировочные емкости на низкочастотные флуктуации практически не влияют, используя (3.4.3) и (3.4.6), получим

$$I_k = B(DU_{\pi} - I_k R')^{3/2} + A(DU_{\pi} - I_k R') v. \quad (3.4.7)$$

С другой стороны, искомая крутизна лампы равна

$$S = \frac{\partial I_a}{\partial U_D} = \frac{\partial I_a}{\partial I_k} \frac{\partial I_k}{\partial U_D} = \frac{m}{m+1} \frac{3}{2} BU_D^{1/2} + \frac{m}{m+1} Av. \quad (3.4.8)$$

Дифференцируя (3.4.7) и (3.4.8) и исключая величины v и dv , можно получить

$$\delta S = \frac{1}{3} \left(2 + \frac{m+1}{m} R'S \right) \delta I_k.$$

Отсюда, предполагая когерентность I_k и I_a и равенство их спектральных плотностей, найдем

$$S_{\delta S}(\omega) = \frac{4}{9} \left(1 + \frac{m+1}{2m} R'S \right)^2 S_{\Phi}(\omega). \quad (3.4.9)$$

Считая, что (3.3.2) описывает относительные флуктуации как катодного, так и экранного тока, получим следующее окончательное выражение для спектральной плотности относительных флуктуаций крутизны лампы, обязанных фликкерному шуму ламп:

$$S_{\delta S}(\omega) = \frac{4}{9} \left(1 + \frac{m+1}{2m} R'S \right)^2 \frac{A_{\Phi}}{2\pi |\omega|^{\gamma}}. \quad (3.4.10)$$

Примерные оценки показывают, что в зависимости от используемых ламп множитель $\frac{4}{9} \left(1 + \frac{m+1}{2m} R'S \right)^2$ принимает значения, лежащие в пределах от 1 до 10.

Заметим, что формула (3.4.9) устанавливает непосредственную связь между фликкерным шумом лампы и флуктуациями

ее крутизны. Эксперимент [36] подтвердил эту формулу и тем самым модулирующее действие фликкерного шума лампы.

Флуктуации сопротивлений и фликкерный шум ламп некогерентны. Принимая это во внимание и полагая для простоты, что показатель степени γ в обеих формулах (3.4.5) и (3.4.10) имеет одно и то же значение, получим следующее выражение для спектральной плотности флуктуаций крутизны, связанных с фликкерным шумом:

$$S_{\delta S}(\omega) = \frac{A_S}{2\pi |\omega|^\gamma}. \quad (3.4.11)$$

Коэффициент

$$A_S = \frac{1}{9} \left(\frac{m+1}{m} rS \right)^2 A_r + \frac{4}{9} \left(1 + \frac{m+1}{m} R'S \right)^2 A_\phi$$

может изменяться в сравнительно широких пределах примерно от 10^{-12} до 10^{-15} , чаще всего принимая значения, близкие к 10^{-14} .

5. Имеются еще одни «технические шумы», приводящие к флуктуациям крутизны лампы. Это флуктуации напряжения источника питания U_{π} .

Поскольку напряжения на электродах лампы зависят от U_{π} , а крутизна в свою очередь зависит от напряжений на электродах (через действующий потенциал), ясно, что флуктуации U_{π} приводят к флуктуациям крутизны S .

Как показывают эксперименты [31, 36], источники питания (выпрямители, сухие батареи, аккумуляторы) обладают собственными флуктуациями напряжения, происходящими от различных причин. У сетевого напряжения, например, флуктуации его величины могут происходить от непрерывного включения и выключения большого числа нагрузок в разных частях сети. У сухих батарей и аккумуляторов причиной флуктуаций ЭДС и тока нагрузки являются флуктуационные электрохимические явления на границах металл — электролит, протекающие в двойном слое и изменяющие электродные потенциалы, емкости и сопротивления электродов. Теоретических рассмотрений этих флуктуаций, по-видимому, не существует, можно указать только результаты немногочисленных экспериментов.

Эмпирическая формула для спектральной плотности относительных флуктуаций напряжения на нагрузке почти для всех источников питания подчиняется следующему закону:

$$S_{\delta U}(\omega) = \frac{A_U}{2\pi |\omega|^\gamma}. \quad (3.4.12)$$

где A_U и γ существенно зависят от вида источника питания и режима его работы. В табл. 1 приведены примерные данные этих коэффициентов для некоторых источников питания, полученные

Т а б л и ц а 1

Источник питания	A_U	γ
Сетевое напряжение	$10^{-6} \div 10^{-7}$	$1,2 \div 1,5$
Выпрямитель без стабилизации (с фильтром LC), питающийся от сети	$5 \cdot 10^{-7} \div 5 \cdot 10^{-8}$	$2 \div 2,5$
Выпрямитель с электронным стаби- лизатором	10^{-10}	$2 \div 2,5$
Сухая батарея БАС-Г-70; ток на- грузки 8 ма	10^{-10}	1,5
Сухая батарея БАС-Г-70; без на- грузки	10^{-15}	1,3
Разряженный аккумулятор АН-2 (батарея 160 в); ток нагрузки 33 ма	10^{-13}	2,4
Свежезаряженный аккумулятор; ток нагрузки 33 ма	10^{-15}	1,5
Свежезаряженный аккумулятор; без нагрузки	10^{-16}	2,0

при измерении спектральной плотности $S_{\delta U}(\omega)$ в диапазоне ча-
стот от 0,5 гц до 120 гц.

Из таблицы видно, что применение электронных стабилизаторов и хороших LC -фильтров в выпрямителях может существенно уменьшить A_U . Применение феррорезонансного стабилизатора не приводит к столь хорошим результатам. Известно [68], что феррорезонансный стабилизатор удовлетворительно стабилизирует только квазистатические флуктуации амплитуды сетевого напряжения, а быстрые флуктуации (в диапазоне, например, 30 гц) он может даже увеличивать.

Нетрудно рассчитать флуктуации крутизны лампы, связанные с флуктуациями напряжения источника питания. Катодный ток лампы равен

$$I_k = BU_D^{3/2} = B(DU_{\pi} - I_k R')^{3/2},$$

а крутизна

$$S = \frac{3}{2} \frac{m}{m+1} B^{2/3} I_k^{1/3}.$$

Дифференцируя эти выражения и исключая dI_k , находим

$$\delta S = M \delta U_{\pi},$$

где

$$M = \frac{1}{6} \frac{3 + 2 \frac{m+1}{m} R' S}{1 + \frac{m+1}{m} R' S}.$$

Нетрудно видеть, что при любых значениях m , R' , S

$$\frac{1}{3} < M < \frac{1}{2}.$$

Тем самым спектральная плотность относительных флуктуаций крутизны, обязанных флуктуациям напряжения источников питания, подчиняется неравенству

$$\frac{1}{9} S_{\delta U}(\omega) < S_{\delta S}(\omega) < \frac{1}{4} S_{\delta U}(\omega). \quad (3.4.13)$$

6. Перейдем теперь к рассмотрению флуктуаций емкости, которыми могут обладать конденсаторы и электронные лампы (имеются в виду межэлектродные емкости).

У некоторых конденсаторов — керамических, слюдяных, стекложемалевых и др., электроды которых нанесены методом вжигания и распыления металла, был обнаружен так называемый «эффект мерцания конденсаторов» [69]. Этот эффект заключается в существовании случайных скачкообразных флуктуаций величины емкости таких конденсаторов. Его причиной являются случайно возникающие и случайно исчезающие контакты обособленных металлических частиц со сплошным слоем, ведущие по существу к флуктуациям площади пластин конденсатора.

При включении таких конденсаторов в контур генератора, дающего частоту колебаний, равную нескольким мегагерцам, скачкообразные изменения частоты достигали $200 \div 250$ гц. Таким образом, относительные флуктуации емкости таких конденсаторов имели порядок $\Delta C/C \approx 10^{-4}$. К сожалению, каких-либо других количественных данных о флуктуациях емкости таких конденсаторов, по-видимому, в литературе не описано.

Исходя из величины $\delta C \approx 10^{-4}$, которую можно принять за среднеквадратическую, и из общего механизма фликкерного шума (напомним, что фликкерный шум непроволочных сопротивлений также связан с флуктуациями контактов), можно лишь предполагать, что, во-первых, спектральная плотность флуктуаций емкости таких конденсаторов имеет обычный фликкерный вид:

$$S_{\delta C}(\omega) = \frac{A_C}{2\pi |\omega|^\gamma}, \quad (3.4.14)$$

и что, во-вторых, по порядку величины $A_C \approx 10^{-9}$, причем $\gamma \geq 1$.

Обратимся к флуктуациям межэлектродных емкостей электронной лампы. Емкость электронной лампы (будем в основном рассматривать емкость катод — сетка и емкость катод — анод) складывается из «холодной» емкости C_x , обусловленной геометрией электродов лампы и существующей в отсутствие потока электронов в лампе, и приращения, обязанного потоку электронов

и связанного с наличием пространственного заряда в лампе. Полная емкость носит название динамической емкости лампы. Расчет и эксперименты показывают [70], что C_d — динамические емкости реальной лампы примерно в полтора — два раза больше «холодных». Флуктуации межэлектродных емкостей лампы могут происходить по двум причинам: из-за флуктуаций «холодной» емкости и из-за флуктуаций приращения $C_d - C_x$. Флуктуации холодной емкости обязаны флуктуациям взаимного расположения электродов — так называемому «микрофонному эффекту», и мы их здесь рассматривать не будем *).

Рассмотрим подробнее флуктуации динамической емкости лампы, обозначенные флуктуациями пространственного заряда.

Как уже говорилось выше, фликкерный шум электронной лампы заключается в наличии флуктуаций эмиссии катода, происходящих от тех или иных причин. Флуктуации эмиссии приводят в свою очередь к флуктуациям пространственного заряда и, следовательно, к флуктуациям динамической емкости лампы. Таким образом, представляется возможным и важным выразить флуктуации емкости лампы через фликкерный шум лампы.

Вопрос о флуктуациях динамической емкости лампы изучен к настоящему времени совершенно недостаточно. Непосредственных экспериментальных данных нет вовсе. Имеющиеся весьма немногочисленные теоретические рассмотрения [71—74] носят по существу оценочный характер. Одна из основных трудностей теоретического рассмотрения вопроса связана с тем, что до сего времени нет еще общепринятого единого механизма фликкерного шума, который влияет на пространственный заряд лампы многосторонним образом.

Если предполагать, что фликкерный шум лампы обязан флуктуациям начальных скоростей электронов, то мы получим одну связь $\delta C_d = \Delta C_d(t)/C_d$ с δi_{ϕ} . Если предполагать, что фликкерный шум порождается флуктуациями сопротивления высокоомного катодного слоя, получим другую взаимосвязь δC_d с δi_{ϕ} . Если предполагать далее, что фликкерный шум заключается во флуктуациях работы выхода катода, получим третью связь δC_d с δi_{ϕ} и т. п. Три вышеприведенных механизма фликкерного шума дадут при одних и тех же значениях δi_{ϕ} различные значения флуктуаций динамической емкости δC_d , которые, в общем случае, могут быть далеки друг от друга. Несмотря на эти трудности, оценка δC_d является тем не менее необходимой для дальнейшего. Ограничимся следующими двумя случаями: 1) флук-

*) Спектр микрофонного эффекта, как правило, не носит шумового характера, а состоит из ярко выраженных максимумов на некоторых частотах, соответствующих механическому резонансу системы электродов. Его влияние можно учесть регулярными методами.

туации динамической емкости порождаются флуктуациями начальных скоростей электронов; 2) флуктуации динамической емкости порождаются флуктуациями эффективной площади катода.

Первый случай подробно рассмотрен в работе [73] и для входной емкости реального триода (или пентода) анализ приводит к следующей взаимосвязи δC_d с δi_ϕ :

$$\delta C_d \approx \frac{1}{7} \delta i_\phi.$$

Таким образом, спектральная плотность флуктуаций емкости

$$S_{\delta C}(\omega) \approx 2 \cdot 10^{-2} S_\phi(\omega). \quad (3.4.15)$$

Следовательно, механизм образования флуктуаций динамической емкости лампы, относящийся к первому случаю, дает интенсивность относительных флуктуаций емкости примерно на два порядка меньше относительной интенсивности фликкерного шума.

Оценка флуктуаций емкости соответственно второму случаю может быть произведена сравнительно просто. Предположим, что плотность тока с катода лампы является величиной постоянной, а флуктуации эмиссии связаны с флуктуациями эффективной площади катода $S_{эфф}$. Тогда, очевидно, для относительных флуктуаций справедливо

$$\delta i_\phi = \delta S_{эфф}.$$

Поскольку, с другой стороны, именно приращение емкости $C_d - C_x$ пропорционально $S_{эфф}$, легко видеть (полагая $C_d = 1,5C_x$), что

$$\delta C_d = \frac{C_d - C_x}{C_d} \delta i_\phi \approx \frac{1}{3} \delta i_\phi.$$

Следовательно, оценка флуктуаций емкости лампы по флуктуациям эффективной площади катода приводит к соотношению

$$S_{\delta C}(\omega) = 10^{-1} S_\phi(\omega). \quad (3.4.16)$$

Полученная спектральная плотность примерно на порядок превышает (3.4.15).

Таким образом, налицо разброс в оценках флуктуаций емкости. При дальнейшем исследовании влияния флуктуаций емкости лампы на работу автогенератора целесообразно пользоваться формулой (3.4.16), так как она учитывает «худший» случай.

ТЕОРИЯ ФЛУКТУАЦИЙ В АВТОГЕНЕРАТОРАХ

Глава 4

ФОРМА И ШИРИНА СПЕКТРАЛЬНОЙ ЛИНИИ КОЛЕБАНИЯ

Задача определения формы спектра сигнала генератора может рассматриваться в определенных случаях как конечная цель исследования влияния случайных сил на автогенератор. Существование сплошной части спектра генератора, даже если в составе спектра имеется квазимонохроматическая линия, может ограничить, например, чувствительность обнаружения слабых квазимонохроматических сигналов, расположенных на шкале частот достаточно близко к частоте генератора. Необходимость сравнительно точного знания «тонкой структуры» спектра генератора в этом случае является очевидной.

С другой стороны, в целом ряде физических задач механизм уширения спектральных линий рассматривается на основе введения случайной частотной модуляции колебания (см., например, [75—77]).

Вследствие этого, задача нахождения формы спектральной линии колебания, обладающего флуктуациями амплитуды и частоты, имеет вполне самостоятельное значение.

Уширение и форма спектральной линии, обязанные стационарным флуктуациям амплитуды и частоты колебания, могут считаться в настоящее время достаточно хорошо изученными (см., например, [78—86], (1956 [9, 11]; 1957 [6]; 1961 [11])).

Совершенно недостаточно отражены в литературе исследования формы и ширины спектральной линии для случая, когда флуктуации амплитуды и частоты колебания обладают фликкерными спектрами. В то же время фликкерный шум и флуктуации параметров, существующие в автогенераторах, приводят именно к таким амплитудно-частотным флуктуациям.

В настоящей главе единым методом рассматриваются форма и ширина спектральной линии колебания, обладающего в общем случае коррелированными флуктуациями амплитуды и частоты. Анализ проводится как для стационарных, так и для нестационарных (в том числе и фликкерных) флуктуаций амплитуды и частоты.

§ 4.1. Постановка задачи

1. Как было уже сказано во введении, колебание любого реального автогенератора обладает флуктуациями амплитуды и частоты. В общем случае между этими флуктуациями имеется определенная корреляция. Существование указанных флуктуаций приводит к тому, что спектр колебания автогенератора уже не является монохроматической линией. Спектральная линия колебания приобретает некоторую, не равную нулю ширину и определенную «форму» — определенную зависимость спектральной плотности мощности колебания от частоты.

В настоящей главе нашей задачей будет являться определение формы и ширины спектральной линии колебания на основании заданных статистических характеристик флуктуаций амплитуды и частоты. Другими словами, мы здесь не будем рассматривать «динамику» колебания, тех причин, которые приводят к существованию флуктуаций амплитуды и частоты, что является предметом последующих глав, а будем рассматривать лишь «кинематику» колебания.

2. Рассмотрим колебание вида

$$z(t) = R_0 [1 + \alpha(t)] \cos [\omega_0 t + \varphi(t)], \quad (4.1.1)$$

где R_0 , ω_0 — средние постоянные значения амплитуды и частоты. Чтобы $z(t)$ можно было считать синусоидальным колебанием с переменной амплитудой и фазой функции времени $\alpha(t)$ и $\varphi(t)$ должны быть медленными по сравнению с $\cos \omega_0 t$, что и будем считать выполненным. Случайная функция $\alpha(t)$ представляет собой относительные флуктуации частоты, а $\varphi(t)$ — флуктуации фазы, равные

$$\varphi(t) = \int_{t_0}^t v(t) dt, \quad (4.1.2)$$

где $v(t)$ — флуктуации амплитуды. Будем предполагать, что $\langle \alpha(t) \rangle = \langle \varphi(t) \rangle = \langle v(t) \rangle = 0$ и что нам известны функции корреляции (или структурные функции) $\Phi_\alpha(\tau)$, $\Phi_v(\tau)$, $\Phi_{\alpha v}(\tau)$ и соответствующие спектральные плотности $S_\alpha(\omega)$, $S_v(\omega)$, $S_{\alpha v}^0(\omega)$, $S_{\alpha v}^1(\omega)$.

Основной задачей настоящей главы является отыскание спектральной плотности $S_z(\omega)$ колебания $z(t)$. Эту спектральную плотность, отсчитываемую от $\omega = \omega_0$, будем называть также формой спектральной линии, которая будет рассматриваться в силу медленности $\alpha(t)$ и $\varphi(t)$ в полосе частот много меньшей частоты ω_0 .

Вычислим функцию корреляции колебания $z(t)$, принадлежащего ко второй группе сигналов. С помощью формулы (1.4.2), обозначая $t + \tau = t'$, $\alpha(t') = \alpha'$, $\varphi(t') = \varphi'$, $\varphi' - \varphi = \Delta\varphi$, найдем

$$\Phi_z(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \left\langle \frac{1}{2} R_0^2 (1 + \alpha + \alpha' + \alpha\alpha') [\cos(\omega_0\tau + \Delta\varphi) + \right. \\ \left. + \cos[\omega_0(t + t') + \varphi + \varphi']] \right\rangle dt.$$

Нетрудно видеть, что от второго слагаемого (косинус суммы) вклада в $\Phi_z(\tau)$ не будет, поскольку оно явно содержит текущее время.

Раскрывая косинус, получим

$$\Phi_z(\tau) = A^0(\tau) \cos \omega_0\tau - A^1(\tau) \sin \omega_0\tau, \quad (4.1.3)$$

где

$$A^0(\tau) = \frac{1}{2} R_0^2 \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \langle (1 + \alpha + \alpha' + \alpha\alpha') \cos \Delta\varphi \rangle dt \quad (4.1.4)$$

и

$$A^1(\tau) = \frac{1}{2} R_0^2 \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \langle (1 + \alpha + \alpha' + \alpha\alpha') \sin \Delta\varphi \rangle dt \quad (4.1.5)$$

— соответственно четная и нечетная функции аргумента τ .

Мы получили общее определение функций $A^0(\tau)$ и $A^1(\tau)$, справедливое как для стационарных, так и для нестационарных флуктуаций $\alpha(t)$ и $\Delta\varphi$. Приращение фазы $\Delta\varphi$ равно

$$\Delta\varphi = \Delta\varphi(t) = \varphi(t + \tau) - \varphi(t) = \int_t^{t+\tau} \nu(\xi) d\xi \quad (4.1.6)$$

и в общем случае произвольных флуктуаций частоты является нестационарной функцией времени.

Если $\alpha(t)$ и $\Delta\varphi$ являются стационарными и стационарно связанными, вместо (4.1.4) и (4.1.5) имеем

$$A^0(\tau) = \frac{1}{2} R_0^2 \langle (1 + \alpha + \alpha' + \alpha\alpha') \cos \Delta\varphi \rangle, \quad (4.1.7)$$

$$A^1(\tau) = \frac{1}{2} R_0^2 \langle (1 + \alpha + \alpha' + \alpha\alpha') \sin \Delta\varphi \rangle. \quad (4.1.8)$$

3. Подставляя (4.1.3) в (1.4.3), вводя частоту $\Omega = \omega - \omega_0$ и пренебрегая вследствие медленности $\alpha(t)$ и $\varphi(t)$ членами

с $\cos(\omega_0 + \omega)\tau$ и $\sin(\omega_0 + \omega)\tau$, получим

$$S_z(\omega_0 + \Omega) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} A^0(\tau) \cos \Omega\tau d\tau + \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} A^1(\tau) \sin \Omega\tau d\tau.$$

Перейдем от спектральной плотности $S_z(\omega)$, распространенной на положительные и отрицательные частоты, к спектральной плотности $G_z(\omega)$, распространенной только на положительные частоты:

$$G_z(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega < 0, \\ 2S_z(\omega), & \omega \geq 0. \end{cases}$$

Обозначая $W_z(\Omega) \equiv G_z(\omega_0 + \Omega)$, получим следующее окончательное выражение для спектральной плотности $W_z(\Omega)$ — формы спектральной линии колебания:

$$W_z(\Omega) = W_z^0(\Omega) + W_z^1(\Omega), \quad (4.1.9)$$

где

$$W_z^0(\Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} A^0(\tau) \cos \Omega\tau d\tau, \quad (4.1.10)$$

$$W_z^1(\Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} A^1(\tau) \sin \Omega\tau d\tau. \quad (4.1.11)$$

Из (4.1.9) видно, что в общем случае $W_z(\Omega)$ не является четной функцией Ω , т. е. в общем случае спектральная линия колебания является несимметричной относительно $\Omega=0$ (относительно центральной частоты $\omega=\omega_0$), и у нее можно выделить четную $W_z^0(\Omega)$ и нечетную части $W_z^1(\Omega)$. Общий вид такой формы линии показан на рис. 4.1.

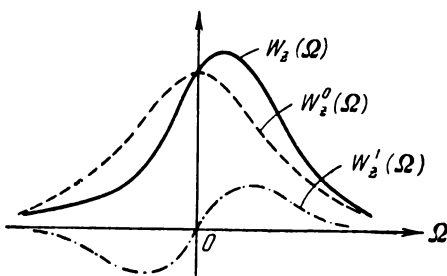


Рис. 4.1.

при $A^1(\tau) \neq 0$. Анализируя (4.1.5), легко видеть следующее: если флуктуации амплитуды и частоты статистически независимы, то

$$A^1(\tau) = \frac{1}{2} R_0^2 \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} [1 + K_a[t, t + \tau]] \langle \sin \Delta\varphi \rangle dt,$$

и это выражение отлично от нуля, если отлично от нуля $\langle \sin \Delta\varphi \rangle$. Последнее зависит от закона распределения флуктуации $v(t)$. Если вероятностное распределение флуктуаций частоты симметрично, то можно показать, что $\langle \sin \Delta\varphi \rangle \equiv 0$. Таким образом, функция $A^1(\tau)$ может быть тождественно не равной нулю при несимметричности распределения флуктуаций частоты.

Тем самым несимметричность распределения флуктуаций частоты $v(t)$ приводит к несимметричности формы спектральной линии колебания.

Если имеется симметричное распределение для v (практически наиболее вероятный случай), то лишь корреляция между $\alpha(t)$ и $v(t)$ может привести к $A^1(\tau) \neq 0$ и, следовательно, к несимметричности формы спектральной линии.

Заметим, что формулы (4.1.10) и (4.1.11) записаны в самой общей форме, они справедливы при любых законах распределения α и v , и поэтому достаточно трудно сделать какие-либо более конкретные выводы о функциях $A^0(\tau)$, $A^1(\tau)$. Анализ этих функций, а следовательно, и $W_z(\Omega)$ удастся провести до конца лишь для немногих частных случаев, большинство из которых мы рассмотрим ниже.

§ 4.2. Спектр колебания, обладающего случайной амплитудой

1. Рассмотрим для общности изложения простейший случай, когда имеются только амплитудные флуктуации, а флуктуации частоты колебания $z(t)$ отсутствуют ($v(t) \equiv 0$):

$$z(t) = R_0 [1 + \alpha(t)] \cos \omega_0 t.$$

В этом случае $\Delta\varphi \equiv 0$ и из (4.1.4), (4.1.5) следует, что

$$A^0(\tau) = \frac{1}{2} R_0^2 [1 + \Phi_\alpha(\tau)],$$

$$A^1(\tau) \equiv 0.$$

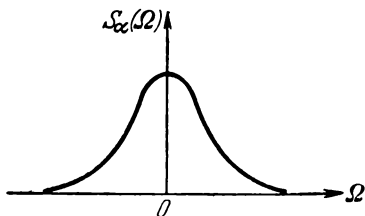


Рис. 4.2.

Спектр колебания $W_z(\Omega)$ является вследствие этого симметричным и равным

$$W_z(\Omega) = W_z^0(\Omega) = \frac{R_0^2}{2} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos \Omega \tau d\tau + \frac{R_0^2}{2} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_\alpha(\tau) \cos \Omega \tau d\tau.$$

Первый интеграл есть дельта-функция, а второй равен спектральной плотности амплитудных флуктуаций $S_\alpha(\Omega)$, имеющей, например, вид, указанный на рис. 4.2. Следовательно,

$$W_z(\Omega) = \frac{R_0^2}{2} \delta(\Omega) + \frac{R_0^2}{2} S_\alpha(\Omega). \quad (4.2.1)$$

В полученном выражении первое слагаемое представляет собой монохроматическую спектральную линию мощности $R_0^2/2$, второе — симметричный пьедестал линии, обязанный флуктуациям

амплитуды колебания (рис. 4.3). Таким образом, при $R_0 \neq 0$ амплитудные флуктуации не «размывают» спектральную линию колебания (ее «ширина» остается равной нулю), а добавляют к монохроматической линии лишь пьедестал, форма которого совпадает с формой спектра амплитудных флуктуаций.

2. Пусть теперь $R_0 = 0$, в то время как амплитудные флуктуации существуют. Этот случай может возникать, в частности, тогда, когда

автогенератор находится на пороге генерации и средняя амплитуда его колебаний равна нулю *). В этом случае для получения спектральной плотности вместо $\alpha(t)$ следует рассматривать $\Delta R(t)$, поскольку

$$R = R_0 + \Delta R(t).$$

Будем считать заданной спектральную плотность абсолютных амплитудных флуктуаций $S_{\Delta R}(\Omega)$. Спектр колебания запишется тогда в общем случае как

$$W_z(\Omega) = \frac{R_0^2}{2} \delta(\Omega) + \frac{1}{2} S_{\Delta R}(\Omega). \quad (4.2.2)$$

При $R_0 = 0$ будем иметь

$$W_z(\Omega) = \frac{1}{2} S_{\Delta R}(\Omega). \quad (4.2.3)$$

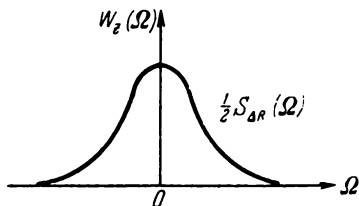


Рис. 4.4.

Полученный спектр колебания совпадает по форме со спектром амплитудных флуктуаций (рис. 4.4). В этом случае можно, вообще говоря, считать, что спектральная линия имеет ширину, равную ширине спектра амплитудных флуктуаций.

3. Несмотря на то, что формулы (4.2.1) и (4.2.3) были получены в предположении существования $\Phi_\alpha(\tau)$, можно показать, что для их справедливости достаточно существования лишь $S_\alpha(\omega)$ или $S_{\Delta R}(\omega)$ для почти всех ω . Так, например, если флуктуации $\alpha(t)$ являются фликкерными со спектральной плот-

*) Амплитуду колебания можно определить так, чтобы она принимала и отрицательные значения.

ностью $S_\alpha(\omega) = A/(2\pi|\omega|^\gamma)$, то форма спектральной линии колебания будет равна

$$W_z(\Omega) = \frac{R_0^2}{2} \delta(\Omega) + \frac{R_0^2}{2} \frac{A}{2\pi|\Omega|^\gamma}. \quad (4.2.4)$$

При этом $\Phi_\alpha(\tau)$, например, для $\gamma \geq 1$, как известно, не существует.

§ 4.3. Спектр колебания, обладающего случайной фазой

1. Рассмотрим колебание, обладающее только фазовыми флуктуациями:

$$z(t) = R_0 \cos[\omega_0 t + \varphi(t)].$$

Согласно (4.1.4) — (4.1.5) имеем

$$A^0(\tau) = \frac{R_0^2}{2} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \langle \cos \Delta\varphi \rangle dt, \quad (4.3.1)$$

$$A^1(\tau) = \frac{R_0^2}{2} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \langle \sin \Delta\varphi \rangle dt.$$

Предположим, что вероятностное распределение $\Delta\varphi$ является нормальным. Тогда (поскольку $\langle \Delta\varphi \rangle = 0$)

$$\begin{aligned} \langle \sin \Delta\varphi \rangle &= 0, \\ \langle \cos \Delta\varphi \rangle &= \exp\left[-\frac{1}{2} \langle \Delta\varphi^2 \rangle\right] = \exp[-d_\varphi[t, t; \tau]]. \end{aligned} \quad (4.3.2)$$

В этом случае

$$A^1(\tau) \equiv 0, \quad A^0(\tau) = \frac{R_0^2}{2} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} e^{-d_\varphi[t, t; \tau]} dt \quad (4.3.3)$$

и форма спектральной линии является симметричной. Пусть теперь флуктуации фазы обладают стационарными приращениями ($\Delta\varphi$ — стационарный процесс); тогда (см. (1.6.4), (1.6.1))

$$d_\varphi[t, t; \tau] = d_\varphi[0; \tau] = \Delta_\varphi(0, \tau) \equiv \chi(\tau), \quad (4.3.4)$$

и, следовательно,

$$A^0(\tau) = A_\chi^0(\tau) \equiv \frac{R_0^2}{2} \exp[-\chi(\tau)]. \quad (4.3.5)$$

Форма спектральной линии исследуемого колебания равна, таким образом,

$$W_z(\Omega) = W_{z\chi}^0(\Omega) \equiv \frac{R_0^2}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[-\chi(\tau)] \cos \Omega\tau d\tau \quad (4.3.6)$$

и полностью определяется функцией $\chi(\tau)$ — структурной функцией второго рода флуктуаций частоты (дисперсией уходов фазы за время τ).

На основании свойств структурной функции нетрудно убедиться в следующих свойствах функции $\chi(\tau)$:

- 1) $\chi(0) = 0,$
- 2) $\chi(\tau) \geq 0,$
- 3) $\chi(\tau) = \chi(-\tau).$

Поведение $\chi(\tau)$ при $\tau \rightarrow \infty$ существенно зависит от характера фазовых флуктуаций. Так, например, для стационарных фазовых флуктуаций, для которых существует при всех τ функция корреляции, функция $\chi(\tau)$ всегда является ограниченной. Для нестационарных флуктуаций фазы $\chi(\tau)$ может неограниченно возрастать при $\tau \rightarrow \infty$. В настоящем параграфе мы рассмотрим случай ограниченной $\chi(\tau)$.

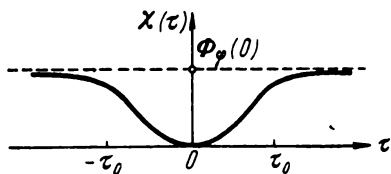


Рис. 4.5.

интенсивностью $\langle \varphi^2 \rangle = \Phi_\varphi(0)$. Тогда на основании определения $\chi(\tau)$ имеем

$$\chi(\tau) = \Phi_\varphi(0) - \Phi_\varphi(\tau).$$

Возможный вид такой $\chi(\tau)$ показан на рис. 4.5. Таким образом, функция $\chi(\tau)$ является ограниченной вследствие ограниченности $\langle \varphi^2 \rangle$. Постоянная τ_0 есть фактически время корреляции фазовых флуктуаций. Для рассматриваемого случая ограниченной $\chi(\tau)$ целесообразно несколько изменить обозначения функций $A_\chi^0(\tau)$ и $W_{z\chi}^0(\tau)$. Будем их записывать как $A_\varphi^0(\tau)$ и $W_{z\varphi}^0(\Omega)$. Смысл этих обозначений будет ясен несколько позже.

Представим экспоненту в (4.3.6) в виде

$$\begin{aligned} e^{-\chi(\tau)} &= e^{-\Phi_\varphi(0) + \Phi_\varphi(\tau)} = e^{-\langle \varphi^2 \rangle + \Phi_\varphi(\tau)} = e^{-\langle \varphi^2 \rangle} + e^{-\langle \varphi^2 \rangle} = \\ &= e^{-\langle \varphi^2 \rangle} [e^{\Phi_\varphi(\tau)} - 1] + e^{-\langle \varphi^2 \rangle}. \end{aligned} \quad (4.3.7)$$

Тогда интеграл (4.3.6) примет вид

$$\begin{aligned} W_z(\Omega) &= W_{z\varphi}^0(\Omega) = \\ &= \frac{R_0^2}{2} e^{-\langle \varphi^2 \rangle} \delta(\Omega) + \frac{R_0^2}{2} e^{-\langle \varphi^2 \rangle} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [e^{\Phi_\varphi(\tau)} - 1] \cos \Omega \tau d\tau. \end{aligned} \quad (4.3.8)$$

Отсюда видно, что спектр колебания состоит из монохроматической линии мощностью $\frac{R_0^2}{2} \exp[-\langle\varphi^2\rangle]$ и пьедестала, равного второму слагаемому в (4.3.8).

Таким образом, стационарные фазовые флуктуации, так же как и амплитудные флуктуации, не «размывая» спектральной линии колебания, образуют лишь дополнительный пьедестал.

Ограниченности $\langle\varphi^2\rangle$ соответствует ограниченность $\Phi_\varphi(\tau)$, вследствие чего квадратную скобку подынтегрального выражения в (4.3.8) можно представить в виде ряда по степеням $\Phi_\varphi(\tau)$:

$$e^{\Phi_\varphi(\tau)} - 1 = \Phi_\varphi(\tau) + \frac{1}{2!} \Phi_\varphi^2(\tau) + \dots + \frac{1}{k!} \Phi_\varphi^k(\tau) + \dots$$

Подставляя этот ряд в интеграл (4.3.8), нетрудно получить с помощью формул (III. 4), (III. 7)

$$\begin{aligned} W_z(\Omega) = W_{z\varphi}^0(\Omega) = & \frac{R_0^2}{2} e^{-\langle\varphi^2\rangle} \delta(\Omega) + \\ & + \frac{R_0^2}{2} e^{-\langle\varphi^2\rangle} S_\varphi(\Omega) + \frac{R_0^2}{2} e^{-\langle\varphi^2\rangle} \frac{1}{2!} \int_{-\infty}^{+\infty} S_\varphi(u) S_\varphi(\Omega - u) du + \\ & + \frac{R_0^2}{2} e^{-\langle\varphi^2\rangle} \frac{1}{3!} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} S_\varphi(v) S_\varphi(u \pm v) S_\varphi(\Omega \pm u) dv du + \dots \quad (4.3.9) \end{aligned}$$

Таково точное выражение формы спектральной линии через спектральную плотность фазовых флуктуаций. Для его справедливости достаточно конечности $\langle\varphi^2\rangle$ и существования $S_\varphi(\Omega)$ для почти всех Ω .

Если интенсивность фазовых флуктуаций мала, так что $\langle\varphi^2\rangle \ll 1$, то можно ограничиться двумя первыми членами ряда (4.3.9)

$$\begin{aligned} W_z(\Omega) = W_{z\varphi}^0(\Omega) = & \frac{R_0^2}{2} [1 - \langle\varphi^2\rangle] \delta(\Omega) + \frac{R_0^2}{2} S_\varphi(\Omega) = \\ = & \frac{R_0^2}{2} [\delta(\Omega) + S_\varphi(\Omega)]. \quad (4.3.10) \end{aligned}$$

В этом случае форма пьедестала точно совпадает с формой спектра фазовых флуктуаций.

Сравнивая (4.3.10) с (4.2.1), видим полное сходство влияния амплитудных и малых фазовых флуктуаций на спектр колебания.

3. Если теперь не ограничиваться стационарными фазовыми флуктуациями, а просто предполагать ограниченность $\chi(\tau)$, результаты будут схожими. В самом деле, пусть

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \chi(\tau) = \chi_{\infty} < \infty.$$

Тогда, вводя

$$\kappa(\tau) = \chi_{\infty} - \chi(\tau) = \Delta_{\varphi}(0, \infty) - \Delta_{\varphi}(0, \tau),$$

найдем

$$A_{\varphi}^0(\tau) = \frac{R_0^2}{2} e^{-\chi_{\infty}} + \frac{R_0^2}{2} e^{-\chi_{\infty}} [e^{\chi(\tau)} - 1]. \quad (4.3.11)$$

Форму спектральной линии, согласно (4.3.6), можно записать тогда в виде

$$W_z(\Omega) = W_{z\varphi}^0(\Omega) = \frac{R_0^2}{2} e^{-\chi_{\infty}} \delta(\Omega) + S_{z\varphi}^0(\Omega), \quad (4.3.12)$$

где

$$S_{z\varphi}^0(\Omega) = \frac{R_0^2}{2} e^{-\chi_{\infty}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [e^{\chi(\tau)} - 1] \cos \Omega \tau d\tau. \quad (4.3.13)$$

Если при этом $\chi_{\infty} \ll 1$, то

$$W_z(\Omega) = W_{z\varphi}^0(\Omega) = \frac{R_0^2}{2} \delta(\Omega) + \frac{R_0^2}{2} S_{\varphi}(\Omega), \quad (4.3.14)$$

поскольку на основании формулы (1.6.10)

$$\begin{aligned} S_{z\varphi}^0(\Omega) &\approx \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \kappa(\tau) \cos \Omega \tau d\tau = \\ &= \frac{1}{2\pi} \oint_{-\infty}^{+\infty} [\Delta_{\varphi}(0, \infty) - \Delta_{\varphi}(0, \tau)] \cos \Omega \tau d\tau = S_{\varphi}(\Omega). \end{aligned}$$

Таким образом, и в этом случае спектр колебания состоит из монохроматической линии и пьедестала.

Если в рассмотренных случаях монохроматическую линию считать сигналом, то полученный пьедестал можно рассматривать как аддитивный к сигналу амплитудный или фазовый шум.

Следует заметить, что такая терминология довольно часто встречается в литературе, особенно зарубежной. Как следует из вышеизложенного, амплитудные флуктуации колебания всегда можно трактовать как некоторый аддитивный «амплитудный шум». Что касается аддитивных «фазовых шумов генера-

тора», то такая трактовка фазовых флуктуаций генератора справедлива, как показано, лишь для ограниченных фазовых флуктуаций, когда $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \chi(\tau)$ является конечной величиной.

§ 4.4. Спектр колебания, обладающего флуктуациями амплитуды и фазы

Рассмотрим случай, когда колебание $z(t)$ обладает и флуктуациями амплитуды, и флуктуациями фазы:

$$z(t) = R_0 [1 + a(t)] \cos [\omega_0 t + \varphi(t)].$$

В этом случае следует обращаться к формулам (4.1.4) — (4.1.5).

1. Пусть флуктуации амплитуды и фазы статистически независимы. Тогда

$$A^0(\tau) = \frac{R_0^2}{2} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \{1 + K_a[t, t + \tau]\} \langle \cos \Delta\varphi \rangle dt,$$

$$A^1(\tau) = \frac{R_0^2}{2} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \{1 + K_a[t, t + \tau]\} \langle \sin \Delta\varphi \rangle dt.$$

Ограничимся случаем нормального симметричного распределения приращений фазы $\Delta\varphi$, которые будем считать стационарными (фаза φ обладает стационарными приращениями). Предыдущие формулы принимают тогда вид (см. (4.3.5))

$$A^0(\tau) = A_{\chi}^0(\tau) + A_{\chi}^0(\tau) \Phi_a(\tau), \quad A^1(\tau) \equiv 0. \quad (4.4.1)$$

Форма спектра колебания получается, таким образом, симметричной и находится путем фурье-преобразования (4.4.1):

$$W_z(\Omega) = W_{z\chi}^0(\Omega) + \int_{-\infty}^{+\infty} W_{z\chi}^0(u) S_a(\Omega - u) du. \quad (4.4.2)$$

Спектр колебания со статистически независимыми амплитудными и фазовыми флуктуациями состоит, как следует из (4.4.2), из спектра, обязанного только фазовым флуктуациям, и свертки его со спектром амплитудных флуктуаций.

Рассмотрим теперь случай ограниченной $\chi(\tau)$. Используя (4.3.12) и (4.3.13), имеем

$$\begin{aligned} W_z(\Omega) = W_{z\varphi}^0(\Omega) &= \frac{R_0^2}{2} e^{-\chi_{\infty}} \delta(\Omega) + S_{z\varphi}^0(\Omega) + \\ &+ \frac{R_0^2}{2} e^{-\chi_{\infty}} S_a(\Omega) + \int_{-\infty}^{+\infty} S_{z\varphi}^0(u) S_a(\Omega - u) du. \end{aligned}$$

Полученное выражение позволяет утверждать, что спектр колебания в этом случае состоит из монохроматической линии, пьедестала, обязанного только флуктуациям фазы, пьедестала, обязанного только флуктуациям амплитуды и свертки фазового и амплитудного пьедесталов.

Если флуктуации фазы являются малыми ($\chi_\infty \ll 1$), то последняя формула на основании (4.3.14) принимает наиболее простой и ясный вид:

$$W_{zf}^0(\Omega) = \frac{R_0^2}{2} \{ \delta(\Omega) + S_a(\Omega) + S_\varphi(\Omega) \}, \quad (4.4.3)$$

а спектр состоит из монохроматической линии и суммы пьедесталов — амплитудного и фазового.

2. Случай статистической зависимости амплитудных и фазовых флуктуаций в общем случае не поддается обозримому анализу — до конца удастся рассмотреть лишь некоторые частные случаи.

Наиболее общим из этих частных случаев является случай нормально распределенных стационарных и стационарно связанных амплитудных флуктуаций $\alpha(t)$ и фазовых приращений $\Delta\varphi$. Будем предполагать, что нам заданы $\Phi_\alpha(\tau)$, $\Phi_{\alpha\Delta\varphi}(\tau)$ и $\chi(\tau)$.

На основании (4.1.7) и (4.1.8)

$$A^0(\tau) = \frac{1}{2} R_0^2 [\langle \cos \Delta\varphi \rangle + \langle (\alpha + \alpha') \cos \Delta\varphi \rangle + \langle \alpha\alpha' \cos \Delta\varphi \rangle],$$

$$A^1(\tau) = \frac{1}{2} R_0^2 [\langle \sin \Delta\varphi \rangle + \langle (\alpha + \alpha') \sin \Delta\varphi \rangle + \langle \alpha\alpha' \sin \Delta\varphi \rangle].$$

Воспользовавшись формулами (VI.5), (VI.7), можно найти

$$\begin{aligned} A^0(\tau) &= \frac{1}{2} R_0^2 [1 + \Phi_\alpha(\tau) - \Phi_{\alpha\Delta\varphi}(\tau) \Phi_{\alpha'\Delta\varphi}(\tau)] \exp[-\chi(\tau)], \\ A^1(\tau) &= \frac{1}{2} R_0^2 [\Phi_{\alpha\Delta\varphi}(\tau) + \Phi_{\alpha'\Delta\varphi}(\tau)] \exp[-\chi(\tau)]. \end{aligned} \quad (4.4.4)$$

Таким образом, прежде всего, видно, что форма спектра $z(t)$ при произвольной корреляции между $\alpha(t)$ и $\Delta\varphi$ несимметрична. Для выяснения влияния корреляции α и $\Delta\varphi$ на форму спектральной линии, полученные формулы запишем в несколько ином виде:

$$A^0(\tau) = A_\chi^0(\tau) + A_\chi^0(\tau) \Phi_\alpha(\tau) - A_\chi^0(\tau) \Phi_{\alpha\Delta\varphi}(\tau) \Phi_{\alpha'\Delta\varphi}(\tau),$$

$$A^1(\tau) = A_\chi^0(\tau) [\Phi_{\alpha\Delta\varphi}(\tau) + \Phi_{\alpha'\Delta\varphi}(\tau)].$$

Нетрудно видеть, что $\Phi_{\alpha'\Delta\varphi}(\tau) = -\Phi_{\alpha\Delta\varphi}(-\tau)$. Следовательно, $\Phi_{\alpha\Delta\varphi}(\tau) + \Phi_{\alpha'\Delta\varphi}(\tau) = 2\Phi_{\alpha\Delta\varphi}^1(\tau)$ — нечетная функция τ , а

$\Phi_{\alpha \Delta \varphi}(\tau) \Phi_{\alpha' \Delta \varphi}(\tau) = -\Phi_{\alpha \Delta \varphi}(\tau) \Phi_{\alpha \Delta \varphi}(-\tau) = -[\Phi_{\alpha \Delta \varphi}^{02}(\tau) - \Phi_{\alpha \Delta \varphi}^{12}(\tau)]$ — четная функция τ . Тем самым

$$\begin{aligned} A^0(\tau) &= A_{\chi}^0(\tau) + A_{\chi}^0(\tau) \Phi_{\alpha}(\tau) + [\Phi_{\alpha \Delta \varphi}^{02}(\tau) - \Phi_{\alpha \Delta \varphi}^{12}(\tau)] A_{\chi}^0(\tau), \\ A^1(\tau) &= 2\Phi_{\alpha \Delta \varphi}^1(\tau) A_{\chi}^0(\tau). \end{aligned} \quad (4.4.5)$$

Сравнивая (4.4.5) с (4.4.1), видим, что корреляция между α и $\Delta \varphi$ вносит свой вклад в симметричную часть спектра и существенно определяет несимметричную часть.

Для нахождения формы спектра следует взять фурье-сопряженное от обеих формул (4.4.5). На основании формул (III.4) — (III.8) получаем

$$\begin{aligned} W_z^0(\Omega) &= W_{z\chi}^0(\Omega) + \int_{-\infty}^{+\infty} W_{z\chi}^0(u) S_{\alpha}(\Omega - u) du + \\ &+ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} W_{z\chi}^0(v) S_{\alpha \Delta \varphi}^0(u - v) S_{\alpha \Delta \varphi}^0(\Omega \pm u) dv du - \\ &- \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{\alpha \Delta \varphi}^1(v) S_{\alpha \Delta \varphi}^1(u - v) W_{z\chi}^0(\Omega \pm u) dv du, \\ W_z^1(\Omega) &= 2 \int_{-\infty}^{+\infty} W_{z\chi}^0(u) S_{\alpha \Delta \varphi}^1(\Omega - u) du. \end{aligned} \quad (4.4.6)$$

Полученные формулы (4.4.5) и (4.4.6) справедливы при любом $\chi(\tau)$.

3. Пусть стационарными являются не только приращения фазы $\Delta \varphi$, но и сами флуктуации фазы $\varphi(t)$, и пусть существуют для всех τ функции корреляции $\Phi_{\varphi}(\tau)$ и $\Phi_{\alpha \varphi}(\tau)$. Тогда

$$\chi(\tau) = \Phi_{\varphi}(0) - \Phi_{\varphi}(\tau)$$

является ограниченной величиной, в $W_{z\chi}^0(\tau)$ появляется дельта-функция и $W_z^0(\Omega)$ состоит, следовательно, из монохроматической линии и сложного пьедестала.

При этом нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} \Phi_{\alpha \Delta \varphi}(\tau) &= \Phi_{\alpha \varphi}(\tau) - \Phi_{\alpha \varphi}(0), \quad \Phi_{\alpha' \Delta \varphi}(\tau) = \Phi_{\alpha \varphi}(0) - \Phi_{\alpha \varphi}(-\tau), \\ \Phi_{\alpha \Delta \varphi}^0(\tau) &= \Phi_{\alpha \varphi}^0(\tau) - \Phi_{\alpha \varphi}^0(0), \quad \Phi_{\alpha \Delta \varphi}^1(\tau) = \Phi_{\alpha \varphi}^1(\tau). \end{aligned} \quad (4.4.7)$$

Если теперь, предполагая существование χ_{∞} , ограничиться случаем $\chi_{\infty} \ll 1$, то, согласно (4.3.11),

$$A_{\chi}^0(\tau) = A_{\varphi}^0(\tau) = \frac{R_0^2}{2} [1 + \chi(\tau)].$$

Пренебрегая последним слагаемым в первой формуле (4.4.5), получим

$$A^0(\tau) = \frac{R_0^2}{2} [1 + \chi(\tau) + \Phi_a(\tau)], \quad A^1(\tau) = \frac{R_0^2}{2} 2\Phi_{a\varphi}^1(\tau).$$

Отсюда легко получить следующие выражения для компонент формы спектральной линии колебания:

$$W_z^0(\Omega) = \frac{R_0^2}{2} [\delta(\Omega) + S_a(\Omega) + S_\varphi(\Omega)], \quad W_z^1(\Omega) = \frac{R_0^2}{2} 2S_{a\varphi}^1(\Omega). \quad (4.4.8)$$

Сравнивая это с (4.4.3), легко видеть, что при $\chi_\infty \ll 1$ корреляция между амплитудными и фазовыми флуктуациями приводит лишь к несимметричности пьедестала, расположенного около монохроматической линии.

§ 4.5. Спектр колебания, обладающего флуктуациями частоты

Разделение по отдельным параграфам случаев флуктуаций фазы $\varphi(t)$ и флуктуаций частоты $\nu(t)$ является до некоторой степени условным, так как они связаны между собой соотношением

$$\varphi(t) = \int \nu(t) dt$$

и всегда существуют одновременно. Несмотря на это, разделение может быть оправдано хотя бы тем, что спектры колебаний, обладающих флуктуациями фазы и частоты, имеющими совпадающие статистические характеристики, существенно различны. В § 4.3 мы видели, например, что стационарным флуктуациям фазы колебания соответствует спектр, состоящий из монохроматической линии и пьедестала. В настоящем параграфе будет показано, что стационарные флуктуации частоты приводят к размытию спектральной линии; она перестает быть монохроматической, приобретая некоторую ширину $\Delta\Omega > 0$. Это связано с неограниченностью $\chi(\tau)$ или неограниченностью более общей характеристики — $d_\varphi[t, t; \tau]$ при $\tau \rightarrow \infty$.

Таким образом, этот параграф будет отличаться от § 4.3 фактически тем, что здесь мы будем иметь дело с такой $d_\varphi[t, t; \tau]$, которая неограниченно возрастает при $\tau \rightarrow \infty$.

1. Итак, рассмотрим колебание, обладающее флуктуациями частоты:

$$z(t) = R_0 \cos \left[\omega_0 t + \int \nu(t) dt \right].$$

Функции $A^0(\tau)$, $A^1(\tau)$ даются формулами (4.3.1), $\Delta\varphi$ — набег фазы за время τ — формулой (4.1.6).

Предположим, что флуктуации частоты (или фазы) таковы, что существует не равная нулю ширина спектральной линии $\Delta\Omega$. Ширину линии можно определить по-разному. С точки зрения математического анализа наиболее целесообразным будет энергетическое определение. При этом достаточно определить ширину спектральной линии по четной части формы линии $W_z^0(\Omega)$. Заменяем $W_z^0(\Omega)$ равновеликим по площади прямоугольником с высотой $W_z^0(0)$. Тогда ширину этого прямоугольника и примем за ширину спектральной линии $\Delta\Omega$.

Полная площадь под кривой $W_z^0(\Omega)$ (равная площади под кривой $W_z(\Omega)$) есть энергия колебания $z(t)$, равная $R_0^2/2$. Следовательно (см. (4.1.10)),

$$\Delta\Omega = \frac{R_0^2}{2W_z^0(0)} = \frac{\pi R_0^2}{2 \int_0^\infty A^0(\tau) d\tau} = \frac{\pi R_0^2}{2 \int_0^\infty d\tau \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \langle \cos \Delta\varphi \rangle dt}. \quad (4.5.1)$$

Если флуктуации фазы обладают стационарными приращениями, то

$$\Delta\Omega = \frac{\pi}{\int_0^\infty \langle \cos \Delta\varphi \rangle d\tau}. \quad (4.5.2)$$

Если флуктуации $\Delta\varphi$ к тому же нормально распределены, то

$$\Delta\Omega = \frac{\pi}{\int_0^\infty \exp[-\chi(\tau)] d\tau}. \quad (4.5.3)$$

Эта последняя формула позволяет без труда найти условие, накладываемое на $\chi(\tau)$ и необходимое для того, чтобы существовало размытие спектральной линии.

Если, например, $\chi(\tau)$ ограничена при $\tau \rightarrow \infty$ (т. е. существует $\chi_\infty < \infty$), то легко видеть, что интеграл в знаменателе (4.5.3) расходится и, следовательно, ширина спектральной линии $\Delta\Omega$ обращается в нуль. Как было уже показано в § 4.3, этому случаю соответствует наличие монохроматической линии в составе спектра колебания $z(t)$. Таким образом, мы действительно имеем $\Delta\Omega = 0$, если спектр колебания $z(t)$ имеет монохроматическую линию.

Для того чтобы $\Delta\Omega > 0$, необходима конечность интеграла $\int_0^\infty \exp[-\chi(\tau)] d\tau$, что влечет за собой неограниченность $\chi(\tau)$

при $\tau \rightarrow \infty$. Таким образом, спектральная линия колебания размывается только тогда, когда $\chi(\tau) \rightarrow \infty$ при $\tau \rightarrow \infty$.

Это значит, что размывать спектральную линию могут только нестационарные фазовые флуктуации. В самом деле, поскольку $\chi(\tau) = d_\varphi[0; \tau] = \frac{1}{2} \langle [\varphi(t+\tau) - \varphi(t)]^2 \rangle$, полагая, например, $t=0$ и $\varphi(0)=0$, найдем $\chi(t) = \frac{1}{2} \langle \varphi^2(t) \rangle$. Неограниченное возрастание $\chi(t)$ при $t \rightarrow \infty$ означает здесь зависимость $\langle \varphi^2(t) \rangle$ при любом t от времени t (нестационарность фазовых флуктуаций).

Отметим еще также и то, что чем быстрее возрастает $\chi(\tau)$ с ростом τ , тем меньше интеграл в знаменателе (4.5.3) и тем, следовательно, больше ширина линии $\Delta\Omega$.

2. Начнем анализ со случаев, когда $\varphi(t)$ есть процесс со стационарными приращениями, а $\nu(t)$ — флуктуации частоты имеют произвольное распределение. В этом случае

$$A^0(\tau) = \frac{R_0^2}{2} \langle \cos \Delta\varphi \rangle, \quad A^1(\tau) = \frac{R_0^2}{2} \langle \sin \Delta\varphi \rangle \quad (4.5.4)$$

и компоненты формы спектральной линии равны

$$\begin{aligned} W_z^0(\Omega) &= \frac{R_0^2}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \langle \cos \Delta\varphi \rangle \cos \Omega\tau \, d\tau, \\ W_z^1(\Omega) &= \frac{R_0^2}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \langle \sin \Delta\varphi \rangle \sin \Omega\tau \, d\tau. \end{aligned} \quad (4.5.5)$$

Рассмотрим первый предельный случай: флуктуации частоты ν представляют собой сколь угодно медленный стационарный процесс. Пусть закон распределения ν произволен и плотность вероятности равна $W_\nu(\nu)$. Для сколь угодно медленного процесса

$$\Delta\varphi = \int_t^{t+\tau} \nu(\xi) \, d\xi = \nu\tau.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} A^0(\tau) &= \frac{1}{2} R_0^2 \langle \cos \nu\tau \rangle = \frac{1}{2} R_0^2 \int \cos \nu\tau W_\nu(\nu) \, d\nu = \\ &= \frac{1}{2} R_0^2 \int W_\nu^0(\nu) \cos \nu\tau \, d\nu, \\ A^1(\tau) &= \frac{1}{2} R_0^2 \langle \sin \nu\tau \rangle = \frac{1}{2} R_0^2 \int W_\nu(\nu) \sin \nu\tau \, d\nu = \\ &= \frac{1}{2} R_0^2 \int W_\nu^1(\nu) \sin \nu\tau \, d\nu, \end{aligned}$$

где $W_v^0(v)$ и $W_v^1(v)$ — четная и нечетная компоненты плотности вероятности $W_v(v) = W_v^0(v) + W_v^1(v)$. Полученные формулы показывают, что $A^0(\tau)$ есть фурье-сопряженная $W_v^0(v)$, а $A^1(\tau)$ — фурье-сопряженная $W_v^1(v)$. С другой стороны, формулы (4.1.10) и (4.1.11) показывают, что $A^0(\tau)$ и $A^1(\tau)$ являются фурье-сопряженными $W_z^0(\Omega)$ и $W_z^1(\Omega)$. Следовательно, $W_z^0(\Omega)$ и $W_z^1(\Omega)$ пропорциональны соответственно $W_v^0(v)$ и $W_v^1(v)$. Определяя коэффициент пропорциональности из условия нормировки, получим

$$W_z^0(\Omega) = \frac{R_0^2}{2} W_v^0(\Omega), \quad W_z^1(\Omega) = \frac{R_0^2}{2} W_v^1(\Omega).$$

Складывая эти равенства, найдем

$$W_z(\Omega) = \frac{R_0^2}{2} W_v(\Omega). \quad (4.5.6)$$

Форма спектральной линии колебания, обладающего сколь угодно медленными флуктуациями частоты, совпадает с формой их вероятностного распределения. Этот случай может быть назван случаем технических флуктуаций частоты, поскольку, как будет видно дальше, в автогенераторах медленные квазистатические флуктуации частоты порождаются в основном фликкерным шумом — «техническими» причинами. На основании (4.5.1) ширина этой спектральной линии равна $\Delta\Omega = W_v^{-1}(0)$.

В обычном предположении нормального закона распределения флуктуаций частоты мы получаем известную доплеровскую или гауссову, или техническую форму (1950 [2, 3]) спектральной линии, равную

$$W_z(\Omega) = \frac{R_0^2}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi \langle v^2 \rangle}} e^{-\frac{1}{2} \frac{\Omega^2}{\langle v^2 \rangle}} \quad (4.5.7)$$

с шириной

$$\Delta\Omega = \sqrt{2\pi \langle v^2 \rangle}, \quad (4.5.8)$$

где $\langle v^2 \rangle$ — дисперсия флуктуаций частоты, которую мы предполагаем известной.

Рассмотрим теперь второй предельный случай. Будем считать флуктуации частоты $v(t)$ сколь угодно быстрым дельта-коррелированным случайным стационарным процессом с функцией корреляции, равной

$$\Phi_v(\tau) = D\delta(\tau);$$

при этом закон распределения $v(t)$ полагаем произвольным. В этом случае набег фазы $\Delta\phi$, заданный формулой (4.1.6), представляет собой сумму бесконечно большого числа независимых

случайных величин и вследствие этого имеет нормальное распределение независимо от распределения $v(t)$.

Если флуктуации частоты $v(t)$ представляют собой стационарный процесс и почти для всех τ существует $\Phi_v(\tau)$, то $\chi(\tau)$ нетрудно выразить через $\Phi_v(\tau)$. Возводя $\Delta\varphi$ в квадрат и усредняя, найдем с помощью (II. 10)

$$\chi(\tau) = \frac{1}{2} \langle \Delta\varphi^2 \rangle = \frac{1}{2} \int_t^{t+\tau} \int_t^{t+\tau} \Phi_v(\xi - \eta) d\xi d\eta = \frac{1}{2} \int_{-\tau}^{+\tau} (\tau - |\xi|) \Phi_v(\xi) d\xi. \quad (4.5.9)$$

Нетрудно выразить $\chi(\tau)$ через спектральную плотность флуктуаций частоты $S_v(\omega)$. Подставляя в (4.5.9) выражение $\Phi_v(\tau)$ через $S_v(\omega)$ и интегрируя по τ , получим

$$\frac{1}{2} \langle \Delta\varphi^2 \rangle = \chi(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - \cos \omega\tau}{\omega^2} S_v(\omega) d\omega = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \sin^2 \frac{\omega\tau}{2} S_v(\omega) \frac{d\omega}{\omega^2}. \quad (4.5.10)$$

Помимо свойств функции $\chi(\tau)$, указанных в § 4.3, на основании (4.5.9), нетрудно обнаружить также еще и следующие свойства:

$$\frac{d}{d\tau} \chi(\tau) = \int_0^\tau \Phi_v(x) dx, \quad \left[\frac{d}{d\tau} \chi(\tau) \right]_{\tau=0} = 0. \quad (4.5.11)$$

$$\frac{d^2}{d\tau^2} \chi(\tau) = \Phi_v(\tau), \quad \left[\frac{d^2}{d\tau^2} \chi(\tau) \right]_{\tau=0} = \langle v^2 \rangle. \quad (4.5.12)$$

Формулы (III. 33) — (III. 37) при замене $x(t) \rightarrow v(t)$, $\Delta_v(0, \tau) \rightarrow \chi(\tau)$ дают значения $\chi(\tau)$ для различных случаев функций корреляции флуктуаций частоты.

Для дельта-коррелированных флуктуаций частоты имеем из (4.5.9)

$$\chi(\tau) = \frac{1}{2} D |\tau|.$$

Эта формула выражает собой так называемый диффузионный закон флуктуаций фазы — средний квадрат набег фазы за время τ пропорционален τ .

Вследствие нормальности распределения $\Delta\varphi$ имеем

$$\langle \cos \Delta\varphi \rangle = \exp \left[-\frac{D}{2} |\tau| \right], \quad \langle \sin \Delta\varphi \rangle = 0.$$

Принимая во внимание (4.5.5), получим окончательно

$$W_z(\Omega) = \frac{R_0^2}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{1}{2}D|\tau|\right] \cos \Omega\tau d\tau = \frac{R_0^2}{2\pi} \frac{D/2}{(D/2)^2 + \Omega^2}. \quad (4.5.13)$$

Полученная форма линии является известной лоренцевой или резонансной (называемой также и естественной) формой спектральной линии. Как следует из вышеннеложенного, для ее реализации достаточно лишь предположения о дельта-коррелированности флуктуаций частоты. На основании (4.5.3) ширина этой спектральной линии равна

$$\Delta\Omega = \frac{\pi D}{2}. \quad (4.5.14)$$

Вышеприведенными двумя предельными случаями и ограничивается рассмотрение формы спектральной линии колебания при произвольном законе распределения флуктуаций частоты.

3. Значительно более подробный анализ $W_z(\Omega)$ удастся провести только для нормально распределенных стационарных флуктуаций частоты. К рассмотрению этих случаев и перейдем. Пусть флуктуации частоты $\nu(t)$ являются стационарными, нормально распределенными $\langle \nu(t) \rangle = 0$ с заданной функцией корреляции $\Phi_\nu(\tau)$ и спектральной плотностью $S_\nu(\Omega)$. На основании (4.1.6) набег фазы $\Delta\phi$ будет стационарным процессом, имеющим нормальное симметричное распределение. Следовательно, форма спектральной линии колебания будет описываться формулой (4.3.6), а ширина — формулой (4.5.3).

Объединяя (4.3.6) и (4.5.9), получим следующее выражение для формы спектральной линии:

$$W_z(\Omega) = \frac{R_0^2}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\int_0^\tau (\tau - \xi) \Phi_\nu(\xi) d\xi\right] \cos \Omega\tau d\tau, \quad (4.5.15)$$

которое и будем анализировать.

Рассмотрим, как влияют те или иные характеристики флуктуаций частоты на форму линии $W_z(\Omega)$. Пусть функция корреляции $\Phi_\nu(\tau)$ имеет вид, изображенный на рис. 4.6. Определим

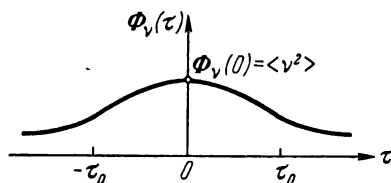


Рис. 4.6.

время корреляции τ_0 как

$$\tau_0 = \frac{1}{2\Phi_v(0)} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_v(\tau) d\tau = \frac{\pi S_v(0)}{\langle v^2 \rangle}. \quad (4.5.16)$$

Пусть спектральная плотность $S_v(\Omega)$ в свою очередь имеет вид, указанный на рис. 4.7. Определим теперь ширину спектра флуктуаций частоты как $\Omega_0 = \tau_0^{-1}$. Тогда, очевидно,

$$\Omega_0 = \frac{1}{\pi} \frac{\langle v^2 \rangle}{S_v(0)}. \quad (4.5.17)$$

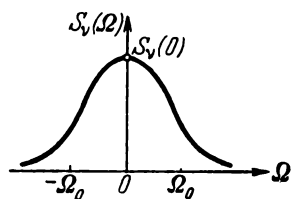


Рис. 4.7.

Пусть спектр флуктуаций частоты таков, что $\pi S_v(0) \gg \Omega_0$ (рис. 4.8). В этом случае с помощью (4.5.16) и (4.5.17) можно получить, что

$$m \equiv \langle v^2 \rangle \tau_0^2 = \frac{\pi S_v(0)}{\Omega_0} \gg 1. \quad (4.5.18)$$

Назовем величину m индексом модуляции.

Случай $m \gg 1$ есть случай медленных (большое τ_0) и больших (большая дисперсия $\langle v^2 \rangle$) флуктуаций частоты. Можно показать (см., например, [80], (1956 [9])), что при выполнении условия (4.5.18) форма спектральной линии приближенно равна

$$W_z(\Omega) = \frac{R_0^2}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi \langle v^2 \rangle}} \exp \left\{ -\frac{\Omega^2}{2 \langle v^2 \rangle} \right\},$$

т. е. совпадает с доплеровской

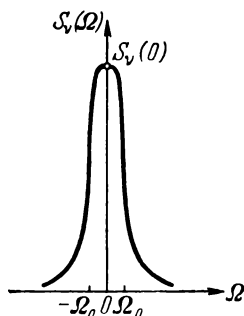


Рис. 4.8.

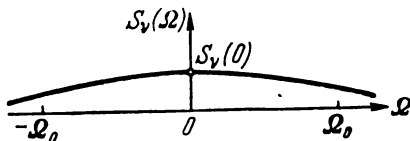


Рис. 4.9.

формой, которую мы получили выше (см. (4.5.7)) в предположении сколь угодно медленных $v(t)$.

Таким образом, первый предельный случай реализуется приближенно при $\pi S_v(0) \gg \Omega_0$.

Пусть теперь спектр флуктуаций частоты является таким, что $\pi S_v(0) \ll \Omega_0$ (рис. 4.9). Тогда

$$m = \langle v^2 \rangle \tau_0^2 \ll 1, \quad (4.5.19)$$

и мы имеем случай быстрых (малые τ_0) и малых (малые $\langle v^2 \rangle$)

флуктуаций частоты. Можно показать тогда, что в этом случае форма спектральной линии колебания приближенно равна (ср. с (4.5.13))

$$W_z(\Omega) = \frac{R_0^2}{2\pi} \frac{\langle v^2 \rangle \tau_0}{(\langle v^2 \rangle \tau_0)^2 + \Omega^2}.$$

Поскольку $\tau_0 \langle v^2 \rangle = \pi S_v(0)$, то, следовательно, форма спектральной линии колебания равна приближенно

$$W_z(\Omega) = \frac{R_0^2}{2\pi} \frac{\pi S_v(0)}{[\pi S_v(0)]^2 + \Omega^2}. \quad (4.5.20)$$

Эта форма линии является резонансной и ее ширина равна

$$\Delta\Omega = \pi^2 S_v(0) = \pi m \Omega_0, \quad (4.5.21)$$

т. е. зависит только от значения спектральной плотности флуктуаций частоты на нулевой частоте.

Таким образом, второй предельный случай, приводящий к резонансной форме спектральной линии, реализуется приближенно при $\pi S_v(0) \ll \Omega_0$, т. е. в этом случае флуктуации частоты можно считать достаточно быстрыми. Спектр флуктуаций частоты колебания, подобный изображенному на рис. 4.9, порождается, как будет показано ниже, тепловыми и дробовыми шумами автогенератора.

Как уже было сказано, для случаев $\pi S_v(0) \gg \Omega_0$ и $\pi S_v(0) \ll \ll \Omega_0$ выражение для $W_z(\Omega)$ описывается соответственно формулами (4.5.7) и (4.5.20) лишь приближенно. Это приближение является достаточно удовлетворительным для центральной части формы линии, когда $\Omega \ll \Omega_0$. Для крыльев линии, когда $\Omega \gg \Omega_0$ точное значение $W_z(\Omega)$, даваемое (4.5.15), сильно отличается от (4.5.7) и (4.5.20). Крылья спектральной линии колебания для любого реального спектра $S_v(\Omega)$ всегда спадают гораздо быстрее (4.5.20) и существенно медленнее (4.5.7). Подробнее вопрос о крыльях спектральной линии будет рассмотрен в § 4.7.

4. Рассмотрим теперь наиболее сложный случай — случай произвольного отношения $\pi S_v(0)/\Omega_0$. Это рассмотрение удастся довести до конца лишь при конкретизации $\Phi_v(\tau)$. Пусть

$$\Phi_v(\tau) = \langle v^2 \rangle e^{-\Omega_0 |\tau|}. \quad (4.5.22)$$

Очевидно, что

$$S_v(\Omega) = \frac{\langle v^2 \rangle}{\pi} \frac{\Omega_0}{\Omega_0^2 + \Omega^2} = S_v(0) \frac{\Omega_0^2}{\Omega_0^2 + \Omega^2}, \quad S_v(0) = \frac{\langle v^2 \rangle}{\pi \Omega_0}.$$

Вычисляя $\chi(\tau)$, например, с помощью (4.5.9), получим для $\tau > 0$

$$\chi(\tau) = m(\Omega_0 \tau - 1 + e^{-\Omega_0 \tau}). \quad (4.5.23)$$

Следовательно, форма спектральной линии будет равна

$$W_z(\Omega) = \frac{R_0^2}{2\pi} e^m \int_0^\infty \exp[m(-\Omega_0\tau - e^{-\Omega_0\tau})] \cos \Omega\tau d\tau.$$

Используя формулу (II.13), можно $W_z(\Omega)$ записать в виде

$$W_z(\Omega) = \frac{R_0^2}{2\pi} e^m \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{(-m)^\lambda}{\lambda!} \frac{\Omega_0(m+\lambda)}{\Omega_0^2(m+\lambda)^2 + \Omega^2}. \quad (4.5.24)$$

Полученный ряд является по существу рядом разложения $W_z(\Omega)$ по резонансным формам спектральной линии возрастающей ширины. Можно показать, что (4.5.24) достаточно быстро сходится при любых m , Ω_0 и Ω . Для последующего анализа удобно, однако, преобразовать полученный ряд. Разлагая дробь на два слагаемых, нетрудно получить

$$W_z(\Omega) = \frac{R_0^2}{2\pi} e^m \Omega_0 m \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{(-m)^\lambda}{\lambda!} \left[\frac{1}{\Omega_0^2(m+\lambda)^2 + \Omega^2} - \frac{1}{\Omega_0^2(m+\lambda+1)^2 + \Omega^2} \right].$$

Окончательное выражение для $W_z(\Omega)$ имеет вид

$$W_z(\Omega) = \frac{R_0^2}{2\pi} e^m m \Omega_0^3 \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{(-m)^\lambda}{\lambda!} \frac{1+2m+2\lambda}{[\Omega_0^2(m+\lambda)^2 + \Omega^2][\Omega_0^2(m+\lambda+1)^2 + \Omega^2]}. \quad (4.5.25)$$

Запишем первые члены этого разложения:

$$\begin{aligned} W_z(\Omega) = \frac{R_0^2}{2\pi} e^m m \Omega_0^3 \left\{ \frac{1+2m}{[\Omega_0^2 m^2 + \Omega^2][\Omega_0^2(m+1)^2 + \Omega^2]} - \right. \\ \left. - m \frac{3+2m}{[\Omega_0^2(m+1)^2 + \Omega^2][\Omega_0^2(m+2)^2 + \Omega^2]} + \right. \\ \left. + \frac{m^2}{2!} \frac{5+2m}{[\Omega_0^2(m+2)^2 + \Omega^2][\Omega_0^2(m+3)^2 + \Omega^2]} + \dots \right\}. \quad (4.5.26) \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь случай малого индекса модуляции m . В ряде (4.5.26) при любых Ω_0 и Ω и при $m \ll 1$ можно ограничиться первым членом разложения:

$$W_z(\Omega) = \frac{R_0^2}{2\pi} \frac{m \Omega_0^3}{[\Omega_0^2 m^2 + \Omega^2][\Omega_0^2 + \Omega^2]}. \quad (4.5.27)$$

Это выражение является при $m \ll 1$ точным. Ширина этой спектральной линии равна примерно $\pi m \Omega_0$.

Выше (см. (4.5.20)) мы получили, как уже было сказано, приближенное выражение для $W_z(\Omega)$ при $m \ll 1$, которое можно записать в виде

$$W_z(\Omega) = \frac{R_0^2}{2\pi} \frac{m\Omega_0}{\Omega_0^2 m^2 + \Omega^2}. \quad (4.5.28)$$

Из сравнения (4.5.27) и (4.5.28) видно, что последнее выражение справедливо лишь при $\Omega^2 \ll \Omega_0^2$, т. е. при достаточно больших значениях Ω_0 . Это имеет место, в частности, в том случае, когда малость индекса модуляции обязана большому значению Ω_0 . В этом случае при $\Omega_0 \rightarrow \infty$ индекс модуляции стремится к нулю, ибо $\Omega_0 m = \pi S_v(0) = \text{const}$, тем самым формула (4.5.20) является справедливой и при достаточно больших Ω . Это имеет место, в частности, для дельта-коррелированных флуктуаций частоты.

Таким образом, малости индекса модуляции m еще не достаточно для существования резонансной формы линии при любых Ω , это будет иметь место только при одновременном выполнении двух условий:

$$m \ll 1, \quad \Omega_0 \rightarrow \infty.$$

Если Ω_0 — полоса флуктуаций частоты конечна, то, согласно (4.5.27), при $m \ll 1$ резонансная форма спектральной линии имеет место только при $\Omega^2 \ll \Omega_0^2$.

При $\Omega^2 \gg \Omega_0^2$

$$W_z(\Omega) = \frac{R_0^2}{2\pi} \frac{m\Omega_0^3}{\Omega^4}, \quad (4.5.29)$$

т. е. при $\Omega \rightarrow \infty$ крылья линии спадают гораздо быстрее резонансной кривой.

Введя безразмерную функцию

$$w(\Omega) = \frac{\Omega_0^4}{[\Omega_0^2 m^2 + \Omega^2][\Omega_0^2 + \Omega^2]},$$

форму спектральной линии (4.5.27) можно представить как

$$W_z(\Omega) = \frac{R_0^2 m}{2\pi\Omega_0} w(\Omega).$$

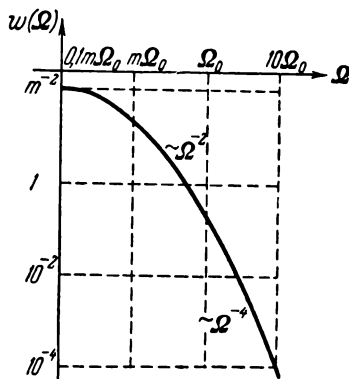


Рис. 4.10.

График $w(\Omega)$ для $\Omega > 0$ показан на рис. 4.10, где использован логарифмический масштаб по обеим осям. Этот график представляет фактически форму спектральной линии (4.5.27).

Перейдем к большому значению индекса модуляции $m \gg 1$. Точное значение $W_z(\Omega)$ при любом m запишется в виде

$$W_z(\Omega) = \frac{R_0^2}{2\pi} \int_0^\infty \exp\{-m(\Omega_0\tau - 1 + e^{-\Omega_0\tau})\} \cos \Omega\tau d\tau.$$

Поскольку $m \gg 1$, то уже при малых значениях τ подынтегральное выражение будет достаточно малым. Принимая во внимание, что для $\Omega_0\tau \ll 1$

$$m(\Omega_0\tau - 1 + e^{-\Omega_0\tau}) \approx m \frac{\Omega_0^2\tau^2}{2!},$$

получим приближенно

$$\begin{aligned} W_z(\Omega) &= \frac{R_0^2}{2\pi} \int_0^\infty \exp\left\{-m \frac{\Omega_0^2\tau^2}{2}\right\} \cos \Omega\tau d\tau = \\ &= \frac{R_0^2}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi m\Omega_0^2}} e^{-\frac{\Omega^2}{2m\Omega_0^2}} = \frac{R_0^2}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi \langle v^2 \rangle}} e^{-\frac{\Omega^2}{2\langle v^2 \rangle}}. \end{aligned} \quad (4.5.30)$$

Это выражение, как и должно быть, совпадает с тем, которое мы получили, рассматривая случай $m \gg 1$ для произвольной $\Phi_v(\tau)$. Полученное выражение справедливо опять-таки только при достаточно малых Ω . При $\Omega \rightarrow \infty$ форма линии $W_z(\Omega)$ уже не может быть представлена (для $m \gg 1$) формулой (4.5.30).

Чтобы найти поведение $W_z(\Omega)$ при любом m и при $\Omega \rightarrow \infty$, возвратимся опять к ряду (4.5.25). Пусть имеем произвольное m . Выберем целое число $N \gg m$. Тогда ряд (4.5.25) можно обрывать на N -м члене и с достаточной степенью точности положить

$$W_z(\Omega) = \frac{R_0^2}{2\pi} e^m m \Omega_0^3 \sum_{\lambda=0}^N \frac{(-m)^\lambda}{\lambda!} \frac{1 + 2m + 2\lambda}{[\Omega_0^2(m + \lambda)^2 + \Omega^2][\Omega_0^2(m + \lambda + 1)^2 + \Omega^2]}.$$

Пусть теперь $\Omega^2 \gg \Omega_0^2(N + 1)^2$, тогда

$$W_z(\Omega) = \frac{R_0^2}{2\pi} e^m m \frac{\Omega_0^3}{\Omega^4} \sum_{\lambda=0}^N \frac{(-m)^\lambda}{\lambda!} (1 + 2m + 2\lambda).$$

Можно показать, что

$$\sum_{\lambda=0}^N \frac{(-m)^\lambda}{\lambda!} (1 + 2m + 2\lambda) = \sum_{\lambda=0}^N \frac{(-m)^\lambda}{\lambda!} + 2m \frac{(-m)^N}{N!}.$$

Следовательно, с достаточной степенью точности

$$e^m \sum_{\lambda=0}^N \frac{(-m)^\lambda}{\lambda!} (1 + 2m + 2\lambda) = 1 + 2m \frac{(-m)^N}{N!} e^m.$$

Если взять теперь $N > me^2$, то, пользуясь формулой Стирлинга $N! = N^N e^{-N} \sqrt{2\pi N}$, можно показать, что

$$\begin{aligned} \left| 2m \frac{(-m)^N}{N!} e^m \right| &= 2 \frac{m^{N+1} e^m}{N!} \ll \frac{m^{N+1} e^{N+1}}{(N+1)!} = \\ &= \left(\frac{me^2}{N+1} \right)^{N+1} \frac{1}{\sqrt{2\pi(N+1)}} \ll 1. \end{aligned}$$

Таким образом, для $\Omega^2 \gg \Omega_0^2(N+1)$, $N \gg m$ и произвольного m спектральная плотность колебания

$$W_z(\Omega) = \frac{R_0^2}{2\pi} \frac{m\Omega_0^3}{\Omega^4} = \frac{R_0^2}{2\pi} \frac{\langle v^2 \rangle \Omega_0}{\Omega^4}. \quad (4.5.31)$$

Мы получили ту же формулу, которую имели при $m \ll 1$, $\Omega^2 \gg \Omega_0^2$. Формула (4.5.31) справедлива при любом m (в том числе и при $m \gg 1$), лишь бы Ω было достаточно велико. Это чрезвычайно примечательный факт. Крылья спектральной линии колебания, для которого $\Phi_v(\tau)$ задана формулой (4.5.22), при $\Omega \rightarrow \infty$ спадают как Ω^{-4} при любых значениях $\langle v^2 \rangle$ и Ω_0 . Ниже будет показано, что закон спада крыльев $\sim \Omega^{-4}$ не является случайным, а связан с тем, что $S_v(\Omega)$ при $\Omega \gg \Omega_0$ спадает как Ω^{-2} .

5. Рассмотрим теперь ширину спектральной линии $W_z(\Omega)$ при произвольном m . На основании (4.5.1) и (4.5.24) легко получить

$$\Delta\Omega = \pi m \Omega_0 B(m), \quad B(m) = \frac{e^{-m}}{\sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{(-m)^\lambda}{\lambda!} \frac{m}{m+\lambda}}. \quad (4.5.32)$$

Для малых m

$$B(m) = 1 - m + 0,5m^2 - 0,416m^3 + \dots \quad (4.5.33)$$

При $m \ll 1$ формула (4.5.32), как и должно быть, переходит в (4.5.21). Знаменатель в (4.5.32) сходится, вообще говоря, при любом m , но для $m \gg 1$ сходимости становится медленной и использование (4.5.32) становится практически невозможным.

В этом случае удобнее выразить $\Delta\Omega$ через ряд по степеням $1/m$. Для нахождения этого ряда поступим следующим образом. Представим функцию $\chi(\tau)$, данную формулой (4.5.23),

в виде ряда по Ω_0

$$\chi(\tau) = \frac{\langle v^2 \rangle}{\Omega_0^2} (e^{-\Omega_0 \tau} - 1 + \Omega_0 \tau) = \langle v^2 \rangle \left(\frac{\tau^2}{2} - \Omega_0 \frac{\tau^3}{3!} + \Omega_0^2 \frac{\tau^4}{4!} - \dots \right).$$

Отсюда находим

$$e^{-\chi(\tau)} = e^{-\langle v^2 \rangle \frac{\tau^2}{2}} \left[1 + \Omega_0 \frac{\langle v^2 \rangle}{6} \tau^3 + \Omega_0^2 \left(-\frac{\langle v^2 \rangle}{24} \tau^4 + \frac{\langle v^2 \rangle^3}{72} \tau^6 \right) + \right. \\ \left. + \Omega_0^3 \left(\frac{\langle v^2 \rangle}{120} \tau^5 - \frac{\langle v^2 \rangle^2}{144} \tau^7 + \frac{\langle v^2 \rangle^3}{1296} \tau^9 + \dots \right] \right].$$

Подставляя это разложение в (4.5.3) и выполняя интегрирование, получим

$$\Delta\Omega = \sqrt{2\pi \langle v^2 \rangle} M(m), \quad (4.5.34)$$

где

$$M(m) = 1 - 0,266 \frac{1}{\sqrt{m}} + 0,084 \frac{1}{m} + 0,153 \frac{1}{m\sqrt{m}} + \dots \quad (4.5.35)$$

При $m \gg 1$, как и следовало ожидать, (4.5.34) переходит в (4.5.8).

Если при $m \gg 1$ ширину линии $\Delta\Omega$ необходимо выразить через $S_v(0)$, то вследствие $\langle v^2 \rangle = \pi^2 S_v^2(0)/m$ будем иметь по-прежнему

$$\Delta\Omega = \pi^2 S_v(0) B(m) = \pi m \Omega_0 B(m),$$

где теперь для $m \gg 1$

$$B(m) = \sqrt{\frac{2\pi}{m}} M(m). \quad (4.5.36)$$

Заметим, что для $m < 0,1$ при нахождении $B(m)$ с достаточной практической точностью можно пользоваться рядом (4.5.33),

а для $m > 10$ — рядом (4.5.35) и формулой (4.5.36). Для $0,1 \leq m \leq 10$ значения $B(m)$, полученные на основании (4.5.32), даны на рис. 4.11.

6. До сих пор мы рассматривали такие стационарные флуктуации частоты, которые обладали «хорошей» функцией корреляции и «хорошим» спектром, обладающими конечными значениями

$\Phi_v(0)$ и $S_v(0)$. Рассмотрим теперь более сложный случай. Пусть стационарные флуктуации частоты имеют спектральную плотность, равную $S_v(\omega) = A/(2\pi |\omega|^\gamma)$, где $0 < \gamma < 1$. Функ-

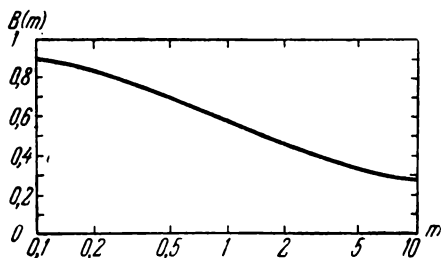


Рис. 4.11.

ция корреляции, соответствующая этому спектру, равна (см. (1.6.18)) $\Phi_v(\tau) = \frac{A}{\pi} \Gamma(1-\gamma) \sin \frac{\pi\gamma}{2} \frac{1}{\tau^{1-\gamma}}$. Для этого спектра и этой функции корреляции трудно определить время корреляции и ширину спектра, поэтому анализ ширины и формы спектральной линии следует вести без их помощи.

Нетрудно вычислить функцию $\chi(\tau)$, выраженную через $S_v(\omega)$ формулой (4.5.10). На основании (II. 21)

$$\chi(\tau) = \frac{A}{2\pi} \oint_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - \cos \omega\tau}{|\omega|^{2+\gamma}} d\omega = \frac{A}{\pi} \oint_0^{\infty} \frac{1 - \cos \omega\tau}{\omega^{2+\gamma}} d\omega = a\tau^{1+\gamma},$$

где

$$a = \frac{A}{2 \sin \frac{\pi(1+\gamma)}{2} \Gamma(2+\gamma)}.$$

В таком случае форма спектральной линии колебания равна

$$W_z(\Omega) = \frac{R_0^2}{2\pi} \int_0^{\infty} \exp[-a\tau^{1+\gamma}] \cos \Omega\tau d\tau. \quad (4.5.37)$$

Ширина спектральной линии равна

$$\Delta\Omega = \pi \left[\int_0^{\infty} \exp[-a\tau^{1+\gamma}] d\tau \right]^{-1} = \pi a^{\frac{1}{1+\gamma}} (1+\gamma) / \Gamma\left(\frac{1}{1+\gamma}\right). \quad (4.5.38)$$

Форма спектральной линии (4.5.37) не поддается непосредственному интегрированию, однако можно видеть, что она лежит как бы между резонансной формой (чему соответствует $\gamma=0$) и доплеровской ($\gamma=1$). Это значит, что она спадает быстрее резонансной и медленнее доплеровской. Более подробно закон ее спадаения будет исследован в § 4.7.

Обратимся к ширине спектральной линии колебания $\Delta\Omega$, которая является конечной величиной для $0 \leq \gamma < 1$. Нетрудно проверить, что при $\gamma \rightarrow 0$ $\Delta\Omega \rightarrow \pi A/2$, как и должно быть для резонансной формы линии. При $\gamma \rightarrow 1$ $\Delta\Omega \rightarrow \infty$, поскольку $a \rightarrow \infty$. Таким образом, при достаточной близости γ к единице ширина спектральной линии (которая по форме приближается к доплеровской) становится сколь угодно большой. Причина этого заключается в том, что при $\gamma=1$ флуктуации частоты становятся нестационарным процессом с неограниченно возрастающей интенсивностью низкочастотных компонент, и необходимо при рассмотрении ширины спектральной линии рассматривать ограниченный отрезок времени.

Тем самым сколь угодно большое $\Delta\Omega$ в (4.5.38) при γ , сколь угодно близком к единице, связано с бесконечностью времени наблюдения.

Если ограничиться конечностью времени наблюдения, то $\Delta\Omega$ получит верхнюю границу и (при γ , сколь угодно близком к единице) не будет ее переходить.

Если же, с другой стороны, ограничиться $0 < \gamma \leq 0,99$, то учета конечности времени наблюдения можно и не делать. Пусть, например, $\gamma = 0,9$, тогда $a \approx \frac{5}{\pi} A$ и $\Delta\Omega \approx 4,5 \sqrt{A}$; при $\gamma = 0,95$ $a \approx \frac{10}{\pi} A$, $\Delta\Omega \approx 6,3 \sqrt{A}$; при $\gamma = 0,99$ $a \approx \frac{50}{\pi} A$, $\Delta\Omega \approx 14 \sqrt{A}$.

7. Перейдем к рассмотрению формы и ширины спектральной линии колебания, обладающего нестационарными флуктуациями частоты. Нестационарность $\nu(t)$ приводит к нестационарности $\Delta\phi$, вследствие чего следует обращаться к формулам (4.3.1).

Поскольку, как уже говорилось, при рассмотрении нестационарных процессов следует учитывать начальные условия, будем полагать, что рассматриваемое колебание «включилось» в момент времени $t=0$. Предположим также, что вероятностное распределение для $\Delta\phi$ является симметричным и нормальным. С учетом этого вместо (4.3.3) будем иметь

$$A^1(\tau) = 0, \quad A^0(\tau) = \frac{1}{2} R_0^2 \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \exp \{-d_\phi[t, t; \tau]\} dt, \quad (4.5.39)$$

где $d_\phi[t, t; \tau]$ — статистическая структурная функция фазовых флуктуаций, зависящая теперь от текущего времени t . Эта зависимость может быть различной, например периодической для периодически нестационарных флуктуаций частоты или монотонной, как это может иметь место для фликкерных флуктуаций частоты. Во всех случаях формула (4.5.39) выражает $A^0(\tau)$ путем вычисления «постоянной составляющей» во времени от $\exp \{-d_\phi[t, t; \tau]\}$. Тем самым $A^0(\tau)$ включает в себя весь промежуток времени $[0, \infty]$ для флуктуаций фазы.

Если флуктуации фазы таковы, что $\lim_{t \rightarrow \infty} d_\phi[t, t; \tau] = \infty$, то, как нетрудно видеть, $A^0(\tau)$, определенное формулой (4.5.39), при $\tau \neq 0$ обращается в нуль — этому соответствует бесконечно большая ширина спектральной линии. Причиной этого может, например, являться то, что за весь бесконечный интервал времени частота $\nu(t)$ уходит от первоначального нулевого (при $t=0$) значения сколь угодно далеко: $\langle \nu^2(t) \rangle \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$. В этом случае целесообразно рассматривать конечный отрезок

времени T и рассматривать $A^0(\tau)$, $W_z(\Omega)$, $\Delta\Omega$ за тот отрезок времени, который является фактически временем наблюдения.

Мы будем рассматривать нестационарные флуктуации частоты фликкерного типа, когда как раз имеет место неограниченное возрастание дисперсии флуктуаций частоты. Поэтому, ограничиваясь конечным временем T , вместо $A^0(\tau)$ будем иметь

$$A^1(T, \tau) \equiv 0, \quad A^0(T, \tau) = \frac{1}{2} R_0^2 \frac{1}{T} \int_0^T \exp \{-d_\varphi[t, t; \tau]\} dt. \quad (4.5.40)$$

Форма спектральной линии теперь зависит от времени наблюдения T и равна

$$W_z(T, \Omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty A^0(T, \tau) \cos \Omega \tau d\tau. \quad (4.5.41)$$

Ширина спектральной линии также зависит от T

$$\Delta\Omega(T) = \frac{\pi R_0^2}{2 \int_0^\infty A^0(T, \tau) d\tau} = \frac{\pi T}{\int_0^\infty d\tau \int_0^T \exp \{-d_\varphi[t, t; \tau]\} dt}. \quad (4.5.42)$$

Нетрудно понять при этом, что $W_z(T, \Omega)$, вычисленная по формуле (4.5.41), может быть сопоставлена с экспериментально определенной $W_z(\Omega)$ лишь для частот $\Omega \gg T^{-1}$, где в этом случае T — продолжительность экспериментально обработанной реализации $z(t)$.

Для тех случаев, когда возрастание $d_\varphi[t, t; \tau]$ с ростом t является сравнительно медленным, также медленно с T меняются $W_z(T, \Omega)$ и $\Delta\Omega(T)$ и их «экспериментальная» ценность, естественно, возрастает. В пределе, когда флуктуации частоты становятся стационарными, $d_\varphi[t, t; \tau]$ не зависит от t , пропадает зависимость от T у $W_z(\Omega)$ и $\Delta\Omega$, а формулы (4.5.40) — (4.5.42) совпадают с (4.5.39), (4.3.6), (4.5.1).

Таким образом, нестационарность фликкерных флуктуаций частоты перешла в нестационарность формы и ширины спектральной линии, которые зависят тем самым от продолжительности работы автогенератора. Полученные формулы (4.5.40) — (4.5.42) предполагают знание статистической структурной функции $d_\varphi[t, t; \tau]$.

Задаваясь флуктуациями частоты, мы будем считать известной $d_\varphi[t_1, t_2; \tau]$. Если предположить, что в момент $t=0$ $\varphi(0)=0$ и

$v(0) = 0$, то, поскольку

$$\varphi(t) = \int_0^t v(\xi) d\xi,$$

на основании (2.2.17)

$$d_\varphi[t, t; \tau] = \tau \int_t^{t+\tau} d_v[0, 0; u] du - \frac{1}{2} \int_t^{t+\tau} \int_t^{t+\tau} d_v[v, v; u-v] du dv.$$

Ограничимся теперь рассмотрением флуктуаций частоты, обладающих стационарными приращениями. Тогда

$$d_\varphi[t, t; \tau] = \tau \int_t^{t+\tau} d_v[0; u] du - \int_0^\tau (\tau - v) d_v[0; v] dv. \quad (4.5.43)$$

Если теперь (4.5.43) подставить в (4.5.40) — (4.5.42), то мы получим значения формы спектральной линии $W_z(T, \Omega)$ и ширины $\Delta\Omega(T)$ для любых значений T (времени наблюдения), начиная с $T=0$. Однако, как уже упоминалось в § 2.2, малым значениям T или t соответствует наличие переходных процессов, связанных с привязкой значений $\varphi(t)$ и $v(t)$ в момент $t=0$. Если переходные процессы не рассматривать, то, согласно (2.2.22), можно взять следующее асимптотическое значение структурной функции:

$$d_\varphi[t, t; \tau] = \tau^2 d_v[0, t]. \quad (4.5.44)$$

Таким образом, если флуктуации частоты таковы, что $d_\varphi[t, t; \tau]$ зависит от t (если, другими словами, флуктуации фазы не имеют стационарных приращений), будем пользоваться формулами (4.5.43) или (4.5.44).

Как уже говорилось в § 2.2, асимптотическая формула (4.5.44), полученная при достаточно большом t (например, при $t > t_0$, где t_0 — большая заданная величина), безусловно справедлива лишь в интервале изменения t , много меньшем t_0 , а также и $\tau \ll t_0$. Это значит, что при применении асимптотической формулы (4.5.44) выражения (4.5.40) — (4.5.42) должны быть записаны в несколько ином виде. А именно, чтобы избежать влияния привязки начальных условий и воспользоваться асимптотической формулой, будем рассматривать реализацию $z(t)$ в интервале времени $[t_0, t_0 + T]$, где считаем t_0 достаточно большой величиной. Таким образом, t_0 — это время, прошедшее с момента привязки нестационарной частоты $v(t)$ до момента анализа спектра колебания $z(t)$. Время T — это продолжительность ана-

лиза спектра. Тогда вместо (4.5.40) — (4.5.42) будем иметь

$$A^0(t_0, \tau) = \frac{1}{2} R_0^2 \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \exp[-d_\varphi[t, t; \tau]] dt. \quad (4.5.45)$$

Подставляя сюда (4.5.44), найдем

$$A^0(t_0, \tau) = \frac{1}{2} R_0^2 \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \exp[-\tau^2 d_v[0; t]] dt.$$

При $t_0 \gg T$ этот интеграл практически не зависит от T и равен

$$A^0(t_0, \tau) = A_v^0(t_0, \tau) \equiv \frac{1}{2} R_0^2 \exp[-\tau^2 d_v[0; t_0]]. \quad (4.5.46)$$

Следовательно, мы можем считать теперь t_0 достаточно большим и пользоваться этой формулой при любом τ .

Подставляя (4.5.46) в (4.5.42) и (4.5.41), найдем

$$\Delta\Omega(t_0) = 2\sqrt{\pi d_v[0; t_0]} \quad (4.5.47)$$

и

$$W_z(t_0, \Omega) = W_{zv}(t_0, \Omega) \equiv \frac{R_0^2}{2} \frac{1}{\Delta\Omega(t_0)} \exp\left[-\frac{\Omega^2}{\Delta\Omega^2(t_0)\pi}\right]. \quad (4.5.48)$$

Таким образом, форма спектральной линии колебания получается доплеровской, если нестационарные флуктуации частоты обладают стационарными приращениями и $d_v[0; t]$ неограниченно возрастает с ростом t .

Форма и ширина спектральной линии зависят от времени t_0 и, как у нас получилось, не зависят от T .

8. Согласно (4.5.47) с ростом t_0 ширина спектральной линии возрастает пропорционально $\sqrt{d_v[0; t_0]}$. Форма линии зависит от t_0 только через $\Delta\Omega(t_0)$ и фактически не меняет своего закона — остается доплеровской.

Если при $t_0 \rightarrow \infty$ $d_v[0; t_0] \rightarrow \infty$, то и $\Delta\Omega(t_0) \rightarrow \infty$. Какова физическая сущность этой расходимости? Обратимся к формулам (4.5.7) и (4.5.8), которые были получены для квазистатических флуктуаций $v(t)$. Нетрудно показать, что они теснейшим образом связаны с формулами (4.5.47) — (4.5.48). В самом деле, возрастание $d_v[0; t]$ с ростом t для флуктуаций частоты со стационарными приращениями (когда $d_v[0; t] = \Delta_v(0, t)$) означает, согласно (1.6.9), неограниченное возрастание $S_v(\omega)$ при $\omega \rightarrow 0$. Это значит, что основная мощность флуктуаций частоты приходится на сколь угодно малые частоты, что позволяет в

свою очередь причислить эти флуктуации к квазистатическим. Более того, поскольку

$$2d_v[0, \tau] = \langle [v(t + \tau) - v(t)]^2 \rangle$$

и вследствие привязки $v(0) = 0$, нетрудно видеть, что

$$2d_v[0; t_0] = \langle v^2(t_0) \rangle.$$

При подстановке этого значения в (4.5.47), (4.5.48) мы получаем формулы (4.5.7) и (4.5.8).

Таким образом, (4.5.47), (4.5.48) фактически распространяют (4.5.7) и (4.5.8) на случай нестационарных флуктуаций частоты (со стационарными приращениями).

Вернемся теперь к вопросу о расходимости $\Delta\Omega$, которая может быть теперь записана как

$$\Delta\Omega(t_0) = \sqrt{2\pi 2\Delta_v(0, t_0)} = \sqrt{2\pi \langle v^2(t_0) \rangle}.$$

Ширина линии $\Delta\Omega$ расходится с ростом t_0 , если расходится $\langle v^2(t_0) \rangle$. Таким образом, все дело в дисперсии флуктуаций частоты, которая вследствие нестационарности зависит от времени. Возьмем, например, частный случай $\langle v^2(t) \rangle = Dt$. В этом случае $v(t)$ может трактоваться как координата броуновской частицы и зависимость $\langle v^2(t) \rangle$ от времени t есть обычный диффузионный закон. Ширина спектральной линии $\Delta\Omega$ тогда пропорциональна расстоянию от начала координат (где была броуновская частица при $t \equiv 0$) до положения броуновской частицы в момент t_0 . Таким образом, расходимость $\Delta\Omega$ с ростом t_0 эквивалентна в рассматриваемом случае уходу броуновской частицы сколь угодно далеко от начала координат с ростом t . Другими словами, в случае нестационарных $v(t)$ со стационарными приращениями мы имеем накопление частотных уходов (аналогично тому, как для стационарных и дельта-коррелированных $v(t)$ мы имели накопление фазовых уходов). Поэтому, хотя $\langle v(t) \rangle = 0$, флуктуации частоты могут уходить в принципе сколь угодно далеко.

Полученную ситуацию можно описать еще и следующим образом. Представим, что имеется ансамбль одинаковых автогенераторов, обладающих фликкерными флуктуациями частоты. В момент $t=0$ все они имели одинаковую частоту, равную ω_0 (т. е. $v(0) = 0$ для каждого отдельного генератора). С ростом t частоты генераторов начинают изменяться по-разному для разных генераторов. Это приводит к тому, что частоты генераторов расплываются по обе стороны от ω_0 . Если теперь в момент t_0 построить кривую распределения частот генераторов, то при большом числе генераторов она будет близка к $W_z(t_0, \Omega)$, а ее ширина к $\Delta\Omega(t_0)$.

9. Рассмотрим теперь некоторые частные случаи. Пусть спектральная плотность флуктуаций частоты, обладающих стационарными приращениями, равна

$$S_{\nu}(\omega) = \frac{A}{2\pi |\omega|^{\gamma}} \quad (1 < \gamma < 3).$$

Структурная функция флуктуаций частоты дается формулой (1.6.16). Подставляя (1.6.16) в (4.5.43), получим

$$d_{\varphi}[t, t; \tau] = B \frac{\tau}{\gamma} [(t + \tau)^{\gamma} - t^{\gamma}] - \frac{B}{\gamma(\gamma + 1)} \tau^{\gamma+1},$$

$$B = \frac{A}{2} \Gamma(\gamma) \sin \frac{\pi}{2} (\gamma - 1).$$

Таково точное значение структурной функции. Согласно (4.5.44) ее асимптотическое значение равно

$$d_{\varphi}[t, t; \tau] = \tau^2 B t^{\gamma-1}$$

и представляет собой первый член следующего разложения точного значения:

$$d_{\varphi}[t, t; \tau] = B t^{\gamma-1} \tau^2 + B \frac{(\gamma-1)}{2!} t^{\gamma-2} \tau^3 +$$

$$+ B \frac{(\gamma-1)(\gamma-2)}{3!} t^{\gamma-3} \tau^4 + \dots - \frac{B}{\gamma(\gamma+1)} \tau^{\gamma+1}.$$

Выше, при нахождении $A^0(T, \tau)$, мы ввели в интеграл величину t_0 , которую полагали достаточно большой. Математическое условие $t_0 \rightarrow \infty$ для рассматриваемого примера на основании сравнения точного значения $d_{\varphi}[t, t; \tau]$ и асимптотического, можем заменить теперь некоторым «физическим» условием.

Подынтегральное выражение в (4.5.45) можно представить как

$$e^{-d_{\varphi}[t, t; \tau]} = e^{-B t^{\gamma-1} \tau^2} e^{-B \frac{(\gamma-1)}{2!} t^{\gamma-2} \tau^3} \dots e^{-B \frac{\tau^{\gamma+1}}{\gamma(\gamma+1)}}. \quad (4.5.49)$$

Эта функция быстро спадает с ростом τ и при большом t основную роль будет играть первый множитель, если, как мы примем для этого примера, γ не очень близко к единице:

$$e^{-d_{\varphi}[t, t; \tau]} \approx e^{-B t^{\gamma-1} \tau^2}. \quad (4.5.50)$$

Это и означает использование асимптотического значения $d_{\varphi}[t, t; \tau]$. Условие ограничения в (4.5.49) первым сомножителем легко определить, если эту формулу записать в виде

$$e^{-d_{\varphi}[t, t; \tau]} = e^{-a_2^2 \tau^2} e^{-a_3^3 \tau^3} e^{-a_4^4 \tau^4} \dots e^{-b^{\gamma+1} \tau^{\gamma+1}},$$

где a_2, a_3, \dots, b — величины, имеющие размерность, обратную τ . Точное выражение (4.5.49) можно заменить приближенным (4.5.50) без большой ошибки (имея в виду интегралы (4.5.45), (4.5.41), (4.5.42)), если

$$a_2 \gg a_3 \gg a_4 \gg \dots, \quad a_2 \gg b.$$

Таким образом, условие применимости асимптотической формулы принимает вид (поскольку $t \in [t_0, t_0 + T]$):

$$\sqrt[2]{B t_0^{\gamma-1}} \gg \sqrt[3]{B t_0^{\gamma-2}} \gg \sqrt[4]{B t_0^{\gamma-3}} \gg \dots, \quad \sqrt[2]{B t_0^{\gamma-1}} \gg \sqrt[{\gamma+1}]{B}.$$

Поскольку B имеет размерность, обратную $|\tau|^{\gamma+1}$, его можно представить в виде $B = \theta_0^{-(\gamma+1)}$, где θ_0 — некоторая постоянная времени, которую считаем известной. (Экспериментально обычно известно B ; тогда θ_0 находится как $B^{-1/(\gamma+1)}$.)

Первые неравенства сводятся к $(t_0/\theta_0)^{(\gamma+1)/4} \gg 1$. Второе неравенство имеет вид $(t_0/\theta_0)^{(\gamma-1)/2} \gg 1$ и является более сильным. Его мы и примем за основное. Таким образом, для того чтобы можно было пользоваться асимптотической формулой для $d_\Phi[t, t; \tau]$, достаточно брать t_0 , удовлетворяющее условию

$$(t_0/\theta_0)^{\frac{\gamma-1}{2}} \gg 1. \quad (4.5.51)$$

При его выполнении, согласно (4.5.47) и (4.5.48), ширина спектральной линии колебания равна

$$\Delta\Omega(t_0) = 2 \sqrt{\pi B t_0^{\gamma-1}} = 2 \sqrt{\frac{\pi A t_0^{\gamma-1}}{2\Gamma(\gamma) \sin \frac{\pi}{2} (\gamma-1)}}. \quad (4.5.52)$$

а форма линии остается доплеровской.

Таким образом, $\Delta\Omega(t_0)$ для рассмотренной спектральной плотности флуктуаций частоты возрастает с ростом времени t как $t_0^{(\gamma-1)/2}$. Чем ближе γ к единице, тем медленнее меняется $\Delta\Omega$ со временем, но тем больше требуется и времени t_0 , начиная с которого становятся верной формула (4.5.52) и доплеровская форма спектральной линии.

10. Возьмем другой частный случай. Пусть флуктуации частоты, обладающие стационарными приращениями, имеют спектральную плотность, равную

$$S_\gamma(\omega) = \frac{A}{2\pi |\omega| (|\omega| + \omega_0)}.$$

Согласно (1.6.23) соответствующую статистическую структурную функцию берем в виде ($\tau > 0$)

$$d_v[0; \tau] = \Delta_v(0; \tau) = \frac{A}{\omega_b \pi} \ln(1 + \omega_b \tau).$$

Подставляя это значение в (4.5.43), найдем

$$d_\varphi[t, t; \tau] = \frac{A}{\pi \omega_b^3} \left\{ \vartheta(1 + \vartheta + \xi) \ln(1 + \vartheta + \xi) - \vartheta(1 + \xi) \ln(1 + \xi) - \right. \\ \left. - \frac{(\vartheta + 1)^2}{2} \ln(1 + \vartheta) + \frac{-\vartheta^2 + 2\vartheta}{4} \right\},$$

где обозначено $\vartheta = \omega_b \tau$, $\xi = \omega_b t$. Асимптотическое значение, равное, согласно (4.5.44),

$$d_\varphi[t, t; \tau] = \frac{A}{\omega_b \pi} \tau^2 \ln(1 + \omega_b t),$$

получается, как можно показать, из точного при $\ln \omega_b t \gg 1$. Тем самым условие, накладываемое на t_0 , имеет вид

$$\ln \omega_b t_0 \gg 1. \quad (4.5.53)$$

Если оно выполнено, то, согласно (4.5.47),

$$\Delta\Omega(t_0) = 2 \sqrt{\frac{A}{\omega_b} \ln(1 + \omega_b t_0)} \approx 2 \sqrt{\frac{A}{\omega_b} \ln \omega_b t_0}, \quad (4.5.54)$$

а форма линии остается доплеровской.

Ширина спектральной линии возрастает с ростом времени t_0 чрезвычайно медленно и даже можно для реальных длительностей эксперимента считать ее постоянной. Как уже указывалось выше, такой процесс мы считаем квазистационарным.

§ 4.6. Спектр колебания, обладающего флуктуациями амплитуды и частоты

Из всех возможных случаев самым сложным является случай, когда $z(t)$ обладает и флуктуациями амплитуды, и флуктуациями частоты (здесь, как и в § 4.5, мы полагаем, что $d_\varphi[t, t; \tau]$ — неограниченно возрастает с ростом τ):

$$z(t) = R_0 [1 + \alpha(t)] \cos \left[\omega_0 t + \int v(t) dt \right].$$

При произвольных корреляциях между $\alpha(t)$ и $v(t)$ и при произвольных распределениях $\alpha(t)$ и $v(t)$, когда мы только обращаемся к (4.1.4), (4.1.5), анализ чрезвычайно затруднителен, и поэтому мы ограничимся рассмотрением лишь некоторых частных случаев.

Прежде всего будем предполагать нормальность и симметричность распределений для $\alpha(t)$ и $v(t)$ (а следовательно, и для $\Delta\varphi$).

1. Пусть флуктуации амплитуды и частоты являются независимыми, а, кроме того, флуктуации частоты являются стационарными. В этом случае фаза φ обладает стационарными приращениями $\Delta\varphi$. Согласно § 4.4 для этого случая имеем

$$W_z(\Omega) = W_{z\chi}^0(\Omega) + \int_{-\infty}^{+\infty} W_{z\chi}^0(u) S_\alpha(\Omega - u) du, \quad (4.6.1)$$

где первое слагаемое дается формулой (4.3.6).

Таким образом, форма спектральной линии колебания с независимыми $\alpha(t)$ и $v(t)$ состоит из двух компонент: из «частотной» формы линии $W_{z\chi}^0(\Omega)$ и свертки ее со спектром амплитудных флуктуаций. В общем случае произвольных $W_{z\chi}^0(\Omega)$ и $S_\alpha(\Omega)$ форма линии $W_z(\Omega)$ довольно сложна и непохожа ни на $W_{z\chi}^0(\Omega)$, ни на $S_\alpha(\Omega)$.

Для реальных автогенераторов, как это будет показано ниже, может быть такой случай, когда ширина спектра $W_{z\chi}^0(\Omega)$ много меньше ширины спектра $S_\alpha(\Omega)$. В этом случае свертка в (4.6.1) существенно упрощается. В самом деле, пусть частотная компонента $W_{z\chi}^0(\Omega)$ отлична от нуля лишь на интервале $[-\Omega_1, +\Omega_1]$ и на интервале такой длины $S_\alpha(\Omega)$ практически постоянно. Тогда

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} W_{z\chi}^0(u) S_\alpha(u - \Omega) du &= \int_{-\Omega_1}^{+\Omega_1} W_{z\chi}^0(\xi) S_\alpha(\xi - \Omega) d\xi = \\ &= S_\alpha(\Omega) \int_{-\Omega_1}^{+\Omega_1} W_{z\chi}^0(\xi) d\xi = A S_\alpha(\Omega), \end{aligned}$$

где A — полная мощность, заключенная в $W_{z\chi}^0(\Omega)$, равная мощности колебания

$$z(t) = R_0 \cos \left[\omega_0 t + \int_0^t v(\xi) d\xi \right].$$

Поскольку $A = R_0^2/2$, то вместо (4.6.1) имеем

$$W_z(\Omega) = W_{z\chi}^0(\Omega) + \frac{1}{2} R_0^2 S_\alpha(\Omega). \quad (4.6.2)$$

Форма спектральной линии исследуемого колебания состоит из узкополосного размытого «пики», обязанного флуктуациям частоты, и относительно малого широкополосного пьедестала,

обязанного амплитудным флуктуациям колебания (рис. 4.12). Такой же пьедестал мы имели и в § 4.2, где вследствие $v(t) \equiv 0$ первым слагаемым в $W_z(\Omega)$ была монохроматическая линия.

2. Пусть теперь флуктуации частоты $v(t)$ и амплитуды $\alpha(t)$ стационарны и коррелированы между собой так, что заданы функции корреляции $\Phi_\alpha(\tau)$, $\Phi_v(\tau)$, а также совместная функция корреляции $\Phi_{\alpha v}(\tau)$.

Формулу (4.4.5), полученную в предположении стационарных и стационарно связанных α и $\Delta\phi$, можно применить и к нашему случаю, ибо стационарность и стационарная связанность α и v ведут к стационарности и стационарной связанности α и $\Delta\phi$.

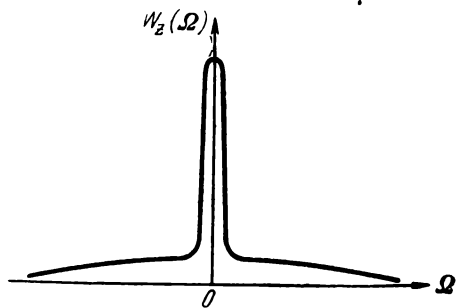


Рис. 4.12.

Для дальнейшего необходимо характеристики $\Delta\phi$ выразить через характеристики v . Нетрудно видеть, что поскольку

$$\Phi_{\alpha \Delta\phi}(\tau) = \int_t^{t+\tau} \Phi_{\alpha v}(x-t) dx = \int_0^\tau \Phi_{\alpha v}(x) dx, \quad (4.6.3)$$

то

$$\Phi_{\alpha \Delta\phi}^0(\tau) = \int_0^\tau \Phi_{\alpha v}^1(x) dx, \quad \Phi_{\alpha \Delta\phi}^1(\tau) = \int_0^\tau \Phi_{\alpha v}^0(x) dx. \quad (4.6.4)$$

Для стационарных $v(t)$ существует

$$\chi(\tau) = \frac{1}{2} \int_{-\tau}^{+\tau} (\tau - |\xi|) \Phi_v(\xi) d\xi, \quad (4.6.5)$$

поэтому основные функции $A^0(\tau)$ и $A^1(\tau)$ с учетом (4.6.4) можем записать в следующем виде (для $\tau > 0$):

$$A^0(\tau) = \frac{R_0^2}{2} \{1 + \Phi_\alpha(\tau) + [\Phi_{\alpha \Delta\phi}^0(\tau)]^2 - [\Phi_{\alpha \Delta\phi}^1(\tau)]^2\} \exp[-\chi(\tau)], \quad (4.6.6)$$

$$A^1(\tau) = \frac{R_0^2}{2} \{2\Phi_{\alpha \Delta\phi}^1(\tau)\} \exp[-\chi(\tau)]. \quad (4.6.7)$$

Полученные формулы дают окончательное выражение для $A^0(\tau)$ и $A^1(\tau)$ при наличии корреляции между нормально распределенными стационарными флуктуациями амплитуды и частоты.

Из этих формул видно, в частности, что, во-первых, только четная часть функции корреляции $\Phi_{\alpha\nu}(\tau)$ может вносить несимметричность в форму спектральной линии колебания, и, во-вторых, что корреляция между $\alpha(t)$ и $\nu(t)$ вносит вклад и в симметричную часть формы спектральной линии.

3. Пусть спектр, заданный спектральной плотностью $W_{z\chi}^0(\Omega)$, существенно шире спектров амплитудных и амплитудно-частотных флуктуаций. Это значит, что функция $A_\chi^0(\tau)$ с ростом τ убывает существенно быстрее, чем изменяются фигурные скобки в формулах (4.6.6) и (4.6.7). Тогда фигурные скобки можно взять при сколь угодно малых значениях τ и эти формулы примут следующий вид:

$$A^0(\tau) = \frac{R_0^2}{2} \exp[-\chi(\tau)] = A_\chi^0(\tau), \quad A^1(\tau) = 2\Phi_{\alpha\nu}^0(0) \tau A_\chi^0(\tau), \quad (4.6.8)$$

если $\Phi_{\alpha\nu}^0(0)$ существует.

Выполняя Фурье-преобразование, получим

$$W_z^0(\Omega) = W_{z\chi}^0(\Omega), \quad W_z^1(\Omega) = -2\Phi_{\alpha\nu}^0(0) \frac{d}{d\Omega} W_{z\chi}^0(\Omega). \quad (4.6.9)$$

Таковы компоненты формы спектральной линии колебания для случая узкополосных амплитудных и амплитудно-частотных флуктуаций.

Если $\Phi_{\alpha\nu}^0(\tau)$ такова, что $\Phi_{\alpha\nu}^0(0)$ не существует, но существует при $\tau \rightarrow +0$ $\Phi_{\alpha\Delta\Phi}^1(\tau) = N\tau^\gamma$, где $\gamma \neq 1$, то

$$A^1(\tau) = 2N |\tau|^\gamma A_\chi^0(\tau) \operatorname{sign} \tau, \quad (4.6.10)$$

и тогда на основании (III.6) и (II.26)

$$W_z^1(\Omega) = -2N\Gamma(\gamma+1) \operatorname{Im} [(-j)^{\gamma+1}] \int_{-\infty}^{+\infty} W_{z\chi}^0(u) \frac{\operatorname{sign}(\Omega-u)}{(\Omega-u)^{\gamma+1}} du. \quad (4.6.11)$$

4. Рассмотрим теперь более подробно случай стационарных и стационарно связанных $\alpha(t)$ и $\nu(t)$, когда ширина спектра $W_{z\chi}^0(\Omega)$ существенно меньше ширины спектра $S_\alpha(\Omega)$ и $S_{\alpha\nu}^{0,1}(\Omega)$. Для корреляционных функций это означает, что $A_\chi^0(\tau)$ много шире функций $\Phi_\alpha(\tau)$ и $\Phi_{\alpha\nu}(\tau)$, которые предполагаем существующими для всех τ .

Обратимся к $\Phi_{\alpha\Delta\Phi}^{0,1}(\Omega)$. На основании (4.6.4) нетрудно убедиться в том, что в общем случае функции $\Phi_{\alpha\Delta\Phi}^{0,1}(\tau)$ ведут себя

следующим образом: они возрастают от нуля (так как $\Phi_{\alpha \Delta \varphi}^{0,1}(0) = 0$) до некоторого значения на интервале, соответствующем времени корреляции функций $\Phi_{\alpha \nu}(\tau)$, а затем сохраняют постоянным это значение. На рис. 4.13 показаны возможные графики этих функций. Указанные функции удобно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned}\Phi_{\alpha \Delta \varphi}^0(\tau) &= \tilde{\Phi}_{\alpha \Delta \varphi}^0(\tau) + C^0, \\ \Phi_{\alpha \Delta \varphi}^1(\tau) &= \tilde{\Phi}_{\alpha \Delta \varphi}^1(\tau) - C^1 \operatorname{sign} \tau,\end{aligned}\quad (4.6.12)$$

где мы считаем C^0, C^1 ограниченными величинами. Ширина введенных таким образом функций $\tilde{\Phi}_{\alpha \Delta \varphi}^{0,1}(\tau)$ равна примерно ширине $\Phi_{\alpha \nu}(\tau)$. Таким образом, в рассматриваемом случае $A_{\chi}^0(\tau)$ много шире $\Phi_{\alpha}(\tau)$ и $\Phi_{\alpha \Delta \varphi}^{0,1}(\tau)$. Это дает возможность записать формулы (4.6.6) и (4.6.7) в следующем виде:

$$\begin{aligned}A^0(\tau) &= \frac{R_0^2}{2} \{ \exp[-\chi(\tau)] [1 + (C^0)^2 - (C^1)^2] + \Phi_{\alpha}(\tau) + \tilde{\Phi}_{\alpha \Delta \varphi}^0(\tau) + \\ &\quad + 2C^0 \tilde{\Phi}_{\alpha \Delta \varphi}^0(\tau) - \tilde{\Phi}_{\alpha \Delta \varphi}^{1^2}(\tau) + 2C^1 \operatorname{sign} \tau \Phi_{\alpha \Delta \varphi}^1(\tau) \}, \\ A^1(\tau) &= \frac{R_0^2}{2} \{ -2C^1 \operatorname{sign} \tau \exp[-\chi(\tau)] + 2\tilde{\Phi}_{\alpha \Delta \varphi}^1(\tau) \}.\end{aligned}\quad (4.6.13)$$

Совершая фурье-преобразования полученных формул, для четного и нечетного слагаемых формы спектральной линии будем иметь

$$W_z^0(\Omega) = [1 + (C^0)^2 - (C^1)^2] W_{z\chi}^0(\Omega) + \frac{R_0^2}{2} S_{\alpha}(\Omega) + \frac{R_0^2}{2} W_{z\alpha \nu}^0(\Omega), \quad (4.6.14)$$

$$W_z^1(\Omega) = -2C^1 W_{z\chi}^1(\Omega) + \frac{R_0^2}{2} 2W_{z\alpha \nu}^1(\Omega), \quad (4.6.15)$$

где

$$\begin{aligned}W_{z\chi}^0(\Omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{R_0^2}{2} \exp[-\chi(\tau)] \cos \Omega \tau d\tau, \\ W_{z\chi}^1(\Omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{R_0^2}{2} \operatorname{sign} \tau \exp[-\chi(\tau)] \sin \Omega \tau d\tau,\end{aligned}\quad (4.6.16)$$

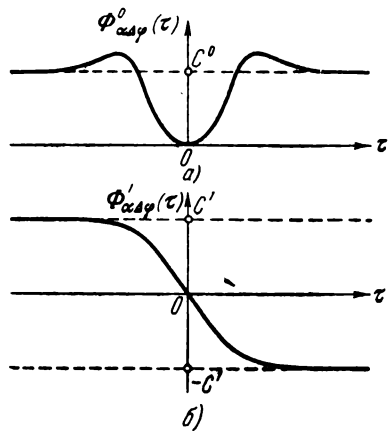


Рис. 4.13.

$$\begin{aligned}
 W_{zav}^0(\Omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [\tilde{\Phi}_{a\Delta\varphi}^{0^2}(\tau) + 2C^0 \tilde{\Phi}_{a\Delta\varphi}^0(\tau) - \Phi_{a\Delta\varphi}^{1^2}(\tau) + \\
 &\quad + 2C^1 \operatorname{sign} \tau \tilde{\Phi}_{a\Delta\varphi}^1(\tau)] \cos \Omega \tau d\tau, \\
 W_{zav}^1(\Omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\Phi}_{a\Delta\varphi}^1(\tau) \sin \Omega \tau d\tau.
 \end{aligned} \quad (4.6.17)$$

Анализируя (4.6.14), нетрудно видеть, что $W_z^0(\Omega)$ состоит из узкополосного слабаразмытого пика, обязанного флуктуациям частоты, широкополосного пьедестала, обязанного флуктуациям

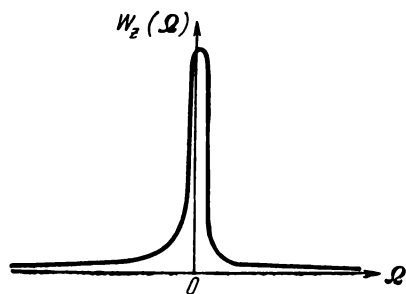


Рис. 4.14.

амплитуды, и, наконец, из широкополосного пьедестала, существующего благодаря корреляции между флуктуациями амплитуды и частоты. Нечетная часть формы линии $W_z^1(\Omega)$ имеет также два различных по виду слагаемых. Первое слабое есть нечетный узкополосный пик, обязанный тому, что $C^1 \neq 0$, второе — широкополосный нечетный пьедестал, обязанный корреляции между

амплитудными и частотными флуктуациями. Таким образом, форма спектральной линии состоит из несимметричного пика и несимметричного пьедестала (рис. 4.14).

Выразим теперь W_{zav}^0 и W_{zav}^1 через спектральные плотности S_{av}^0 и S_{av}^1 , которые считаем заданными. На основании (4.6.12) можно найти, совершая фурие-преобразования,

$$\begin{aligned}
 S_{a\Delta\varphi}^0(\Omega) &= \tilde{S}_{a\Delta\varphi}^0(\Omega) + C^0 \delta(\Omega), \\
 S_{a\Delta\varphi}^1(\Omega) &= \tilde{S}_{a\Delta\varphi}^1(\Omega) - \frac{C^1}{\pi} \begin{cases} \frac{1}{\Omega}, & \Omega \neq 0; \\ 0, & \Omega = 0. \end{cases}
 \end{aligned} \quad (4.6.18)$$

Коэффициенты C^0 , C^1 нетрудно выразить через спектральные плотности флуктуаций частоты:

$$C^0 = \int_0^\infty \Phi_{av}^1(x) dx = 2 \int_0^\infty \frac{S_{av}^1(\omega)}{\omega} d\omega = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} 2 \int_\varepsilon^\infty \frac{S_{av}^1(\omega)}{\omega} d\omega, \quad (4.6.19)$$

$$C^1 = - \int_0^\infty \Phi_{av}^0(x) dx = - \pi S_{av}^0(0). \quad (4.6.20)$$

Из формулы (4.6.20) следует, что $C^1 \neq 0$ и узкополосный пик спектральной линии становится несимметричным, если существует корреляция между квазистатическими, сколь угодно медленными флуктуациями амплитуды и частоты колебания.

Совершая фурье-преобразования $\Phi_{\alpha \Delta \varphi}^0$ и $\Phi_{\alpha \Delta \varphi}^1$, получаем

$$S_{\alpha \Delta \varphi}^0(\Omega) = \delta(\Omega) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{S_{\alpha \nu}^1(\omega)}{\omega} d\omega - \frac{S_{\alpha \nu}^1(\Omega)}{\Omega},$$

$$S_{\alpha \Delta \varphi}^1(\Omega) = \begin{cases} \frac{S_{\alpha \nu}^0(\Omega)}{\Omega}, & \Omega \neq 0, \\ 0, & \Omega = 0. \end{cases} \quad (4.6.21)$$

Сравнивая это с (4.6.18) и (4.6.19), имеем

$$\tilde{S}_{\alpha \Delta \varphi}^0(\Omega) = -\frac{S_{\alpha \nu}^1(\Omega)}{\Omega},$$

$$\tilde{S}_{\alpha \Delta \varphi}^1(\Omega) = \begin{cases} \frac{S_{\alpha \nu}^0(\Omega) - S_{\alpha \nu}^0(0)}{\Omega}, & \Omega \neq 0, \\ 0, & \Omega = 0. \end{cases} \quad (4.6.22)$$

Теперь нам осталось только выразить $W_{\alpha \nu}^{0,1}$ через $\tilde{S}_{\alpha \Delta \varphi}^{0,1}$. Первая формула (4.6.17) дает (см. формулы (III. 4), (III. 5) (III. 20))

$$W_{\alpha \nu}^0(\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{S}_{\alpha \Delta \varphi}^0(u) \tilde{S}_{\alpha \Delta \varphi}^0(\Omega - u) du + 2C^0 \tilde{S}_{\alpha \Delta \varphi}^0(\Omega) -$$

$$- \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{S}_{\alpha \Delta \varphi}^1(u) \tilde{S}_{\alpha \Delta \varphi}^1(u - \Omega) du +$$

$$+ 2C^1 \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{S}_{\alpha \Delta \varphi}^1(u + \Omega) + \tilde{S}_{\alpha \Delta \varphi}^1(u - \Omega)}{u} du. \quad (4.6.23)$$

Вторая формула (4.6.17) с помощью (4.6.22) позволяет сразу же написать окончательный результат для $W_{\alpha \nu}^1(\Omega)$:

$$W_{\alpha \nu}^1(\Omega) = \begin{cases} \frac{S_{\alpha \nu}^0(\Omega) - S_{\alpha \nu}^0(0)}{\Omega}, & \Omega \neq 0, \\ 0, & \Omega = 0. \end{cases} \quad (4.6.24)$$

Спектральную плотность $W_{z\chi}^1(\Omega)$ с помощью формулы (III. 21) можно выразить через $W_{z\chi}^0(\Omega)$:

$$W_{z\chi}^1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{W_{z\chi}^0(u - \Omega)}{u} du. \quad (4.6.25)$$

Здесь подынтегральное выражение полагается равным нулю в точке $u=0$.

Таким образом, формулы (4.6.15), (4.6.22)—(4.6.25) дают окончательное выражение для формы спектральной линии для случая узкополосного $W_{z\chi}^0(\Omega)$ при наличии произвольной корреляции между α и v .

5. До сих пор мы не накладывали никаких условий на $\Phi_\alpha(\tau)$ и $\Phi_{\alpha\Delta\varphi}(\tau)$ и их соотношение могло быть любым. Пусть теперь $\Phi_\alpha(\tau)$ и $\Phi_{\alpha\Delta\varphi}(\tau)$ имеют одинаковый порядок малости (или по порядку величины $\Phi_{\alpha\Delta\varphi}(\tau)$ не больше чем $\Phi_\alpha(\tau)$) и $\langle \alpha^2 \rangle \ll 1$. При этом, как легко видеть, $|C^0|$, $|C^1| \ll 1$, и тогда членами с $\Phi_{\alpha\Delta\varphi}^0(\tau)$, $\Phi_{\alpha\Delta\varphi}^1(\tau)$ можно пренебречь по сравнению с $\Phi_\alpha(\tau)$ и вместо (4.6.13) будем иметь

$$\begin{aligned} A^0(\tau) &= A_\chi^0(\tau) + \frac{R_0^2}{2} \Phi_\alpha(\tau), \\ A^1(\tau) &= -2C^1 \operatorname{sign} \tau A_\chi^0(\tau) + \frac{R_0^2}{2} 2\tilde{\Phi}_{\alpha\Delta\varphi}^1(\tau), \end{aligned}$$

и тогда

$$\begin{aligned} W_z^0(\Omega) &= W_{z\chi}^0(\Omega) + \frac{R_0^2}{2} S_\alpha(\Omega), \\ W_z^1(\Omega) &= -2C^1 W_{z\chi}^1(\Omega) + \frac{R_0^2}{2} 2\tilde{S}_{\alpha\Delta\varphi}^1(\Omega). \end{aligned} \quad (4.6.26)$$

Спектры $\frac{R_0^2}{2} S_\alpha(\Omega)$ и $W_z^1(\Omega)$ имеют одинаковый порядок малости. С другой стороны, в пределах полосы узкополосного пика $W_{z\chi}^0(\Omega)$ можно пренебречь величиной спектра амплитудных флуктуаций. Следовательно, в полосе пика можно пренебречь и спектром $W_z^1(\Omega)$, который дает, следовательно, в основном вклад в несимметрию пьедестала. Другими словами, из-за малости C^1 несимметричностью пика можно пренебречь.

Тем самым форма спектральной линии колебания с узкополосным пиком для случая достаточно малых амплитудных флуктуаций состоит из почти симметричного пика, обязанного флуктуациям частоты, и сильно несимметричного пьедестала,

обязанного коррелированным амплитудно-частотным флуктуациям.

6. Обратимся теперь к наиболее сложному случаю, когда нормально распределенные $\alpha(t)$ и $\nu(t)$ являются нестационарными и нестационарно связанными флуктуациями. Ограничимся при этом условием существования стационарных и стационарно связанных приращений у $\alpha(t)$ и $\nu(t)$.

Начнем рассмотрение со статистически независимых $\alpha(t)$ и $\nu(t)$. В этом случае из (4.1.4), (4.1.5) получим

$$A^0(\tau) = \frac{R_0^2}{2} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} [1 + K_\alpha[t, t + \tau]] e^{-d_\varphi[t, t; \tau]} dt, \quad A^1(\tau) \equiv 0.$$

Полагая, что $K_\alpha[t, t + \tau]$ и $d_\varphi[t, t; \tau]$ неограниченно возрастают при $t \rightarrow \infty$, и ограничиваясь, аналогично тому, как это мы делали в § 4.5 для нестационарных флуктуаций частоты, конечным временем наблюдения, получим

$$A^0(T, \tau) = \frac{R_0^2}{2} \frac{1}{T} \int_0^T [1 + K_\alpha[t, t + \tau]] e^{-d_\varphi[t, t; \tau]} dt, \quad A^1(T, \tau) \equiv 0. \quad (4.6.27)$$

Полагая, что для флуктуаций частоты нам известна структурная функция $d_\nu[0; \tau]$, для $d_\varphi[t, t; \tau]$ имеем или (4.5.43), или асимптотическое значение (4.5.44).

Обратимся к амплитудным флуктуациям. Совершая привязку амплитудных флуктуаций*), т. е. полагая $\alpha(0) = 0$, имеем, согласно (2.2.15),

$$K_\alpha[t, t + \tau] = d_\alpha[0; t] + d_\alpha[0; t + \tau] - d_\alpha[0; \tau]. \quad (4.6.28)$$

Подставляя это значение корреляционной функции и $d_\varphi[t, t; \tau]$, данное (4.5.43), в (4.6.27), получим $A^0(T, \tau)$ и, наконец, с помощью (4.5.41) и (4.5.42) — форму и ширину спектральной линии $W_z(T, \Omega)$ и $\Delta\Omega(T)$ для любого T . Полученные значения будут включать в себя переходные процессы, связанные с привязкой $\alpha(t)$ и $\nu(t)$ в момент $t = 0$.

Уделим основное внимание, как это было сделано в § 4.5, асимптотическим значениям формы и ширины спектральной линии $W_z(t_0, \Omega)$ и $\Delta\Omega(t_0)$, получаемым при достаточно большом значении t . Из (4.6.28) нетрудно найти, что при $t \rightarrow \infty$

$$K_\alpha[t, t + \tau] = 2d_\alpha[0; t] - d_\alpha[0; \tau]. \quad (4.6.29)$$

*) Аналогично тому, как, согласно (4.5.43), мы уже предположили привязку частотных флуктуаций.

Подставляя асимптотические значения (4.6.29) и (4.5.44) в (4.6.27) и интегрируя в пределах от t_0 до $t_0 + T$, получим при достаточно большом t_0 :

$$A^0(t_0, \tau) = \{1 + 2d_\alpha[0; t_0]\} A_v^0(t_0, \tau) - d_\alpha[0; \tau] A_v^0(t_0, \tau), \quad (4.6.30)$$

где $A_v^0(t_0, \tau)$ дается формулой (4.5.46).

Совершая фурье-преобразование (4.6.30), принимая во внимание, что $d_\alpha[0; \tau] = \Delta_\alpha(0, \tau)$, и учитывая (1.6.9), найдем

$$W_z(t_0, \Omega) = \{1 + 2d_\alpha[0; t_0]\} W_{zv}(t_0, \Omega) + \int_{-\infty}^{+\infty} W_{zv}(t_0, u) S_\alpha(\Omega - u) du, \quad (4.6.31)$$

где $W_{zv}(t_0, \Omega)$ — доплеровская форма спектральной линии, порождаемая флуктуациями частоты и определяемая формулой (4.5.48).

Полученное выражение (4.6.31) показывает, что и для случая нестационарных независимых флуктуаций частоты и амплитуды форма спектральной линии состоит из формы линии, объясненной частотным флуктуациям и ее свертке со спектром амплитудных флуктуаций.

Если ширина $W_{zv}(t_0, \Omega)$ много меньше ширины $S_\alpha(\Omega)$, то вместо (4.6.31) имеем

$$W_z(T, \Omega) = \{1 + 2d_\alpha[0; t_0]\} W_{zv}(T, \Omega) + \frac{R_0^2}{2} S_\alpha(\Omega), \quad (4.6.32)$$

т. е. форма спектральной линии состоит из узкополосного (с шириной $\Delta\Omega(t_0) = 2\sqrt{\pi d_v[0; t_0]}$) пика и широкого пьедестала, объясненного амплитудным флуктуациям.

Для большинства реальных автогенераторов амплитудные флуктуации колебания достаточно малы, при этом, даже несмотря на большое время t_0 , структурная функция $d_\alpha[0; t_0]$ все еще много меньше единицы. Тогда вместо (4.6.31) будем иметь

$$W_z(t_0, \Omega) = W_{zv}(t_0, \Omega) + \int_{-\infty}^{+\infty} W_{zv}(t_0, u) S_\alpha(\Omega - u) du, \quad (4.6.33)$$

или для широкополосного $S_\alpha(\Omega)$ ($\Omega \neq 0$)

$$W_z(T, \Omega) = W_{zv}(t_0, \Omega) + \frac{R_0^2}{2} S_\alpha(\Omega). \quad (4.6.34)$$

7. Пусть теперь $\alpha(t)$ и $\nu(t)$ статистически связаны. В этом случае, на основании (4.1.4) и (4.1.5), для нормально распределенных $\alpha(t)$ и $\Delta\varphi$ имеем

$$A^0(\tau) = \frac{R_0^2}{2} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} [1 + K_\alpha[t, t + \tau] - K_{\alpha \Delta\varphi} K_{\alpha' \Delta\varphi}] e^{-d_\varphi[t, t; \tau]} dt, \quad (4.6.35)$$

$$A^1(\tau) = \frac{R_0^2}{2} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} [K_{\alpha \Delta\varphi} + K_{\alpha' \Delta\varphi}] e^{-d_\varphi[t, t; \tau]} dt,$$

где, как нетрудно видеть, смешанные корреляционные функции равны

$$K_{\alpha \Delta\varphi} = \langle \alpha(t) [\varphi(t + \tau) - \varphi(t)] \rangle = \int_t^{t+\tau} K_{\alpha\nu}(t, \xi) d\xi = \int_0^\tau K_{\alpha\nu}(t, t + \eta) d\eta,$$

$$K_{\alpha' \Delta\varphi} = \langle \alpha(t + \tau) [\varphi(t + \tau) - \varphi(t)] \rangle =$$

$$= \int_t^{t+\tau} K(t + \tau, \xi) d\xi = \int_0^\tau K_{\alpha\nu}(t + \tau, t + \eta) d\eta.$$

Таковы точные формулы. Они являются чрезвычайно сложными и трудно анализируемыми.

Предполагая, что $\alpha(t)$ и $\nu(t)$ обладают стационарными и стационарно связанными приращениями, предполагая далее привязку $\alpha(0) = \nu(0) = 0$, используя формулу

$$\frac{1}{2} K_{xy}[u, v] + \frac{1}{2} K_{xy}[v, u] = d_{xy}[0, 0; u] +$$

$$+ d_{xy}[0, 0; v] - d_{xy}[v, v; u - v],$$

получим в предположении $t \rightarrow \infty$ следующее приближенное асимптотическое значение смешанных корреляционных функций:

$$K_{\alpha \Delta\varphi} \approx K_{\alpha' \Delta\varphi} \approx 2\tau d_{\alpha\nu}[0; t] - \int_0^\tau d_{\alpha\nu}[0; \eta] d\eta \equiv K(t, \tau). \quad (4.6.36)$$

Эти функции (нечетные по τ), вообще говоря, неограниченно возрастают при $t \rightarrow \infty$, если нестационарность $\alpha(t)$ и $\nu(t)$ такова, что $d_{\alpha\nu}[0; t]$ неограниченно возрастает с ростом t .

Подставляя полученное асимптотическое значение для $K_{\alpha \Delta\varphi}$, $K_{\alpha' \Delta\varphi}$, а также (4.6.29) и (4.5.44) в (4.6.35), интегрируя в пределах от t_0 до $t_0 + T$, получим при достаточно большом t_0

$$A^0(t_0, \tau) = \{1 + 2d_\alpha[0; t_0]\} A_v^0(t_0, \tau) -$$

$$- d_\alpha[0; \tau] A_v^1(t_0, \tau) - K^2(t_0, \tau) A_v^0(t_0, \tau), \quad (4.6.37)$$

$$A^1(t_0, \tau) = 2K(t_0, \tau) A_v^0(t_0, \tau).$$

Отыскание соответствующих $W_z^0(t_0, \Omega)$ и $W_z^1(t_0, \Omega)$ в общем случае довольно затруднительно. Ограничимся прежде всего следующими «естественными» требованиями. Будем полагать, что $t_0 \gg 1/\Delta\Omega$, где $\Delta\Omega = \Delta\Omega(t_0)$ — ширина четной части пика $W_{zv}(t_0, \Omega)$, и что амплитудные флуктуации настолько малы, что

$$d_\alpha[0; t_0] \ll 1, \quad \frac{4\pi}{\Delta\Omega^2} d_{\alpha v}^2[0; t_0] \ll 1. \quad (4.6.38)$$

При этом предположении, ограничиваясь рассмотрением частот Ω , меньших или равных по порядку величины $\Delta\Omega$, можно приближенно полагать, что

$$A^0(t_0, \tau) = A_v^0(t_0, \tau), \quad A^1(t_0, \tau) = 4d_{\alpha v}[0; t_0] \tau A_v^0(t_0, \tau).$$

Следовательно, форму пика спектральной линии можно считать в этом случае равной

$$W_z(t_0, \Omega) = \left[1 + 8\pi \frac{d_{\alpha v}[0; t_0] \Omega}{\Delta\Omega^2(t_0)} \right] \frac{R_0^2}{2\Delta\Omega(t_0)} \exp \left[-\frac{\Omega^2}{\Delta\Omega^2(t_0)/\pi} \right]. \quad (4.6.39)$$

Если теперь потребовать более сильного условия на малость флуктуаций амплитуды и частоты

$$\frac{4\pi}{\Delta\Omega^2} d_{\alpha v}^2[0; t_0] \ll d_\alpha[0; t_0] \ll 1, \quad (4.6.40)$$

то нетрудно видеть, что на основном интервале изменения $A_v^0(t_0, \tau)$, равном $(0, \sqrt{2\pi}/\Delta\Omega)$, функцией $K^2(t_0, \tau)$ можно пренебречь по сравнению с $d_\alpha[0; \tau]$. Следовательно, вместо (4.6.37) будем иметь

$$A^0(t_0, \tau) = A_v^0(t_0, \tau) - \Delta_\alpha(0, \tau) A_v^0(t_0, \tau),$$

$$A^1(t_0, \tau) = 4\Delta_{\alpha v}(0, t_0) \tau A_v^0(t_0, \tau) - 2 \int_0^\tau \Delta_{\alpha v}(0, \eta) d\eta A_v^0(t_0, \tau).$$

Первая из этих формул практически совпадает с (4.6.30), т. е. в рассмотренном приближении корреляция между амплитудными и частотными флуктуациями влияет только на несимметричную часть формы линии.

Совершая фурье-преобразования $A^0(t_0, \tau)$ и $A^1(t_0, \tau)$, найдем с помощью (III. 45)

$$W_z^0(t_0, \Omega) = W_{zv}(t_0, \Omega) + \int_{-\infty}^{+\infty} W_{zv}(t_0, u) S_\alpha(\Omega - u) du,$$

$$W_z^1(t_0, \Omega) = -4d_{\alpha v}[0; t_0] \frac{\partial W_{zv}(t_0, \Omega)}{\partial \Omega} + 2 \int_{-\infty}^{+\infty} W_{zv}(t_0, u) \frac{S_{\alpha v}^0(\Omega - u)}{\Omega - u} du.$$

Эти приближенные формулы справедливы уже при любом Ω .

Если $W_{zv}(t_0, \Omega)$ много уже $S_\alpha(\Omega)$ и $S_{av}^0(\Omega)$, то для всех $\Omega \neq 0$

$$W_z^0(t_0, \Omega) = W_{zv}(t_0, \Omega) + \frac{R_0^2}{2} S_\alpha(\Omega),$$

$$W_z^1(t_0, \Omega) = -4d_{av}[0; t_0] \frac{\partial W_{zv}(t_0, \Omega)}{\partial \Omega} + \frac{R_0^2}{2} 2 \frac{S_{av}^0(\Omega)}{\Omega}.$$

Тем самым

$$W_z(t_0, \Omega) = \frac{R_0^2}{2} \left\{ \left[1 + 8\pi \frac{d_{av}[0; t_0] \Omega}{\Delta \Omega^2} \right] \frac{1}{\Delta \Omega^2} \exp \left[-\frac{\Omega^2}{\Delta \Omega^2 / \pi} \right] + \right. \\ \left. + S_\alpha(\Omega) + 2 \frac{S_{av}^0(\Omega)}{\Omega} \right\}. \quad (4.6.41)$$

Форма линии состоит из несимметричного доплеровского пика и несимметричного пьедестала.

Заметим, что условия (4.6.38), (4.6.40) накладывают на t_0 ограничение сверху. Вместе с тем (4.5.47), (4.5.48) справедливы для достаточно больших t_0 . Таким образом, (4.6.41) справедлива только при таком t_0 которое, с одной стороны, достаточно велико для того, чтобы сформировалась доплеровская форма пика, а с другой стороны, достаточно мало для того, чтобы $\langle \alpha^2(t_0) \rangle$ можно было полагать малой величиной.

§ 4.7. Поведение крыльев спектральной линии колебания

Вопрос о поведении крыльев спектральной линии колебания возникает тогда, когда интересуются формой линии, законом ее изменения с частотой при $\Omega \gg \Delta \Omega$. Полученные в § 4.5 предельные формы линии — гауссова и резонансная — в действительности, как это будет показано ниже, никогда не реализуются. Реальная линия при $m \ll 1$ и $m \gg 1$ (m — индекс модуляции) лишь приближенно, при $\Omega \leq \Delta \Omega$, — резонансная или гауссова и весьма существенно отклоняется от этих предельных форм по мере возрастания Ω , по мере удаления от центра линии. Знание законов спада $W_z(\Omega)$ при возрастании Ω , другими словами, знание формы крыльев спектральной линии является подчас очень важным для целого ряда прикладных задач, особенно для тех, где вследствие целого ряда нелинейных преобразований крылья спектральной линии играют роль спектральной плотности шума, на фоне которого необходимо обнаруживать слабые сигналы.

Результаты, полученные в предыдущих параграфах указывают на то, что крылья спектральной линии колебания образуются, во-первых, амплитудными флуктуациями — пьедесталом

и его крыльями и, во-вторых, крыльями собственно спектральной линии — крыльями узкополосного пика, обязанного флуктуациям частоты. Как было показано выше, форма пьедестала совпадает с формой заданного спектра амплитудных и амплитудно-частотных флуктуаций, поэтому мы амплитудные флуктуации вначале не будем принимать во внимание и займемся анализом крыльев спектральной линии, порождаемой только флуктуациями частоты. Будем предполагать также для простоты анализа, что вероятностное распределение флуктуаций частоты ν является симметричным ($\langle \nu \rangle = 0$).

1. Анализ формы спектральной линии и ее крыльев начнем со случая стационарных $\nu(t)$ и проведем его методом моментов.

Пусть имеем колебание

$$z(t) = R_0 \cos(\omega_0 t + \varphi(t)), \quad \varphi(t) = \int_0^t \nu(\xi) d\xi.$$

Тогда, согласно (4.5.5), при симметричности распределения $\Delta\varphi$, форма спектральной линии этого колебания равна

$$W_z(\Omega) = \frac{R_0^2}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \langle \cos \Delta\varphi \rangle \cos \Omega\tau d\tau.$$

Нормируем ее так, чтобы

$$\int_{-\infty}^{+\infty} W_z(\Omega) d\Omega = 1.$$

Для этого, как легко проверить, следует положить $R_0^2 = 2$ (полная энергия колебания $z(t)$ равна $R_0^2/2$). Тогда

$$W_z(\Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \langle \cos \Delta\varphi \rangle \cos \Omega\tau d\tau, \quad (4.7.1)$$

можно рассматривать как некоторую плотность симметричного вероятностного распределения.

На распределение $\Delta\varphi$ мы не накладываем пока никаких ограничений и считаем его произвольным. Введем моменты распределения (4.7.1), которые обозначим как $\langle \Omega^m \rangle_z$:

$$\langle \Omega^m \rangle_z \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \Omega^m W_z(\Omega) d\Omega. \quad (4.7.2)$$

Поскольку $W_z(\Omega) = W_z(-\Omega)$, то отличны от нуля только четные моменты с $m=2n$. Вычисляя их, получим

$$\langle \Omega^{2n} \rangle_z = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \langle \cos \Delta\varphi \rangle d\tau \oint_{-\infty}^{+\infty} \Omega^{2n} \cos \Omega\tau d\Omega.$$

Используя формулы Приложения I, найдем

$$\langle \Omega^{2n} \rangle_z = (-1)^n \left[\frac{d^{2n}}{d\tau^{2n}} \langle \cos \Delta\varphi \rangle \right]_{\tau=0}. \quad (4.7.3)$$

Рассмотрим теперь нормированную спектральную плотность флуктуаций частоты $\sum_v(\Omega)$, такую, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sum_v(\Omega) d\Omega = 1.$$

Введенная спектральная плотность связана с обычной спектральной плотностью $S_v(\Omega)$ соотношением

$$S_v(\Omega) = \sigma^2 \sum_v(\Omega), \quad \sigma^2 \equiv \langle v^2 \rangle. \quad (4.7.4)$$

Функцию $\sum_v(\Omega)$ также можно считать некоторым вероятностным распределением и аналогично предыдущему ввести моменты

$$\langle \Omega^m \rangle_v \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \Omega^m \sum_v(\Omega) d\Omega. \quad (4.7.5)$$

Возникает вопрос о взаимозависимости между $\langle \Omega^m \rangle_z$ и $\langle \Omega^m \rangle_v$. Если эти моменты зависят друг от друга, то, определяя (например, из эксперимента, или из (4.7.5)) моменты спектра флуктуаций частоты $\langle \Omega^m \rangle_v$, можно найти $\langle \Omega^m \rangle_z$. Последние позволяют сделать определенные выводы о форме спектральной линии $W_z(\Omega)$, ибо другой путь — анализ $W_z(\Omega)$ на основании (4.7.1) — является весьма затруднительным даже для простейших $\sum_v(\Omega)$, особенно если закон распределения $\Delta\varphi$ не является нормальным.

С другой стороны, вычисление $\langle \Omega^m \rangle_z$ с помощью (4.7.3) является значительно более простой операцией, нежели вычисление интеграла (4.7.1), так как даже тогда, когда функция $\langle \cos \Delta\varphi \rangle$ неизвестна, удается иногда найти $[d^m \langle \cos \Delta\varphi \rangle / d\tau^m]_{\tau=0}$.

Рассмотрим, например, случай нормально распределенных флуктуаций частоты $v(t)$ (и, следовательно, $\Delta\varphi$). На основании (4.3.2) и (4.5.10) имеем

$$\langle \cos \Delta\varphi \rangle = \exp \left[-2 \int_{-\infty}^{+\infty} \sin^2 \frac{\Omega\tau}{2} S_v(\Omega) \frac{d\Omega}{\Omega^2} \right]. \quad (4.7.6)$$

Дифференцируя (4.7.6), с учетом (4.7.3) — (4.7.5), получим

$$\begin{aligned}\langle \Omega^2 \rangle_z &= \sigma^2, \\ \langle \Omega^4 \rangle_z &= 3\sigma^4 + \langle \Omega^2 \rangle_v \sigma^2, \\ \langle \Omega^6 \rangle_z &= 15\sigma^6 + 15 \langle \Omega^2 \rangle_v \sigma^4 + \langle \Omega^4 \rangle_v \sigma^2, \\ \langle \Omega^8 \rangle_z &= 105\sigma^8 + 210 \langle \Omega^2 \rangle_v \sigma^6 + 28 \langle \Omega^4 \rangle_v \sigma^4 + \langle \Omega^2 \rangle_v^2 \sigma^4 + \langle \Omega^6 \rangle_v \sigma^2, \\ &\dots\end{aligned}\tag{4.7.7}$$

Эти формулы показывают, что для случая нормально распределенных флуктуаций, моменты $\langle \Omega^m \rangle_z$ действительно однозначно выражаются через моменты $\langle \Omega^m \rangle_v$.

2. Перейдем теперь к оценке формы крыльев спектральной линии с помощью моментов. Рассмотрим связь моментов $\langle \Omega^m \rangle_k$ какой-либо четной функции $S_k(\Omega)$, обладающей свойствами плотности вероятности, с поведением самой функции $S_k(\Omega)$ при больших Ω (считаем, что $S_k(0)$ — конечная величина). Пусть при достаточно больших $\Omega > 0$ закон спадания $S_k(\Omega)$ или, по-другому, форма крыльев $S_k(\Omega)$ определяется соотношением

$$S_k(\Omega) \sim \Omega^{-N}, \quad N > 1.$$

Нетрудно видеть, что для такой функции все моменты $\langle \Omega^{2n} \rangle_k$ с $2n \leq N - 2$ будут конечными, а высшие (четные) — расходящимися. Если N нечетно, то при этом момент $\langle \Omega^{N-1} \rangle_k$ будет иметь логарифмическую расходимость. При N четном логарифмическую расходимость будет иметь величина $\langle |\Omega|^{N-1} \rangle_k$.

Отсюда, кстати, следует, что для того, чтобы у функции все моменты были конечны, она должна убывать при $\Omega \rightarrow \infty$ быстрее чем Ω^{-N} , где N сколь угодно велико. Такими функциями являются, например, все функции, обращающиеся в нуль за пределами некоторого конечного интервала изменения аргумента, а также, например, функции, убывающие по закону $\exp\{-|F_\mu(\Omega)|\}$, где $F_\mu(\Omega)$ — полином степени μ . К последним относятся, в частности, нормальная функция

$$S_n(\Omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} a} \exp\left[-\frac{\Omega^2}{2a^2}\right]\tag{4.7.8}$$

и экспоненциальная

$$S_s(\Omega) = \frac{1}{2a} \exp\left[-\frac{|\Omega|}{a}\right].\tag{4.7.9}$$

Рассмотрим теперь взаимоотношение моментов $\langle \Omega^{2n} \rangle_k$ между собой для какой-либо функции $S_k(\Omega)$. Есть ли какая-нибудь связь между высшими и низшими моментами?

Пусть

$$S_k(\Omega) = \frac{1}{a} \tilde{S}_k\left(\frac{\Omega}{a}\right),$$

где Ω/a и \tilde{S}_k безразмерны. Тогда

$$\langle \Omega^2 \rangle_k = \int_{-\infty}^{+\infty} \Omega^2 \frac{1}{a} \tilde{S}_k \left(\frac{\Omega}{a} \right) d\Omega = b_2 a^2. \quad (4.7.10)$$

Здесь b_2 — некоторое число, равное

$$b_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \tilde{S}_k(x) dx.$$

Аналогично получим, что

$$\langle \Omega^{2n} \rangle_k = b_{2n} a^{2n}, \quad (4.7.11)$$

где

$$b_{2n} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2n} \tilde{S}_k(x) dx.$$

Сравнивая (4.7.11) и (4.7.10), видим, что всегда можно написать

$$\langle \Omega^{2n} \rangle_k = L_k(n) \langle \Omega^2 \rangle_k^n, \quad (4.7.12)$$

где $L_k(n) = b_{2n}/b_2^n$ — некоторые положительные числа ($L_k(1) = 1$), характеризующие данную функцию $S_k(\Omega)$. Назовем их структурными числами.

С введением этих чисел анализ формы спектральной линии и ее крыльев методом моментов сводится фактически к отысканию $L_k(n)$.

Рассмотрим, например, нормальную (4.7.8) и экспоненциальную (4.7.9) функции. Вычисляя для них структурные числа, получим

n	1	2	3	4	...	l	
$L_n(n)$	1	3	15	105	...	$(2l-1)!!$	(4.7.13)
$L_3(n)$	1	6	90	2520	...	$(2l-1)!! l!$	

Отсюда видно, что $L_3(n)$ при $n > 1$ всегда превосходит $L_n(n)$ и тем более, чем больше n . Этот факт связан с тем, что крылья экспоненциальной функции спадают значительно медленнее крыльев нормальной функции.

На основании (4.7.7) и (4.7.12) нетрудно найти структурные числа для формы спектральной линии исследуемого колебания,

обладающего нормально распределенными флуктуациями частоты:

$$L_z(1) = 1,$$

$$L_z(2) = 3 + \frac{\langle \Omega^2 \rangle_v}{\sigma^2},$$

$$L_z(3) = 15 + 15 \frac{\langle \Omega^2 \rangle_v}{\sigma^2} + \frac{\langle \Omega^4 \rangle_v}{\sigma^4}, \quad (4.7.14)$$

$$L_z(4) = 105 + 210 \frac{\langle \Omega^2 \rangle_v}{\sigma^2} + 28 \frac{\langle \Omega^4 \rangle_v}{\sigma^4} + \left[\frac{\langle \Omega^2 \rangle_v}{\sigma^2} \right]^2 + \frac{\langle \Omega^6 \rangle_v}{\sigma^6},$$

.

Задавая ту или иную спектральную плотность флуктуаций частоты $S_v(\Omega)$, на основании (4.7.4) и (4.7.5) могут быть найдены безразмерные величины $\langle \Omega^{2n} \rangle_v / \sigma^{2n}$, а затем, с помощью (4.7.14), структурные числа $L_z(n)$.

3. Рассмотрим некоторые примеры.

Сравним прежде всего поведение формы спектральной линии (при больших Ω) реального колебания с предельными формами, полученными ранее: с гауссовой (см. (4.5.7)) и резонансной (см. (4.5.13)). Форма линии $W_z(\Omega)$ будет точно гауссовой, если ее структурные числа будут равны $L_z(n) = L_n(n)$. Сравнивая (4.7.14) с (4.7.13), видим, что для этого необходимо соблюдение равенства $\langle \Omega^m \rangle_v / \sigma^m = 0$ для всех m .

Совершенно ясно, что для любой реальной спектральной плотности $S_v(\Omega)$, как бы узка она ни была (как бы медленнее ни были флуктуации $v(t)$), всегда $\langle \Omega^m \rangle_v / \sigma^m > 0$. Это приведет к $L_z(n) > L_n(n)$. Это означает, что форма линии реального колебания всегда спадает медленнее гауссовой формы и тем медленнее, чем дальше мы удаляемся по крыльям от центра линии (так как для больших n $L_z(n)$ будет больше отличаться от $L_n(n)$).

Пусть теперь форма спектральной линии колебания $W_z(\Omega)$ будет иметь в точности резонансную форму (4.5.13). Легко видеть, что в этом случае $\langle \Omega^2 \rangle_z$ и все последующие моменты $\langle \Omega^{2n} \rangle_z$ обращаются в бесконечность. Сравнивая с (4.7.7), видим, что для этого необходимо, чтобы $\sigma^2 = \langle v^2 \rangle = \infty$, т. е. чтобы полная мощность флуктуаций частоты была бесконечной. В действительности, однако, полная мощность флуктуаций частоты $\langle v^2 \rangle$ всегда конечна, каким бы малым временем корреляции они ни обладали. Следовательно, конечно также и $\langle \Omega^2 \rangle_z$, а это значит, что, во-первых, крылья лоренцевой формы никогда не реализуются и, во-вторых, что при больших Ω реальная форма линии $W_z(\Omega)$ спадает всегда не медленнее чем Ω^{-4} .

Рассмотрим далее случай, когда спектральная плотность флуктуаций частоты $S_v(\Omega)$ спадает при больших Ω как

Ω^{-2N} ($N \geq 1$). В этом случае моменты $\langle \Omega^{2n} \rangle_v$ для $n \leq N-1$ будут конечны, а моменты с $n \geq N$ расходящимися. На основании (4.7.7) это приведет к тому, что моменты $\langle \Omega^{2n} \rangle_z$ для $n \leq N$ будут конечны, а для $n \geq N+1$ расходящимися. Кроме этого, нетрудно показать, что момент $\langle |\Omega|^{2N-1} \rangle_v$, а следовательно, и момент $\langle |\Omega|^{2N+1} \rangle_z$ будут иметь логарифмическую расходимость. Это значит, что $W_z(\Omega)$ при больших Ω будет спадать как $\Omega^{-(2N+2)}$. Тем самым мы еще для одного частного случая получили соотношение, справедливое для достаточно больших Ω (см. 4.5.31):

$$W_z(\Omega) \propto S_v(\Omega)/\Omega^2. \quad (4.7.15)$$

Рассмотрим, наконец, спектральную плотность флуктуаций частоты, равную

$$S_v(\Omega) = \frac{\langle v^2 \rangle}{2\lambda} \exp\left(-\frac{|\Omega|}{\lambda}\right).$$

Отсюда легко найти моменты

$$\langle \Omega^{2n} \rangle_v = (2n)! \lambda^{2n}. \quad (4.7.16)$$

Подставляя (4.7.16) в (4.7.14) и вводя обозначение $m = \sigma^2 \lambda^{-2}$ (m — есть индекс модуляции), получим

$$\begin{aligned} L_z(1) &= 1, \\ L_z(2) &= 3 + \frac{2}{m}, \\ L_z(3) &= 15 + \frac{30}{m} + \frac{24}{m^2}, \\ L_z(4) &= 105 + \frac{420}{m} + \frac{676}{m^2} + \frac{720}{m^3}, \\ &\dots \end{aligned} \quad (4.7.17)$$

Для анализа этих структурных чисел рассмотрим три конкретных значения $m = 1/10, 1, 10$. Из (4.7.17) следует

$$L_z(n) = \begin{cases} 1 & 23 & 2715 & 791905 & \dots & (m = 1/10), \\ 1 & 5 & 69 & 1921 & \dots & (m = 1), \\ 1 & 3,2 & 18,24 & 154,57 & \dots & (m = 10). \end{cases}$$

Сравнение этих значений с (4.7.13) показывает, что при $m = 1/10$ кривая $W_z(\Omega)$ в области Ω , сравнимой с $\Delta\Omega$, спадает медленнее экспоненты.

При $m = 1$ $W_z(\Omega)$ спадает, по-видимому, быстрее экспоненты, но существенно медленнее гауссовой кривой. При $m = 10$ форма спектральной линии $W_z(\Omega)$ вначале (при малых Ω) идет близко к гауссовой, а затем удаляется от нее, спадая медленнее. Таким

образом, значение индекса модуляции $m = \sigma^2 \lambda^{-2}$ оказывает существенное влияние на форму спектральной линии колебания.

4. Рассмотрим теперь подробнее соотношение (4.7.15) и найдем точную связь между $W_z(\Omega)$ и $S_v(\Omega)$ при больших Ω для случая любой $S_v(\Omega)$.

Пусть имеем нормально распределенные стационарные флуктуации частоты. Тогда

$$W_z(\Omega) = W_{z\chi}^0(\Omega) = \frac{R_0^2}{2\pi} \int_0^\infty e^{-\chi(\tau)} \cos \Omega \tau d\tau.$$

Воспользовавшись формулой (I.10), найдем разложение $W_z(\Omega)$ по степеням $1/\Omega$:

$$W_{z\chi}^0(\Omega) = \frac{R_0^2}{2\pi} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{\Omega^{2m}} \left\{ \frac{d^{2m-1}}{d\tau^{2m-1}} \exp[-\chi(\tau)] \right\}_{\tau=+0}. \quad (4.7.18)$$

Обратимся теперь к спектральной плотности флуктуаций частоты. На основании (I.10) имеем аналогично

$$S_v(\Omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \Phi_v(\tau) \cos \Omega \tau d\tau = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\Phi_v^{(2n-1)}(+0)}{\Omega^{2n}}. \quad (4.7.19)$$

Допустим, что при $\Omega \rightarrow \infty$ $S_v(\Omega)$ ведет себя как $1/\Omega^{2N}$. Сравнивая это с (4.7.19), видим, что $\Phi_v'(+0) = \Phi_v'''(+0) = \dots = \Phi_v^{(2N-3)}(+0) = 0$, а $\Phi_v^{(2N-1)}(+0)$ и, возможно, последующие производные отличны от нуля.

Поскольку, согласно § 4.5, $\chi''(\tau) = \Phi_v(\tau)$, а, кроме того, $\chi(0) = \chi'(0) = 0$, то все это приводит к тому, что первым отличным от нуля слагаемым ряда (4.7.18) будет слагаемое с номером $m = N+1$. Ряд при этом примет вид (учитывая, что $\chi^{(2N+1)}(+0) = \Phi^{(2N-1)}(+0)$)

$$W_{z\chi}^0(\Omega) = \frac{R_0^2}{2\pi} \left\{ (-1)^{N+1} \frac{\Phi_v^{(2N-1)}(+0)}{\Omega^{2N+2}} + \right. \\ \left. + (-1)^{N+2} \frac{1}{\Omega^{2N+4}} \left\{ \frac{d^{2N+3}}{d\tau^{2N+3}} \exp[-\chi(\tau)] \right\}_{\tau=+0} + \dots \right\}.$$

Тем самым при $\Omega \rightarrow \infty$

$$W_{z\chi}^0(\Omega) = \frac{R_0^2}{2\pi} (-1)^N \frac{\Phi_v^{(2N-1)}(+0)}{\Omega^{2N+2}},$$

С другой стороны, при $\Omega \rightarrow \infty$

$$S_v(\Omega) = \frac{1}{\pi} (-1)^N \frac{\Phi_v^{(2N-1)}(+0)}{\Omega^{2N}}.$$

Сравнивая эти спектральные плотности, видим, что при $\Omega \rightarrow \infty$

$$W_{zx}^0(\Omega) = \frac{R_0^2}{2} \frac{S_v(\Omega)}{\Omega^2}. \quad (4.7.20)$$

Таково поведение крыльев спектра колебания, обладающего флуктуациями частоты.

Формула (4.7.20) строго доказана в предположении нормально распределенных стационарных флуктуаций частоты, спектральная плотность которых представлена в виде (4.7.19). Строгое доказательство этой формулы при более общих предположениях о характере флуктуаций частоты встречает определенные трудности. Тем не менее формула (4.7.20) довольно широко употребляется в литературе [83—87].

Если не стремиться к большой строгости доказательства, то указанную формулу легко можно доказать для флуктуаций фазы, обладающих стационарными приращениями, при любом законе их распределения. На основании (4.5.5)

$$W_z^0(\Omega) = \frac{R_0^2}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \langle \cos \Delta\varphi \rangle \cos \Omega\tau d\tau.$$

При сколь угодно больших Ω основной вклад в этот интеграл дает интегрирование в области малых τ . Представляя для малых τ $\cos \Delta\varphi$ в виде

$$\cos \Delta\varphi = 1 - \frac{\Delta\varphi^2}{2},$$

получим для стационарных приращений фазы

$$\langle \cos \Delta\varphi \rangle = 1 - \frac{1}{2} \langle \Delta\varphi^2 \rangle = 1 - \chi(\tau) = 1 - \Delta_\varphi(0, \tau).$$

Применяя метод суммирования интеграла, найдем, что для сколь угодно больших Ω

$$W_z^0(\Omega) \approx \frac{R_0^2}{2} \frac{1}{2\pi} \oint_{-\infty}^{+\infty} [1 - \Delta_\varphi(0, \tau)] \cos \Omega\tau d\tau.$$

Используя (I.5) и (I.6.9), найдем отсюда

$$W_z^0(\Omega) \approx \frac{R_0^2}{2} S_\varphi(\Omega) = \frac{R_0^2}{2} \frac{S_v(\Omega)}{\Omega^2}.$$

Таким образом, (4.7.20) справедлива для четной части формы спектральной линии, если даже вероятностное распределение $\Delta\varphi$ является несимметричным. В этом выводе мы не требовали существования функции корреляции флуктуаций частоты $\Phi_v(\tau)$ при всех τ , достаточно было существование $\Delta\varphi(0, \tau)$. Поэтому (4.7.20) можно применить теперь и для фликкерных стационарных флуктуаций частоты. Если мы имеем $S_v(\omega) = A/(2\pi|\omega|^\gamma)$ ($0 < \gamma < 1$), то для $\Omega \rightarrow \infty$

$$W_z(\Omega) = \frac{R_0^2}{2} \frac{A}{2\pi|\Omega|^{\gamma+2}}. \quad (4.7.21)$$

Таков закон крыльев формы линии, данной точной формулой (4.5.37). Они действительно спадают быстрее крыльев резонансной формы линии и существенно медленнее крыльев доплеровской формы.

До сих пор при анализе крыльев линии мы ограничивались стационарными флуктуациями частоты. Обратимся теперь к нестационарным флуктуациям частоты, обладающим стационарными приращениями. На основании (4.5.41) имеем

$$W_z(T, \Omega) = \frac{1}{2\pi} \oint_{-\infty}^{+\infty} A^0(T, \tau) \cos \Omega\tau d\tau.$$

При малых τ , согласно (4.3.1), будем иметь

$$A^0(T, \tau) = \frac{R_0^2}{2} \frac{1}{T} \int_0^T \left[1 - \frac{1}{2} \langle \Delta q^2 \rangle \right] dt = \frac{R_0^2}{2} \left\{ 1 - \frac{1}{T} \int_0^T d_\varphi[t, t; \tau] dt \right\}.$$

Если при определении ширины спектральной линии для нестационарных флуктуаций частоты мы ограничивали величину T (или t_0) из-за расходимости $\Delta\Omega$, то при рассмотрении крыльев спектральной линии этого в общем случае можно не делать. Полагая T достаточно большим, интеграл в последнем выражении можно на основании (1.6.1) заменить на $\Delta_\varphi(0, \tau)$. Тогда получим опять

$$\begin{aligned} W_z(\Omega) &= W_z(T, \Omega) = \frac{R_0^2}{2} \frac{1}{2\pi} \oint_{-\infty}^{+\infty} [1 - \Delta_\varphi(0, \tau)] \cos \Omega\tau d\tau = \\ &= \frac{R_0^2}{2} S_\varphi(\Omega) = \frac{R_0^2}{2} \frac{S_v(\Omega)}{\Omega^2}. \end{aligned}$$

Таким образом, и в случае нестационарных $v(t)$ можно пользоваться формулой (4.7.20), которая, по-видимому, справедлива для любых флуктуаций частоты.

Обращаясь к § 4.5, видим, что хотя при $\Omega \approx \Delta\Omega$ форма линии колебания, обладающего флуктуациями частоты со стационарными приращениями, является доплеровской, крылья ее при достаточно больших Ω спадают как $S_v(\Omega)/\Omega^2$.

5. Рассмотрим теперь поведение крыльев спектральной линии при существовании корреляции между флуктуациями амплитуды и флуктуациями частоты.

Начнем рассмотрение со случая стационарных флуктуаций частоты, когда можно пользоваться формулами (4.4.5). Для оценки поведения $W_z^0(\Omega)$ при достаточно больших Ω следует рассматривать поведение $A^0(\tau)$ при достаточно малых $\tau > 0$. Поскольку при $\tau \rightarrow +0$ $A_x^0(\tau) \rightarrow R_0^2/2$, то при τ , малых по сравнению с $1/\Delta\Omega$, для $A^0(\tau)$, не учитывая выше рассмотренное $A_x^0(\tau)$, имеем

$$\frac{R_0^2}{2} [\Phi_a(\tau) + \Phi_{a\Delta\varphi}^{0i}(\tau) - \Phi_{a\Delta\varphi}^{1i}(\tau)]. \quad (4.7.22)$$

Пусть при $\tau \rightarrow +0$ имеем

$$\Phi_{av}^0(\tau) = B^0 - E^0\tau, \quad \Phi_{av}^1(\tau) = B^1 + E^1\tau,$$

где B, E — постоянные. Тогда

$$\Phi_{a\Delta\varphi}^{0i}(\tau) = \left(B^1\tau + E^1\frac{\tau^2}{2}\right)^2, \quad \Phi_{a\Delta\varphi}^{1i}(\tau) = \left(B^0\tau - E^0\frac{\tau^2}{2}\right)^2.$$

Совершая косинус-фурье-преобразование (4.7.22), получим, учитывая (1.5),

$$\frac{R_0^2}{2} \left[S_a(\Omega) + \frac{6(B^1E^1 + B^0E^0)}{\pi\Omega^4} \right]. \quad (4.7.23)$$

Это выражение справедливо при любых взаимоотношениях $\Phi_a(\tau)$ с $\Phi_{a\Delta\varphi}^{0i}(\tau)$, $\Phi_{a\Delta\varphi}^{1i}(\tau)$. Если двумя последними функциями можно пренебречь по сравнению с $\Phi_a(\tau)$, то вторым слагаемым в квадратной скобке также можно пренебречь по сравнению с $S_a(\Omega)$.

Если полоса амплитудных флуктуаций Π_a много больше $\Delta\Omega$, то первое слагаемое в (4.7.23) может быть рассмотрено и при частотах $\Omega \ll \Pi_a$, лишь бы было $\Omega \gg \Delta\Omega$. Однако второе слагаемое в (4.7.23) справедливо лишь при $\Omega \gg \Pi_{av}$, где Π_{av} — ширина спектров S_{av}^0 , S_{av}^1 , ибо мы его получили, рассматривая Φ_{av} при сколь угодно малых τ . На основании (4.7.20) для крыльев четной части спектральной линии имеем, таким образом,

$$W_z^0(\Omega) = \frac{R_0^2}{2} \left[\frac{S_v(\Omega)}{\Omega^2} + S_a(\Omega) + \frac{6(B^1E^1 + B^0E^0)}{\pi\Omega^4} \right]. \quad (4.7.24)$$

Обратимся к нечетной части. Для $\tau \ll 1/\Delta\Omega$

$$A^1(\tau) = 2\Phi_{\alpha\Delta\Phi}^1(\tau) \frac{R_0^2}{2}.$$

Совершая синус-фурье-преобразование, получим (см. (4.6.4) и (III.13)) для $\Omega \gg \Delta\Omega$

$$W_z^1(\Omega) = \frac{R_0^2}{2} \frac{2S_{\alpha\nu}^0(\Omega)}{\Omega}.$$

Таким образом, имеем следующее окончательное выражение для крыльев спектральной линии колебания, обладающего стационарными флуктуациями частоты и амплитуды:

$$W_z(\Omega) = \frac{R_0^2}{2} \left\{ \frac{S_v(\Omega)}{\Omega^2} + 2 \frac{S_{\alpha\nu}^0(\Omega)}{\Omega} + S_{\alpha}(\Omega) + \frac{6[B^1 E^1 + B^0 E^0]}{\pi \Omega^4} \right\}. \quad (4.7.25)$$

Если последнее слагаемое в фигурной скобке при $\Omega \approx \Pi_{\alpha}, \Pi_{\alpha\nu}, \Pi_v$ много меньше первых трех и если $\Delta\Omega \ll \Pi_{\alpha}, \Pi_{\alpha\nu}, \Pi_v$, то эта формула дает также выражение и для пьедестала спектральной линии. Заметим, наконец, что, поскольку при $\Omega \rightarrow \infty$

$$S_{\alpha\nu}^0(\Omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} (B^0 + E^0 \tau) \cos \Omega \tau d\tau \rightarrow \frac{E^0}{\pi \Omega^2},$$

$$S_{\alpha\nu}^1(\Omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} (B^1 + E^1 \tau) \sin \Omega \tau d\tau \rightarrow \frac{B^1}{\pi \Omega},$$

то коэффициенты B^0, E^0, B^1, E^1 могут быть легко найдены как

$$E^0 = \lim_{\Omega \rightarrow \infty} \pi \Omega^2 S_{\alpha\nu}^0(\Omega), \quad E^1 = \left[\frac{d\Phi_{\alpha\nu}^1(\tau)}{d\tau} \right]_{\tau \rightarrow +0}, \quad (4.7.26)$$

$$B^1 = \lim_{\Omega \rightarrow \infty} \pi \Omega S_{\alpha\nu}^1(\Omega), \quad B^0 = \Phi_{\alpha\nu}^0(+0).$$

Из (4.7.25) следует, что асимметрия крыльев спектральной линии обязана только $S_{\alpha\nu}^0(\Omega)$ — только «чётной корреляции» амплитудных и частотных флуктуаций.

6. Обратимся, наконец, к коррелированным нестационарным флуктуациям амплитуды и частоты, обладающим стационарными и стационарно связанными приращениями. Рассмотрим наиболее общие формулы (4.6.37). Случай одних флуктуаций частоты, которые представлены первым слагаемым в $A^0(t_0, \tau)$, был рассмотрен выше. Рассмотрим второе и третье слагаемое. При $\tau \rightarrow +0$ эти слагаемые принимают вид

$$-\frac{R_0^2}{2} d_{\alpha}[0; \tau] - \frac{R_0^2}{2} K^2(t_0, \tau).$$

Косинус-фурье-трансформация второго слагаемого равна (см. (1.6.9)) $\frac{R_0^2}{2} S_a(\Omega)$. Пусть при $\tau \rightarrow +0$ $d_{av}[0; \tau] = T_{av} \tau^\varepsilon$, $\varepsilon > 0$; тогда

$$K^2(t_0, \tau) = 4d_{av}^2[0; t_0] \tau^2 - 4d_{av}[0; t_0] \frac{T_{av}}{\varepsilon + 1} \tau^{\varepsilon+2} + \frac{T_{av}^2}{(\varepsilon + 1)^2} \tau^{2\varepsilon+2}.$$

На основании (II.25) косинус-фурье-трансформация третьего слагаемого $A^0(t_0, \tau)$ равна (для $\Omega > 0$)

$$\frac{R_0^2}{2\pi} \left\{ 4d_{av}[0; t_0] \frac{T_{av}}{\varepsilon + 1} \frac{\Gamma(\varepsilon + 3)}{\Omega^{\varepsilon+3}} \operatorname{Re} [(-j)^{\varepsilon+3}] - \right. \\ \left. - \frac{T_{av}^2}{(\varepsilon + 1)^2} \frac{\Gamma(2\varepsilon + 3)}{\Omega^{2\varepsilon+3}} \operatorname{Re} [(-j)^{2\varepsilon+3}] \right\}.$$

Вторая формула (4.6.37) при малых τ принимает вид

$$A^1(t_0, \tau) = \frac{R_0^2}{2} \left[4d_{av}[0; t_0] - 2 \int_0^\tau d_{av}[0; \eta] d\eta \right].$$

Синус-фурье-трансформация $A^1(t_0, \tau)$ с учетом (II. 26) и (III. 45) равна

$$W_z^1(t_0, \Omega) = \frac{R_0^2}{2} 2 \frac{S_{av}^0(\Omega)}{\Omega}.$$

Таким образом, мы нашли при $\Omega \rightarrow \infty$ обе компоненты крыльев спектральной линии. Объединяя, получим для $|\Omega| \gg \Delta\Omega$ следующее выражение для крыльев спектральной линии колебания:

$$W_z(t_0, \Omega) = \frac{R_0^2}{2} \left\{ (1 + 2d_a[0; t_0]) \frac{S_v(\Omega)}{\Omega^2} + 2 \frac{S_{av}^0(\Omega)}{\Omega} + S_a(\Omega) + \right. \\ \left. + \frac{4d_{av}[0; t_0] T_{av} \Gamma(\varepsilon + 3)}{\pi (\varepsilon + 1) |\Omega|^{\varepsilon+3}} \operatorname{Re} [(-j)^{\varepsilon+3}] - \right. \\ \left. - \frac{T_{av}^2 \Gamma(2\varepsilon + 3)}{\pi (\varepsilon + 1)^2 |\Omega|^{2\varepsilon+3}} \operatorname{Re} [(-j)^{2\varepsilon+3}] \right\}. \quad (4.7.27)$$

Если, в частности, $d_a[0; t_0] \ll 1$ и $\varepsilon = 1$, то

$$W_z(t_0, \Omega) = \frac{R_0^2}{2} \left[\frac{S_v(\Omega)}{\Omega^2} + 2 \frac{S_{av}^0(\Omega)}{\Omega} + S_a(\Omega) + \frac{4d_{av}[0; t_0] 3T_{av}}{\pi \Omega^4} \right]. \quad (4.7.28)$$

Нетрудно видеть, что эта формула весьма похожа на (4.7.25), полученную для стационарных флуктуаций частоты и амплитуды.

Если флуктуации амплитуды и частоты за рассматриваемые времена t_0 достаточно малы, так что членами с $d_a[0; t_0]$, $d_{av}[0; t_0]$ и T_{av} можно пренебречь, то мы имеем независимость $W_z(t_0, \Omega)$ от t_0 . Тем самым нестационарность флуктуаций амплитуды и частоты сказывается лишь на форме и характеристиках пика спектральной линии, куда явно входит t_0 , поскольку $\Delta\Omega$ зависит от t_0 . Другими словами, возрастание t_0 приводит к тому, что в то время, как крылья спектральной линии остаются неизменными, ширина узкополосного пика возрастает. При этом в общем случае может изменяться и его форма.

§ 4.8. Форма и ширина спектральной линии колебания, обладающего произвольным распределением флуктуаций фазы. Один частный случай

Рассмотрим колебание, обладающее только флуктуациями фазы со стационарными приращениями. В этом случае, согласно § 4.3, имеем

$$A^0(\tau) = \frac{R_0^2}{2} \langle \cos \Delta\varphi \rangle, \quad A^1(\tau) = \frac{R_0^2}{2} \langle \sin \Delta\varphi \rangle.$$

Пусть распределение для флуктуаций фазы не является нормальным. Обычно это имеет место тогда, когда флуктуации фазы существуют в нелинейной системе. Если нелинейная система подвержена действию белого шума, то для распределения вероятности фазы $W(\varphi_0, t_0; \varphi, t)$ удастся иногда составить дифференциальное уравнение, имеющее вид

$$\frac{\partial W(\varphi_0, t_0; \varphi, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\frac{dU(\varphi)}{d\varphi} W(\varphi_0, t_0; \varphi, t_0) \right] + \frac{D}{2} \frac{\partial^2 W(\varphi_0, t_0; \varphi, t)}{\partial \varphi^2}, \quad (4.8.1)$$

где $U(\varphi)$ — некоторая потенциальная функция, описывающая систему, D — коэффициент, характеризующий интенсивность шума. Пусть при $t=t_0$ значение фазы $\varphi=\varphi_0$. Тогда, вводя $\tau = t - t_0$, имеем $\Delta\varphi = \varphi(t_0 + \tau) - \varphi_0$. Пусть также

$$W(\varphi_0, t_0; \varphi, t_0) = \delta(\varphi - \varphi_0).$$

Тогда для вероятности переходов

$$W(\varphi_0, t_0; \varphi, t) = W(\varphi_0, t_0; \varphi_0 + \Delta\varphi, t_0 + \tau) \equiv W(\tau, \Delta\varphi)$$

имеем, полагая для простоты $\varphi_0=0$, $t_0=0$, $\Delta\varphi=\varphi$,

$$\frac{\partial W(\tau, \varphi)}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\frac{dU(\varphi)}{d\varphi} W(\tau, \varphi) \right] + \frac{D}{2} \frac{\partial^2 W(\tau, \varphi)}{\partial \varphi^2}. \quad (4.8.2)$$

Искомые функции $A^0(\tau)$ и $A^1(\tau)$ будут тогда равны

$$A^0(\tau) = \frac{R_0^2}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos \varphi W(\tau, \varphi) d\varphi, \quad A^1(\tau) = \frac{R_0^2}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin \varphi W(\tau, \varphi) d\varphi. \quad (4.8.3)$$

Предположим, что потенциальная функция $U(\varphi)$ симметрична. Тогда из физических соображений следует, что $W(\tau, \varphi)$ должно быть четной функцией φ . В этом случае форма спектральной линии также будет симметрична, так как $A^1(\tau) \equiv 0$.

Используя формулы (4.1.9) — (4.1.11), нетрудно найти форму спектральной линии, равную

$$W_z(\Omega) = \frac{R_0^2}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos \varphi \Pi(\varphi, \Omega) d\varphi, \quad (4.8.4)$$

где обозначено

$$\Pi(\varphi, \Omega) = 2 \int_0^{\infty} W(\tau, \varphi) \cos \Omega \tau d\tau.$$

Таким образом, для нахождения формы спектральной линии колебания нет необходимости искать распределение вероятности для фазы, а достаточно найти функцию $\Pi(\varphi, \Omega)$, которая удовлетворяет, вообще говоря, более простому уравнению, чем $W(\tau, \varphi)$.

На основании (4.5.1) и (4.8.4) ширина спектральной линии равна

$$\Delta\Omega = \frac{\pi}{\int_0^{\infty} \Pi(\varphi, 0) \cos \varphi d\varphi}.$$

Если ввести характеристическую функцию $W_\tau(x, \tau)$ вероятностного распределения $W(\tau, \varphi)$:

$$W_\tau(x, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} W(\tau, \varphi) \cos \varphi x d\varphi,$$

то

$$A^0(\tau) = \frac{R_0^2}{2} W_\tau(1, \tau).$$

Следовательно, ширина спектральной линии колебания может

быть записана и так:

$$\Delta\Omega = \frac{\pi}{\int_0^{\infty} W_{\tau}(1, \tau) d\tau} = \frac{\pi}{T_{\Delta}}. \quad (4.8.5)$$

Здесь для сокращения записи введено обозначение

$$T_{\Delta} \equiv \int_0^{\infty} \Pi(\varphi, 0) \cos \varphi d\varphi = \int_0^{\infty} W_{\tau}(1, \tau) d\tau.$$

Найдем функцию $\Pi(\varphi, 0)$. Поскольку

$$\Pi(\varphi, 0) = 2 \int_0^{\infty} W(\tau, \varphi) d\tau,$$

то, интегрируя (4.8.2) по τ от 0 до ∞ , для функции $\Pi(\varphi, 0)$ нетрудно найти следующее уравнение (принимая во внимание, что $W(0, \varphi) = \delta(\varphi)$, $W(\infty, \varphi) = 0$):

$$\frac{D}{2} \frac{d^2 \Pi(\varphi, 0)}{d\varphi^2} + \frac{d}{d\varphi} \left[\frac{dU(\varphi)}{d\varphi} \Pi(\varphi, 0) \right] = -\delta(\varphi).$$

Интегрируя это уравнение, получим

$$\frac{D}{2} \frac{d\Pi(\varphi, 0)}{d\varphi} + \frac{dU(\varphi)}{d\varphi} \Pi(\varphi, 0) = -1(\varphi) + C. \quad (4.8.6)$$

Здесь C — постоянная интегрирования, а $1(\varphi)$ — единичная функция. Пользуясь четностью функции $\Pi(\varphi, 0)$, легко найти постоянную интегрирования. При $\varphi=0$ производная $d\Pi(\varphi, 0)/d\varphi$ должна обращаться в нуль. Так как $U(\varphi)$ — также четная функция, то в точке $\varphi=0$ $dU(\varphi)/d\varphi=0$. Следовательно,

$$-1(0) + C = 0 \quad \text{и} \quad C = \frac{1}{2}.$$

Таким образом, уравнение (4.8.6) принимает вид

$$\frac{d\Pi(\varphi, 0)}{d\varphi} + \frac{dV(\varphi)}{d\varphi} \Pi(\varphi, 0) = \frac{2}{D} \left[\frac{1}{2} - 1(\varphi) \right],$$

где обозначено $V(\varphi) = 2D^{-1}U(\varphi)$. Интеграл этого уравнения равен (для $\varphi \geq 0$)

$$\Pi(\varphi, 0) = \Pi(0, 0) e^{-V(\varphi)} - \frac{1}{D} e^{-V(\varphi)} \int_0^{\varphi} e^{V(x)} dx.$$

Следовательно,

$$T_{\Delta} = \Pi(0, 0) \int_0^{\infty} e^{-V(\varphi)} \cos \varphi d\varphi - \frac{1}{D} \int_0^{\infty} e^{-V(\varphi)} \cos \varphi \int_0^{\varphi} e^{V(x)} dx d\varphi. \quad (4.8.7)$$

Тем самым знание потенциальной функции $U(\varphi)$ позволяет оценить ширину спектральной линии колебания, обладающего фазовыми флуктуациями φ , вероятностное распределение которых описывается уравнением (4.8.1). Для тех систем, для которых величина T_{Δ} конечна, имеет место уширение спектральной линии. Если же потенциальная функция $U(\varphi)$ такова, что $T_{\Delta} = \infty$, то это значит, что колебание имеет монохроматическую спектральную линию, а флуктуации фазы дают лишь пьедестал около нее — фазовый шум.

Глава 5

ЕСТЕСТВЕННЫЕ ФЛУКТУАЦИИ В ПРОСТЕЙШИХ АВТОГЕНЕРАТОРАХ

Основываясь на материале предыдущих глав, можно теперь приступить к непосредственному анализу флуктуаций амплитуды и фазы автоколебаний различных автогенераторов.

Ограничиваясь естественными (дробовыми и тепловыми) шумами, начнем рассмотрение флуктуаций амплитуды и частоты, формы и ширины спектральной линии для двух простейших автогенераторов: LC -генератора с контуром в анодной цепи и LC -генератора с контуром в сеточной цепи. Необходимо отметить, что естественные флуктуации в таких генераторах изучены наиболее подробным образом; использованные при этом методы теоретического исследования были весьма различными (1941 [1], 1950 [1], 1953 [2, 3], 1955 [4, 5], 1958 [1, 19], 1961 [15]). В §§ 5.2, 5.3 подробно рассматривается тот метод анализа естественных флуктуаций в автогенераторе (1963 [2], 1964 [14]), который будет являться основным для большинства последующих глав.

Последние параграфы данной главы посвящены отысканию формы и ширины естественной спектральной линии и их сравнительному анализу для обеих упомянутых схем LC -генераторов.

§ 5.1. Уравнения движения простейшего автогенератора, находящегося под воздействием шумов

Рассмотрим простейший автогенератор — ламповый LC -генератор с контуром в анодной цепи. Его схема для переменных составляющих токов и напряжений изображена на рис. 5.1. Параметры контура: L , C , r ; M и r_c — индуктивность и сопротивление в цепи обратной связи, U — напряжение на сетке, I_a — регулярная часть анодного тока, I — ток через индуктивность контура.

В данном автогенераторе имеется три источника естественных шумов: $i_{др}(t)$ — дробовой шум, $\mathcal{E}_{т1}(t)$ — ЭДС теплового шума сопротивления потерь контура r , $\mathcal{E}_{т2}(t)$ — ЭДС теплового шума активного сопротивления катушки обратной связи.

Характеристику электронной лампы берем в общепринятом виде

$$I_a = Sv(1 - \beta v^2),$$

где β — коэффициент нелинейности, S — крутизна. Уравнения токов и напряжений схемы имеют вид

$$L \frac{dI}{dt} + rI - \frac{1}{C} \int (I_a + i_{xp} - I) dt = \mathcal{E}_{r1}(t),$$

$$v = M \frac{dI}{dt} + \mathcal{E}_{r2}(t).$$

Решая эту систему уравнений относительно напряжения v , имеем

$$\frac{d^2 v}{dt^2} + \frac{\omega_1}{Q} \frac{dv}{dt} + \omega_1^2 v = \omega_1^2 MS \frac{dv}{dt} (1 - 3\beta v^2) + \omega_1^2 E(t), \quad (5.1.1)$$

где случайная функция $E(t)$, представляющая естественные шумы, равна

$$E(t) = \omega_1^{-2} \left[\frac{M}{L} \frac{d^2 \mathcal{E}_{r1}}{dt^2} + M \omega_1^2 \frac{di_{xp}}{dt} + \frac{d^2 \mathcal{E}_{r2}}{dt^2} + \frac{\omega_1}{Q} \frac{d \mathcal{E}_{r2}}{dt} + \omega_1^2 \mathcal{E}_{r2} \right]. \quad (5.1.2)$$

Здесь $\omega_1^2 = 1/LC$; $Q = L\omega_1/r$ — добротность контура. Во всем дальнейшем изложении мы будем предполагать, что рассматриваемые нами LC -генераторы являются томсоновскими генераторами, т. е. потери и нелинейности, существующие в них, являются достаточно малыми. Отрицательное сопротивление, вводимое в контур цепью обратной связи, является, следовательно, также малым. Это значит, что члены $\frac{\omega_1}{Q} \frac{dv}{dt}$ и $\omega_1^2 MS \frac{dv}{dt} (1 - 3\beta v^2)$ являются достаточно малыми. Случайная функция $E(t)$ также является малой (вообще говоря, более высокого порядка малости). Введем следующие обозначения:

$$g = \omega_1^2 (MS - rC), \quad h = 3\beta \omega_1^2 MS. \quad (5.1.3)$$

Перенеся все малые члены в правую часть уравнения, получим

$$\frac{d^2 v}{dt^2} + \omega_1^2 v = g \frac{dv}{dt} - h \frac{dv}{dt} v^2 + \omega_1^2 E(t). \quad (5.1.4)$$

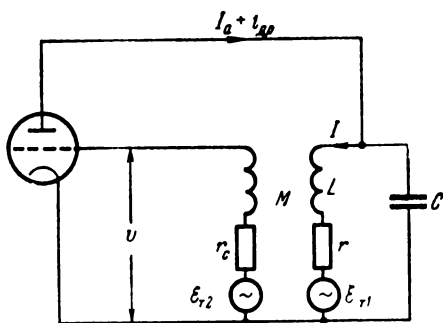


Рис. 5.1.

Вследствие малости g можно считать, что $MS \approx rC$. Тогда индуктивность в цепи обратной связи M можно приближенно принять равной L/SZ_{oe} , где $Z_{oe} = L/rC$ — резонансное сопротивление контура. С учетом этого случайная функция $E(t)$ вместо (5.1.2) примет следующий вид:

$$E(t) = \omega_1^{-2} \left[\frac{d^2 \xi_{\tau_2}}{dt^2} + \frac{\omega_1}{Q} \frac{d \xi_{\tau_2}}{dt} + \omega_1^2 \xi_{\tau_2} + \frac{1}{SZ_{oe}} \frac{d^2 \xi_{\tau_1}}{dt^2} + \frac{1}{SZ_{oe}C} \frac{di_{дp}}{dt} \right]. \quad (5.1.5)$$

§ 5.2. Общие уравнения для флуктуаций амплитуды и фазы автоколебаний томсоновского автогенератора

1. Как показано для частного случая в § 5.1 и как легко показать в общем случае, произвольный томсоновский автогенератор, находящийся под воздействием случайных сил, может быть представлен следующим общим уравнением:

$$\ddot{x} + \omega_1^2 x = F(x, \dot{x}) + \omega_1^2 E(t). \quad (5.2.1)$$

Здесь x — координата, характеризующая состояние автогенератора (например, напряжение на сетке лампы), ω_1 — собственная частота колебательного контура, $F(x, \dot{x})$ — малый член, включающий в себя потери и нелинейности автогенератора, $E(t)$ — малая случайная функция времени, представляющая различные случайные воздействия на автогенератор. Из-за малости $F(x, \dot{x})$ и $E(t)$ можно было бы совершенно формально ввести перед этими функциями множителями малые параметры (как удобнее вводить малые параметры в уравнение (5.2.1), см. в работах (1955 [5], 1961 [15])). Примем это во внимание, но малый параметр вводить не будем.

Будем искать решение уравнения (5.2.1) в виде

$$x = R \cos \psi, \quad \dot{x} = -\omega_1 R \sin \psi, \quad \psi = \omega_1 t + \vartheta, \quad (5.2.2)$$

где вводятся новые неизвестные переменные R и ϑ — амплитуда и фаза колебания $x(t)$. Подставляя (5.2.2) в (5.2.1), получим следующие уравнения для R и ϑ :

$$\begin{aligned} \frac{dR}{dt} &= -\frac{1}{\omega_1} [F(R \cos \psi, -\omega_1 R \sin \psi) + \omega_1^2 E(t)] \sin \psi, \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= -\frac{1}{R\omega_1} [F(R \cos \psi, -\omega_1 R \sin \psi) + \omega_1^2 E(t)] \cos \psi. \end{aligned} \quad (5.2.3)$$

Эти уравнения являются точными и в общем случае достаточно сложными. Поскольку правые части (5.2.3) малы, то $R_1(t)$

и $\vartheta(t)$ являются медленными функциями времени и для них можно получить приближенные уравнения, пользуясь методом усреднения [88]. При его использовании мы ограничимся первым приближением. Прежде чем писать приближенные уравнения, обратим внимание на то, что система (5.2.3) является по существу неавтономной системой, поскольку через случайную функцию времени $E(t)$ в нее входит время. Это значит, что метод усреднения требует некоторых видоизменений.

Если вводить $M\{\}$ — оператор усреднения по периоду колебаний $T_1 = 2\pi/\omega_1$, то для автономной системы он имеет вид

$$M\{X(t)\} \equiv \frac{1}{T_1} \int_0^{T_1} X(\xi) d\xi, \quad (5.2.4)$$

и в результате его действия время t явным образом не входит. В нашем случае неавтономной системы применять такой оператор нельзя, ибо он исключает случайную функцию времени из уравнений первого приближения. Правильным будет здесь использование усреднения по периоду при наличии текущего времени t . Другими словами, мы будем в методе усреднения использовать оператор

$$M\{X(t)\} \equiv \frac{1}{T_1} \int_{t-T_1}^t X(\xi) d\xi \equiv \frac{1}{T_1} \int_{T_1}^t X(t) dt, \quad (5.2.5)$$

сохраняющий после его применения к $E(t)$ случайную функцию времени, которая, однако, теперь будет являться медленной на интервале $[t - T_1, t]$. Отметим, что в случае автономной системы оператор (5.2.5) автоматически переходит в (5.2.4).

Если время t входит в подынтегральную функцию в (5.2.4) только через ψ , то оператор усреднения принимает вид

$$M\{Y(\psi)\} \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{\psi-2\pi}^{\psi} Y(\xi) d\xi. \quad (5.2.6)$$

Согласно [88] уравнения первого приближения для R и ϑ имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{dR}{dt} &= M\left\{-\frac{1}{\omega_1} [F(R \cos \psi, -\omega_1 R \sin \psi) + \omega_1^2 E(t)] \sin \psi\right\}, \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= M\left\{-\frac{1}{R\omega_1} [F(R \cos \psi, -\omega_1 R \sin \psi) + \omega_1^2 E(t)] \cos \psi\right\}. \end{aligned} \quad (5.2.7)$$

Раскрывая правые части (5.2.7), с учетом (5.2.5) и (5.2.6) получим

$$\begin{aligned}\frac{dR}{dt} &= -\frac{1}{2\omega_1} \Phi(\omega_1, R) - \frac{\omega_1}{T_1} \int_{t-T_1}^t E(\xi) \sin(\omega_1 \xi + \vartheta) d\xi, \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= -\frac{1}{2\omega_1 R} \Psi(\omega_1, R) - \frac{\omega_1}{T_1 R} \int_{t-T_1}^t E(\xi) \cos(\omega_1 \xi + \vartheta) d\xi,\end{aligned}\quad (5.2.8)$$

где

$$\begin{aligned}\Phi(\omega, R) &= 2M\{F \sin \psi\} = \frac{1}{\pi} \int_{\psi-2\pi}^{\psi} F(R \cos \xi, -\omega R \sin \xi) \sin \xi d\xi = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(R \cos \xi, -\omega R \sin \xi) \sin \xi d\xi, \\ \Psi(\omega, R) &= 2M\{F \cos \psi\} = \frac{1}{\pi} \int_{\psi-2\pi}^{\psi} F(R \cos \xi, -\omega R \sin \xi) \cos \xi d\xi = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(R \cos \xi, -\omega R \sin \xi) \cos \xi d\xi.\end{aligned}\quad (5.2.9)$$

Уравнения (5.2.8) есть уравнения для R и ϑ , мало меняющихся на интервале времени $[t, t+T_1]$.

Заметим, что функции $\Phi(\omega, R)$ и $\Psi(\omega, R)$ есть по существу коэффициенты первой гармоники функции $F(x, \dot{x})$, при подстановке в последнюю новых переменных, согласно (5.2.2),

$$\begin{aligned}F(R \cos \psi, -\omega_1 R \sin \psi) &= \\ &= \Psi(\omega_1, R) \cos \psi + \Phi(\omega_1, R) \sin \psi + \text{высшие гармоники}.\end{aligned}\quad (5.2.10)$$

Амплитуду и фазу колебания разобьем на детерминированную и флуктуационную части

$$R = R_A + \rho(t), \quad \vartheta = \vartheta_A + \varphi(t), \quad (5.2.11)$$

где детерминированные, слагаемые определяются уравнениями

$$\frac{dR_A}{dt} = -\frac{1}{2\omega_1} \Phi(\omega_1, R_A), \quad \frac{d\vartheta_A}{dt} = -\frac{1}{2\omega_1 R_A} \Psi(\omega_1, R_A). \quad (5.2.12)$$

установившиеся значения амплитуды R_0 и поправки на частоту находятся из уравнений

$$\partial_1 R_0 = 0, \quad (5.2.13)$$

$$\Delta\omega = \Delta\omega_0 = (\Delta\omega)_{R_0} = \left[-\frac{1}{2\omega_1 R} \Psi(\omega_1, R) \right]_{R_0} = -\frac{1}{2\omega_1 R_0} \Psi(\omega_1, R_0).$$

Сюда частота автоколебаний равна $\omega_0 = \omega_1 + \Delta\omega_0$, фаза принимает вид: $\vartheta = \Delta\omega_0 t + \varphi$, $\psi = \omega_0 t + \varphi$. Отметим (учитывая малость поправки на частоту), что выражение для $\Delta\omega_0$ в (5.2.13) эквивалентно следующему:

$$R_0(\omega_1^2 - \omega_0^2) = \Psi(\omega_0, R_0).$$

Подставляя полученное значение для фазы ψ в (5.2.8) и вычисля величину $\Phi(t)$, вследствие ее медленности на интервале $[-T_1, t]$, за знаки интегралов, получим

$$\begin{aligned} \frac{dR}{dt} &= -\frac{1}{2\omega_1} \Phi(\omega_1, R) + \frac{\omega_1}{2} (e_{\perp} \cos \varphi - e_{\parallel} \sin \varphi), \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= -\frac{1}{2\omega_1 R} \Psi(\omega_1, R) - \frac{\omega_1}{2R} (e_{\parallel} \cos \varphi + e_{\perp} \sin \varphi), \end{aligned} \quad (5.2.14)$$

где введены обозначения (вследствие малости поправки на частоту $\Delta\omega_0 \ll \omega_1$ период T_1 заменяется на $T_0 = 2\pi/\omega_0$)

$$\begin{aligned} e_{\parallel} &= e_{\parallel}(t) = \frac{1}{T_0} \int_{t-T_0}^t 2E(\xi) \cos \omega_0 \xi d\xi = \\ &= \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} E(u+t-T_0) \cos \omega_0(u+t-T_0) du, \end{aligned} \quad (5.2.15)$$

$$\begin{aligned} e_{\perp} &= e_{\perp}(t) = -\frac{1}{T_0} \int_{t-T_0}^t 2E(\xi) \sin \omega_0 \xi d\xi = \\ &= -\frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} E(u+t-T_0) \sin \omega_0(u+t-T_0) du. \end{aligned}$$

2. Нетрудно видеть, что полученные уравнения (5.2.14) являются вполне корректными в том смысле, что все функции, входящие в них, являются медленными на интервале $[t-T_0, t]$. Эти уравнения являются также достаточно общими и позволяют исследовать флуктуационные процессы в автогенераторе не только в установившемся режиме, но и в режиме установления автоколебаний, а также при исследовании поведения автогенератора вблизи точек бифуркации.

Рассматривая всюду в книге амплитудные и фазовые флуктуации только в установившемся режиме ($R_d = R_0$), вводя относительные флуктуации амплитуды $\alpha = \rho/R_0$ и ограничиваясь случаем их малости ($\langle \alpha^2 \rangle \ll 1$), получим из (5.2.14), используя (5.2.11) и (5.2.12):

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{dt} &= -p\alpha + \frac{\omega_1}{2R_0} (e_{\perp} \cos \varphi - e_{\parallel} \sin \varphi), \\ \frac{d\varphi}{dt} &= -q\alpha - \frac{\omega_1}{2R_0} (e_{\parallel} \cos \varphi + e_{\perp} \sin \varphi), \end{aligned} \quad (5.2.16)$$

где

$$p = \frac{1}{2\omega_1} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial R} \right)_{R_0}, \quad q = \frac{R_0}{2\omega_1} \left(\frac{\partial (\Psi/R)}{\partial R} \right)_{R_0}. \quad (5.2.17)$$

Величина p есть прочность предельного цикла. Величину можно назвать неизохронностью автогенератора. Это название оправдывается тем, что для изохронного автогенератора $q=0$.

Полученные уравнения (5.2.16) являются окончательными уравнениями, определяющими амплитудные и фазовые флуктуации томсоновского автогенератора в установившемся режиме. Будем называть их флуктуационными уравнениями.

Отметим, что флуктуационные уравнения являются линейными для амплитудных флуктуаций $\alpha(t)$ и нелинейными для фазовых флуктуаций $\varphi(t)$. Это и понятно, так как амплитудные флуктуации мы считали малыми, в то время как на фазовые флуктуации ограничений малостью не накладывалось. Если ограничиться рассмотрением лишь малых фазовых флуктуаций ($|\varphi| \ll 1$), то из (5.2.16) легко получить линейные уравнения для α и φ :

$$\frac{d\alpha}{dt} = -p\alpha + \frac{\omega_1}{2R_0} e_{\perp}(t), \quad \frac{d\varphi}{dt} = -q\alpha - \frac{\omega_1}{2R_0} e_{\parallel}(t). \quad (5.2.18)$$

Эти уравнения являются очень простыми и легко решаются. Однако они не очень интересны. Дело в том, что, рассматривая, например, форму и ширину спектральной линии автогенератора, необходимо знать, как было показано выше, поведение $\varphi(t)$ при всех t , в том числе и при очень больших t . При этом φ может и не удовлетворять условию малости. Следовательно, в общем случае, для решения вопроса о спектральной линии генератора необходимо рассматривать уравнения (5.2.16).

3. В уравнения (5.2.16) входят случайные функции $e_{\parallel}(t)$ и $e_{\perp}(t)$, определенные соотношениями (5.2.15). В исходном уравнении (5.2.1) мы считали заданной случайную функцию $E(t)$, тем самым мы считали, что известны все необходимые нам e_{\parallel}

вероятностные характеристики. Для решения флуктуационных уравнений нам необходимо знать теперь вероятностные характеристики функций $e_{\parallel}(t)$ и $e_{\perp}(t)$.

Отметим, что на основании (5.2.15) случайную функцию $E(t)$ можно представить следующим образом:

$$E(t) \approx \dot{e}_{\parallel}(t) \cos \omega_0 t - e_{\perp}(t) \sin \omega_0 t. \quad (5.2.19)$$

Смысл этого выражения следующий. Случайная функция $E(t)$ может быть весьма сложной и, разумеется, не представимой *очным образом* соотношением (5.2.19) (например, белый шум). Однако на автогенератор, согласно (5.2.14), случайные воздействия оказывают влияние только через посредство компонент $e_{\parallel}(t)$, $e_{\perp}(t)$. Поэтому, представляя $E(t)$ в виде (5.2.19), мы выделяем ее главные (с точки зрения влияния на автогенератор) компоненты.

Пусть действующий на автогенератор шум $E(t)$ является стационарным процессом с нулевым средним значением и функцией корреляции $\Phi_E(\tau)$. Спектральную плотность $E(t)$, равную $S_E(\omega)$, считаем заданной.

Обратимся к корреляционным функциям компонент e_{\parallel} и e_{\perp} . Перемножая $e_{\parallel}(t)$ и $e_{\parallel}(t+\tau)$, заданные формулами (5.2.15), и усредняя, найдем

$$\begin{aligned} \langle e_{\parallel}(t) e_{\parallel}(t+\tau) \rangle &= \frac{2}{T_0^2} \int_0^{T_0} \int_0^{T_0} \Phi_E(\tau+v-u) \cos \omega_0(\tau+v-u) du dv + \\ &+ \frac{2}{T_0^2} \int_0^{T_0} \int_0^{T_0} \Phi_E(\tau+v-u) \cos \omega_0(\tau+v+u+2t) du dv. \end{aligned}$$

Первое слагаемое зависит только от τ . Второе слагаемое является осциллирующим членом, меняющимся во времени как $\cos(2\omega_0 t + \psi_0)$. Таким образом, строго говоря, $e_{\parallel}(t)$ при стационарном шуме $E(t)$ не является стационарной случайной величиной, она содержит медленную (по сравнению с $\cos \omega_0 t$) стационарную компоненту и высокочастотную нестационарную компоненту. Поскольку, однако, высокочастотная компонента не может давать вклада в $\alpha(t)$ и $\varphi(t)$, согласно уравнениям (5.2.16), то в эти уравнения при последовательном проведении метода усреднения, фактически входит только медленная компонента e_{\parallel} и e_{\perp} .

С другой стороны, вычисление функции корреляции, согласно (1.4.2), показывает, что осциллирующий член не дает в нее

вклада. Выражение

$$\begin{aligned}\Phi_{\parallel}(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \langle e_{\parallel}(t) e_{\parallel}(t+\tau) \rangle dt = \\ &= \frac{2}{T_0^2} \int_0^{T_0} \int_0^{T_0} \Phi_E(\tau+v-u) \cos \omega_0(\tau+v-u) du dv \quad (5.2.20)\end{aligned}$$

является точным. Это значит, что спектральная плотность $e_{\parallel}(t)$ не зависит от осциллирующего члена.

Все это дает основание отбросить осциллирующий высокочастотный член в $\langle e_{\parallel}(t) e_{\parallel}(t+\tau) \rangle$ и считать $e_{\parallel}(t)$ медленной стационарной случайной функцией, обладающей функцией корреляции $\Phi_{\parallel}(\tau)$, определенной формулой (5.2.20).

Такое же положение справедливо и для других компонент. Тем самым

$$\langle e_{\perp}(t) e_{\perp}(t+\tau) \rangle = \Phi_{\perp}(\tau), \quad \langle e_{\parallel}(t) e_{\perp}(t+\tau) \rangle = \Phi_{\parallel \perp}(\tau),$$

где

$$\Phi_{\perp}(\tau) = \Phi_{\parallel}(\tau),$$

$$\begin{aligned}\Phi_{\parallel \perp}(\tau) &= -\Phi_{\perp \parallel}(\tau) = \\ &= -\frac{2}{T_0^2} \int_0^{T_0} \int_0^{T_0} \Phi_E(\tau+v-u) \sin \omega_0(\tau+v-u) du dv. \quad (5.2.21)\end{aligned}$$

Если $\Phi_E(\tau)$ выразить через $S_E(\omega)$, то будем иметь

$$\begin{aligned}\Phi_{\parallel}(\tau) &= \int_{-\infty}^{+\infty} 2\tilde{S}_E^0(\Omega) \frac{2}{\Omega^2 T_0^2} [1 - \cos \Omega T_0] \cos \Omega \tau d\Omega, \\ \Phi_{\parallel \perp}(\tau) &= \int_{-\infty}^{+\infty} 2\tilde{S}_E^1(\Omega) \frac{2}{\Omega^2 T_0^2} [1 - \cos \Omega T_0] \sin \Omega \tau d\Omega,\end{aligned} \quad (5.2.22)$$

где

$$\tilde{S}_E(\Omega) \equiv S_E(\omega_0 + \Omega), \quad \tilde{S}_E(\Omega) = \tilde{S}_E^0(\Omega) + \tilde{S}_E^1(\Omega);$$

нулик и единица, как всегда, означают соответственно четную и нечетную функции аргумента. Вторая формула (5.2.22), кстати, показывает, что смешанная функция корреляции $\Phi_{\parallel \perp}(\tau)$ является нечетной функцией τ . С другой стороны, рассматривая спектральные плотности функций $e_{\parallel}(t)$, $e_{\perp}(t)$, равные

$$S_{\parallel}(\Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{\parallel}(\tau) \cos \Omega \tau d\tau, \quad S_{\parallel \perp}(\Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{\parallel \perp}(\tau) \sin \Omega \tau d\tau;$$

на основании (5.2.22) можно найти

$$S_{\parallel}(\Omega) = S_{\perp}(\Omega) = 2\tilde{S}_E^0(\Omega) \frac{2}{\Omega^2 T_0^2} [1 - \cos \Omega T_0],$$

$$S_{\parallel \perp}(\Omega) = 2\tilde{S}_E^1(\Omega) \frac{2}{\Omega^2 T_0^2} [1 - \cos \Omega T_0]. \quad (5.2.23)$$

Принимая во внимание, что флуктуационные уравнения (5.2.16) справедливы только для частот $\Omega \ll \omega_0$ (этого требует используемый метод усреднения) и поэтому точные значения спектральных плотностей $S_{\parallel}(\Omega)$, $S_{\perp}(\Omega)$, $S_{\parallel \perp}(\Omega)$ важны только для этих частот, точные формулы (5.2.23) можно заменить следующими приближенными:

$$S_{\parallel}(\Omega) = S_{\perp}(\Omega) = 2\tilde{S}_E^0(\Omega), \quad S_{\parallel \perp}(\Omega) = 2\tilde{S}_E^1(\Omega). \quad (5.2.24)$$

В этом случае точные выражения (5.2.22) для функций корреляции заменяются следующими приближенными:

$$\Phi_{\parallel}(\tau) = \Phi_{\perp}(\tau) \equiv \Phi^0(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} 2\tilde{S}_E^0(\Omega) \cos \Omega \tau d\Omega,$$

$$\Phi_{\parallel \perp}(\tau) = -\Phi_{\perp \parallel}(\tau) \equiv \Phi^1(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} 2\tilde{S}_E^1(\Omega) \sin \Omega \tau d\Omega. \quad (5.2.25)$$

Заметим, что эта замена практически никак не отразится на $\Phi^0(\tau)$, $\Phi^1(\tau)$, если ширина спектра $S_E(\omega)$ сравнима с p или меньше p . Если же ширина спектра $S_E(\omega)$ бесконечна, то эта замена эквивалентна замене шума e_{\parallel} , e_{\perp} , имеющего время корреляции много меньше p^{-1} , дельта-коррелированным шумом.

Таким образом, можно считать, что случайные процессы $e_{\parallel}(t)$ и $e_{\perp}(t)$, входящие в уравнения (5.2.16), являются стационарными, стационарно связанными и имеют функции корреляции и спектральные плотности мощности, равные соответственно (5.2.25) и (5.2.24).

Пусть, например, $S_E(\omega) = S_0 = \text{const}$ — функция $E(t)$ представляет собой белый шум. Тогда $\tilde{S}_E^0(\Omega) = S_0$, $\tilde{S}_E^1(\Omega) = 0$. В этом случае спектральные плотности и функции корреляции медленных (по сравнению с $\cos \omega_0 t$) случайных функций $e_{\parallel}(t)$ и $e_{\perp}(t)$ равны, согласно (5.2.24) и (5.2.25),

$$S_{\parallel}(\Omega) = S_{\perp}(\Omega) = 2S_0, \quad S_{\parallel \perp}(\Omega) \equiv 0,$$

$$\Phi^0(\tau) = 4\pi S_0 \delta(\tau), \quad \Phi^1(\tau) \equiv 0. \quad (5.2.26)$$

4. В ряде случаев (например, при наличии в автогенераторе флуктуаций его параметров) автогенератор, находящийся под

воздействием случайных сил, описывается уравнением, несколько отличным от (5.2.1):

$$\ddot{x} + \omega_1^2 x = F(x, \dot{x}) + \omega_1^2 \mathcal{G}(t, x, \dot{x}). \quad (5.2.27)$$

Здесь $\mathcal{G}(t, x, \dot{x})$ — по-прежнему малая случайная функция, но зависящая не только от каких-то случайных сил, но и от зависимой переменной x и ее производной.

Уравнение (5.2.27) является еще более сложным, чем (5.2.1), однако в силу все той же малости правой части оно может быть решено теми же методами, что и (5.2.1), и его решение по-прежнему ищется в виде $R_0[1 + \alpha(t)] \cos(\omega_0 t + \varphi)$. При этом в $\mathcal{G}(t, x, \dot{x})$ казалось бы следовало подставить вместо x значение нулевого приближения $R_0 \cos \omega_0 t$. Однако если флуктуации амплитуды $\alpha(t)$ малы и ими можно пренебречь, так как их учет в $\mathcal{G}(t, x, \dot{x})$ дает учет второго порядка малости, то флуктуации фазы $\varphi(t)$ вовсе не малы и их следует принимать во внимание. Таким образом, в $\mathcal{G}(t, x, \dot{x})$ следует подставлять

$$\tilde{x} = R_0 \cos(\omega_0 t + \varphi), \quad \dot{\tilde{x}} = -\omega_0 R_0 \sin(\omega_0 t + \varphi). \quad (5.2.28)$$

При этом уравнение (5.2.27) можно рассматривать как уравнение (5.2.1), а $\mathcal{G}(t, \tilde{x}, \dot{\tilde{x}})$ — как $E(t)$. В таком случае уравнение для флуктуаций амплитуды и фазы колебания в установившемся режиме примет вид

$$\frac{d\alpha}{dt} = -p\alpha - \frac{\omega_1}{2R_0} \frac{2}{T_0} \int_{t-T_0}^t \mathcal{G}(\xi, \tilde{x}, \dot{\tilde{x}}) \sin(\omega_0 \xi + \varphi) d\xi, \quad (5.2.29)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = -q\alpha - \frac{\omega_1}{2R_0} \frac{2}{T_0} \int_{t-T_0}^t \mathcal{G}(\xi, \tilde{x}, \dot{\tilde{x}}) \cos(\omega_0 \xi + \varphi) d\xi.$$

Вид интегралов существенно зависит от вида функции $\mathcal{G}(t, \tilde{x}, \dot{\tilde{x}})$, в частности от ее линейности или нелинейности относительно $\tilde{x}, \dot{\tilde{x}}$ и т. п. Если, например,

$$\mathcal{G}(t, \tilde{x}, \dot{\tilde{x}}) = g_{\parallel}(t) \cos(\omega_0 t + \varphi) - g_{\perp}(t) \sin(\omega_0 t + \varphi), \quad (5.2.30)$$

где $g_{\parallel}(t)$ и $g_{\perp}(t)$ суть функции медленные по сравнению с $\cos \omega_0 t$, то, подставляя (5.2.30) в (5.2.29), нетрудно найти следующие флуктуационные уравнения:

$$\frac{d\alpha}{dt} = -p\alpha + \frac{\omega_1}{2R_0} g_{\perp}(t), \quad \frac{d\varphi}{dt} = -q\alpha - \frac{\omega_1}{2R_0} g_{\parallel}(t). \quad (5.2.31)$$

Эти уравнения являются линейными и очень похожими на (5.2.18). Однако функции $g_{\parallel}(t)$ и $g_{\perp}(t)$ вовсе непохожи на $e_{\parallel}(t)$ и $e_{\perp}(t)$ и, в общем случае, не обладают теми свойствами, которые были найдены в п. 3 для $e_{\parallel}(t)$ и $e_{\perp}(t)$. Статистические свойства $g_{\parallel}(t)$ и $g_{\perp}(t)$ существенно зависят от происхождения функции $\mathcal{E}(t, x, \dot{x})$ и должны рассматриваться в каждом отдельном случае.

§ 5.3. Метод расчета естественных флуктуаций амплитуды, фазы и частоты томсоновского автогенератора

1. Среди различных случайных воздействий на автогенератор особое место занимают естественные шумы — тепловые и дробовые шумы элементов автогенератора, которые, в отличие от «технических» шумов, принципиально не могут быть устранены и поэтому всегда существуют. Обязанные им флуктуации амплитуды, фазы и частоты, а также ширина спектральной линии автогенератора также называются естественными.

Характерной чертой естественных шумов является постоянство их спектральной плотности. Однако при пересчете этих шумов, например, на сетку лампы автогенератора, наряду с непосредственно самими шумами, в общем случае входят и их производные (см. (5.1.5)). Это приводит к тому, что случайное воздействие $E(t)$, действующее на автогенератор (5.2.1) уже не обладает постоянством спектральной плотности, и это обстоятельство в ряде случаев вносит новые эффекты во флуктуационные характеристики автогенератора.

В настоящем параграфе мы будем пренебрегать непостоянством спектральной плотности шума $E(t)$; в этом случае, как было показано выше, случайные функции e_{\parallel} и e_{\perp} являются независимыми и дельта-коррелированными, что позволяет, в отличие от других случаев, найти точное решение уравнений (5.2.16).

2. Итак, пусть действующий на автогенератор шум $E(t)$ равен в общем случае

$$E(t) = \sum a_{kl} \frac{d^k \varepsilon_l}{dt^k}, \quad (5.3.1)$$

где a_{kl} — некоторые коэффициенты, $\varepsilon_1(t)$, $\varepsilon_2(t)$, ... — взаимно независимые дельта-коррелированные нормально распределенные шумы с постоянными спектральными плотностями S_{01} , S_{02} , ... Пусть наивысшая производная, входящая в (5.3.1), равна n . Тогда можно получить следующее выражение для спектральной плотности шума $E(t)$ (см. (2.1.3) и (2.1.8)):

$$S_E(\omega) = b_0 + b_2 \omega^2 + \dots + b_{2n} \omega^{2n}, \quad (5.3.2)$$

где b_k — коэффициенты, зависящие от a_{kl} и S_{0l} следующим образом:

$$\begin{aligned} b_0 &= \sum_l a_{0l}^2 S_{0l}, \\ b_2 &= \sum_l (a_{1l}^2 - 2a_{0l}a_{2l}) S_{0l}, \\ b_4 &= \sum_l (a_{2l}^2 - 2a_{1l}a_{3l} + 2a_{0l}a_{4l}) S_{0l}, \\ b_6 &= \sum_l (a_{3l}^2 - 2a_{2l}a_{4l} + 2a_{1l}a_{5l} - 2a_{0l}a_{6l}) S_{0l}, \\ &\dots \end{aligned} \quad (5.3.3)$$

Подставляя $\omega = \omega_0 + \Omega$, нетрудно получить

$$\tilde{S}_E(\Omega) = c_0 + c_1\Omega + c_2\Omega^2 + \dots + c_{2n}\Omega^{2n}, \quad (5.3.4)$$

где

$$c_0 = S_E(\omega_0), \quad c_1 = \left[\frac{dS_E(\omega)}{d\omega} \right]_{\omega_0}, \quad \dots, \quad c_k = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k S_E(\omega)}{d\omega^k} \right]_{\omega_0}. \quad (5.3.5)$$

Можно показать, что выполнение условия $|\Omega| \ll \omega_0/2n$ приводит к тому, что при любых b_k имеет место неравенство $c_{m+1}\Omega \ll c_m$ ($m=0, 1, \dots, 2n-1$) и, следовательно, в (5.3.4) членами с высшими степенями Ω можно пренебречь.

Будем полагать условие $|\Omega| \ll \omega_0/2n$ выполненным, тогда (5.3.4) сведется к

$$\tilde{S}_E(\Omega) = c_0, \quad \tilde{S}_E^0(\Omega) = c_0, \quad \tilde{S}_E^1(\Omega) \equiv 0. \quad (5.3.6)$$

Получив эти приближенные спектральные характеристики шума $E(t)$, можно теперь на основании (5.2.26) написать функции корреляции случайных процессов $e_{\parallel}(t)$ и $e_{\perp}(t)$, входящих в общие флуктуационные уравнения (5.2.16):

$$\Phi^0(\tau) = 4\pi c_0 \delta(\tau), \quad \Phi^1(\tau) \equiv 0. \quad (5.3.7)$$

Таким образом, для естественных шумов автогенератора в приближении постоянства спектральной плотности $\tilde{S}_E(\Omega)$ случайные функции e_{\parallel} и e_{\perp} являются независимыми и дельта-коррелированными. В этом случае, согласно § 1.9, можно полагать, что совокупность величин α , φ образует марковский процесс, и для решения уравнений (5.2.16) применить метод уравнения ЭФП.

3. Сравнивая уравнения (5.2.16) с (1.9.34), нетрудно видеть, что они полностью совпадают, если положить $x = \alpha$, $y = \varphi$, $n = \omega_1/2R_0$, $\eta = e_{\perp}$, $\xi = e_{\parallel}$, $D = 4\pi c_0$. Следовательно, нелинейные уравнения (5.2.16) можно заменить следующими линейными

(см. 1.9.35) статистически эквивалентными уравнениям (5.2.16):

$$\frac{d\alpha}{dt} = -p\alpha + \frac{\omega_1}{2R_0} e_{\perp}(t), \quad \frac{d\varphi}{dt} = -q\alpha - \frac{\omega_1}{2R_0} e_{\parallel}(t). \quad (5.3.8)$$

Решая эти уравнения, найдем

$$\alpha(t) = \alpha_0 e^{-pt} + \frac{\omega_1}{2R_0} \int_0^t e_{\perp}(t-x) e^{-px} dx, \quad (5.3.9)$$

$$\begin{aligned} \varphi(t) = \varphi_0 - \frac{q}{p}(1 - e^{-pt})\alpha_0 - q \frac{\omega_1}{2R_0} \int_0^t dx \int_0^x e_{\perp}(x-y) e^{-py} dy - \\ - \frac{\omega_1}{2R_0} \int_0^t e_{\parallel}(x) dx. \end{aligned} \quad (5.3.10)$$

Поскольку $e_{\parallel}(t)$ и $e_{\perp}(t)$ дельта-коррелированы, величины α и φ являются нормально распределенными.

Отметим одно интересное следствие статистической эквивалентности рассматриваемых флуктуационных уравнений. Уравнение (5.3.8) полностью совпадает с уравнением (5.2.18), полученным при ограничении рассмотрения малыми флуктуациями фазы (когда $\cos \varphi \approx 1$, $\sin \varphi \approx 0$). Следовательно, в рассматриваемом приближении статистические характеристики φ будут одними и теми же как для малых значений φ , так и для сколь угодно больших.

Это обстоятельство имеет немаловажное значение. Во многих работах при решении задачи о воздействии на автогенератор дельта-коррелированного шума теми или иными методами непосредственно получались уравнения (5.3.8), в то время как строгий анализ, как мы видели, приводит к (5.2.16). Так, например, в (1955 [5]), где применялся метод малого параметра, были получены уравнения (5.3.8) по той причине, что рассматриваемые фазовые флуктуации предполагались достаточно малыми. Однако то, что результаты, полученные для малых φ , могут распространяться и на большие φ , получает обоснование. Статистическая эквивалентность уравнений (5.2.16) и (5.3.8), говорит, в частности, о том, что зависимость $\langle \varphi^2 \rangle$ от t имеет один и тот же вид как для малых, так и для больших $\langle \varphi^2 \rangle$.

Совершенно аналогичное обоснование получает и метод Бракера (1953 [2, 3]), где другим способом также рассматривались фактически малые фазовые флуктуации, а полученные результаты распространялись на произвольную величину фазовых флуктуаций.

Для других упомянутых работ имеет место то же обстоятельство.

4. Рассмотрим теперь конкретные вероятностные характеристики естественных флуктуаций амплитуды и фазы неизохронного автогенератора. Начнем с параметров, которыми определяется двумерная нормальная плотность вероятности переходов $W(\alpha_0, \varphi_0, 0 | \alpha, \varphi, t)$.

Анализируем уравнения (5.3.9) и (5.3.10). Для средних значений имеем

$$\begin{aligned}\langle \alpha(t) \rangle &= \alpha_0 e^{-\rho t}, \\ \langle \varphi(t) \rangle &= \varphi_0 - \frac{q}{p} \alpha_0 (1 - e^{-\rho t}).\end{aligned}\quad (5.3.11)$$

Вычисление дисперсий дает, учитывая (5.3.7),

$$\begin{aligned}\langle (\alpha - \langle \alpha \rangle)^2 \rangle &= \frac{\omega_0^2 \pi c_0}{2R_0^2 p} [1 - e^{-2\rho t}], \\ \langle (\varphi - \langle \varphi \rangle)^2 \rangle &= \frac{\omega_0^2}{4R_0^2} 4\pi c_0 \left[t + \frac{q^2}{p^2} \left(t - \frac{3}{2p} + \frac{2}{p} e^{-\rho t} - \frac{1}{2p} e^{-2\rho t} \right) \right].\end{aligned}\quad (5.3.12)$$

Корреляционный член равен

$$\langle (\alpha - \langle \alpha \rangle)(\varphi - \langle \varphi \rangle) \rangle = -\frac{\omega_0^2 \pi}{2R_0^2} c_0 \frac{q}{p} (1 - e^{-\rho t}). \quad (5.3.13)$$

Полученные формулы (5.3.11) — (5.3.13) позволяют совершенно однозначно написать выражение для $W(\alpha_0, \varphi_0, 0 | \alpha, \varphi, t)$. Из-за его громоздкости мы приводить его здесь не будем. Вводя в рассмотрение уходы фазы $\Delta\varphi = \varphi_{t+\tau} - \varphi_t$, можно найти, что

$$\begin{aligned}\langle \Delta\varphi \rangle &= -\frac{q}{p} \alpha_0 e^{-\rho t} (1 - e^{-\rho \tau}), \\ \langle (\Delta\varphi - \langle \Delta\varphi \rangle)^2 \rangle &= \frac{\omega_0^2 \pi}{R_0^2 p} c_0 \left[p\tau + \frac{q^2}{p^2} \left(p\tau - 1 + e^{-\rho \tau} - \frac{1}{2} e^{-2\rho \tau} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + e^{-\rho(2t+\tau)} - \frac{1}{2} e^{-2\rho(t+\tau)} \right) \right].\end{aligned}\quad (5.3.14)$$

Отвлекаясь от переходных процессов, рассмотрим теперь вероятностные характеристики амплитудных и фазовых флуктуаций для достаточно больших моментов времени ($\rho t \gg 1$) и

частного случая (выбираем его для простоты анализа) $\alpha_0 = \varphi_0 = 0$. Из (5.3.11) — (5.3.14) получаем:

$$\langle \alpha \rangle = \langle \varphi \rangle = \langle \Delta \varphi \rangle = 0, \quad \langle \alpha^2 \rangle = \frac{\omega_1^2 \pi c_0}{2R_0^2 p}, \quad (5.3.15)$$

$$\langle \varphi^2 \rangle = \frac{\omega_1^2}{R_0^2} \pi c_0 \left(1 + \frac{q^2}{p^2} \right) t, \quad (5.3.16)$$

$$\langle \alpha \varphi \rangle = -\frac{\omega_1^2 \pi}{2R_0^2} c_0 \frac{q}{p^2}, \quad (5.3.17)$$

$$\langle \Delta \varphi^2 \rangle = \frac{\omega_1^2 \pi c_0}{R_0^2 p} \left\{ \left(1 + \frac{q^2}{p^2} \right) p \tau - \frac{q^2}{p^2} (1 - e^{-p\tau}) \right\}. \quad (5.3.18)$$

Характерной чертой всех этих выражений является то, что в их знаменатель входит квадрат амплитуды автоколебаний. Физически это обстоятельство означает следующее. Рассматриваемые нами флуктуации амплитуды и фазы порождаются естественными шумами, мощность которых практически не зависит от амплитуды автоколебаний и, следовательно, от мощности автоколебаний, пропорциональной R_0^2 . Поэтому флуктуации (дисперсии безразмерных флуктуаций) должны быть пропорциональны отношению мощностей шум/сигнал, т. е. прямо пропорциональны c_0 и обратно пропорциональны R_0^2 . Таким образом, более мощный автогенератор в общем случае будет обладать меньшими (относительными, безразмерными) флуктуациями.

Обратная пропорциональность дисперсии амплитудных флуктуаций прочности предельного цикла p связана с тем, что при малой прочности предельного цикла, амплитудные возмущения, отклонения от стационарной амплитуды автоколебаний R_0 затухают медленно и шумы могут «накачать» довольно большое значение амплитудных флуктуаций. Однако, так как все-таки > 0 , то $\langle \alpha^2 \rangle$ не может при этом бесконечно возрастать. При большом значении прочности предельного цикла амплитудные флуктуации исчезают гораздо быстрее и от случайных воздействий устанавливается значительно меньшее стационарное значение $\langle \alpha^2 \rangle$.

Совершенно иная картина имеет место для дисперсии фазовых флуктуаций, для которых никакой «возвращающей» силы нет. Это связано с тем, что, в то время как существует установленное значение амплитуды и частоты, установившегося значения фазы нет. Фаза колебаний автогенератора может быть любой, именно поэтому случайные воздействия «гоняют» эту фазу куда угодно. Само значение фазы подчиняется закону

движения броуновской частицы, при этом дисперсия флуктуаций фазы пропорциональна времени, т. е. неограниченно возрастает со временем по диффузионному закону (см. (5.3.16)). Аналогичный диффузионный закон имеет место и для уходов фазы $\Delta\varphi$. Из (5.3.18) видно, что при $p\tau \gg 1$ зависимость $\langle \Delta\varphi^2 \rangle$ от τ такая же, как и $\langle \varphi^2 \rangle$ от t .

При $p\tau \ll 1$ уходы фазы также подчиняются диффузионному закону, но однако с другим коэффициентом диффузии. Легко видеть, что из (5.3.18) для $p\tau \ll 1$ получаем

$$\langle \Delta\varphi^2 \rangle = \frac{\omega_1^2 \pi}{R_0^2} c_0 \tau.$$

Если прочность предельного цикла была бы равна нулю, то из (5.3.8) можно было бы получить и для амплитудных флуктуаций диффузионный закон. Этому соответствовало бы отсутствие устойчивого предельного цикла автоколебаний автогенератора и, следовательно, амплитудные флуктуации могли бы (в линейном приближении) неограниченно возрастать.

Исследуя влияние неизохронности автогенератора на флуктуации амплитуды и фазы, нетрудно видеть, что наличие неизохронности приводит к появлению корреляции между амплитудными и фазовыми флуктуациями (см. (5.3.17)). Физически это связано с тем, что в неизохронном автогенераторе частота автоколебаний зависит от амплитуды и, следовательно, флуктуации амплитуды через флуктуации частоты приводят также и к фазовым флуктуациям. Поэтому суммарные фазовые флуктуации автогенератора содержат компоненту (пропорциональную q), жестко связанную с амплитудными флуктуациями. Это находит свое отражение и в значениях дисперсии фаз (см. (5.3.16) и (5.3.18)).

Если автогенератор является изохронным ($q=0$), то уравнения (5.3.8) разделяются и вследствие статистической независимости $e_{\parallel}(t)$ и $e_{\perp}(t)$ флуктуации амплитуды $\alpha(t)$ и фазы $\varphi(t)$ становятся также статистически независимыми.

§ 5.4. Естественная форма и ширина спектральной линии томсоновского автогенератора

1. Перейдем теперь к анализу формы и ширины спектральной линии автогенератора, подверженного влиянию естественных шумов. Согласно предыдущему параграфу флуктуации амплитуды и частоты генератора подчиняются уравнениям

$$\frac{d\alpha}{dt} = -p\alpha + \frac{\omega_1}{2R_0} e_{\perp}(t), \quad \nu = -q\alpha - \frac{\omega_1}{2R_0} e_{\parallel}(t), \quad (5.4.1)$$

где независимые $e_{\parallel}(t)$ и $e_{\perp}(t)$ обладают одинаковыми функциями корреляции $\Phi(\tau) = 4\pi c_0 \delta(\tau)$ и спектральными плотностями $S(\omega) = 2c_0$. На основании формул § 2.3, для системы уравнений (5.4.1) нетрудно написать следующие значения функций корреляций и спектральных плотностей ($\tau > 0$):

$$\begin{aligned} \Phi_a(\tau) &= \frac{D}{2\rho} e^{-\rho\tau}, & S_a(\Omega) &= \frac{D}{2\pi(\rho^2 + \Omega^2)}, \\ \Phi_v(\tau) &= D\delta(\tau) + q^2 \frac{D}{2\rho} e^{-\rho\tau}, & S_v(\Omega) &= \frac{D}{2\pi} \left[1 + q^2 \frac{1}{(\rho^2 + \Omega^2)} \right], \\ \Phi_{av}^0(\tau) &= -q \frac{D}{2\rho} e^{-\rho\tau}, & S_{av}^0(\Omega) &= -q \frac{D}{2\pi(\rho^2 + \Omega^2)}, \\ \Phi_{av}^1(\tau) &\equiv 0, & S_{av}^1(\Omega) &\equiv 0, \end{aligned} \quad (5.4.2)$$

где $D = \omega_1^2 \pi c_0 / R_0^2$ — величина, зависящая от интенсивности естественных шумов, действующих на автогенератор, от его частоты и мощности и имеющая размерность частоты.

Нетрудно проанализировать полученные выражения. Характерной чертой спектра амплитудных флуктуаций автогенератора является то, что его ширина конечна и равна $\Pi_a = \frac{\pi}{2} \rho$, причем основная мощность амплитудных флуктуаций приходится на низкие частоты (рис. 5.2). Спадание спектральной плотности

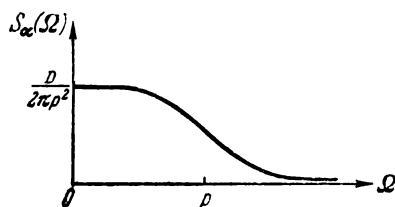


Рис. 5.2.

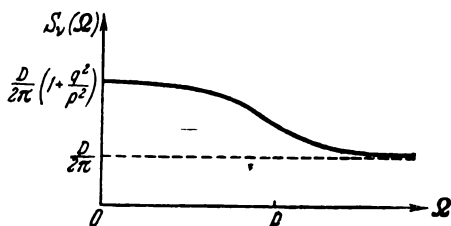


Рис. 5.3.

амплитудных флуктуаций автогенератора к высоким частотам связано с наличием «инерционности» автогенератора к изменению амплитуды. Время корреляции амплитудных флуктуаций равно ρ^{-1} — времени релаксации.

Спектр флуктуаций частоты имеет совершенно иной вид (он изображен на рис. 5.3). Если не обращать внимание на подъем спектральной плотности $S_v(\Omega)$ для $|\Omega| \leq \rho$, что имеет место вследствие неизохронности автогенератора, то можно считать, что спектральная плотность флуктуаций частоты равна постоянному значению $D/2\pi = \omega_1^2 c_0 / 2R_0^2$. Это значит, во-первых, что в

отношении флуктуаций частоты автогенератор является безынерционным и, во-вторых, что флуктуации частоты автогенератора можно считать дельта-коррелированными. Разумеется, постоянство спектральной плотности флуктуаций частоты можно считать установленным лишь для частот Ω , абсолютное значение которых много меньше частоты автоколебания ω_0 , ибо только при этом условии справедливы применяемые методы исследования.

Анализ последних формул (5.4.2) показывает, что корреляция между амплитудными и частотными флуктуациями является всегда четной и обязана неизохронности автогенератора.

Интенсивность естественных шумов в автогенераторе является обычно достаточно малой и в дальнейшем мы будем полагать, что $D \ll p$. Это условие, кстати, должно приниматься нами еще и потому, что выше мы полагали амплитудные флуктуации малыми ($\langle \alpha^2 \rangle \ll 1$), а, как мы имели ранее (см. (5.3.15)) и как видно из значения $\Phi_\alpha(0)$, $\langle \alpha^2 \rangle = D/2p$. Кроме этого, будем предполагать, что в общем случае неизохронность автогенератора не слишком велика и удовлетворяет неравенству $0 \leq q < p$.

2. Ширина спектральной линии. Для определения ширины спектральной линии автогенератора, находящегося под воздействием естественных шумов, — естественной ширины — рассмотрим функцию $\chi(\tau)$. Поскольку $\chi(\tau) = \langle \Delta \varphi^2 \rangle / 2$, то на основании (5.3.18) (для $\tau > 0$)

$$\chi(\tau) = \frac{1}{2p} [-B + (D+B)p\tau + Be^{-p\tau}], \quad (5.4.3)$$

где $B = \frac{q^2}{p^2} D$. Нетрудно видеть, что при $\tau \rightarrow \infty$ $\chi(\tau)$ неограниченно возрастает. Следовательно, должно быть уширение спектральной линии, обязанное флуктуациям частоты. На основании (4.5.3) получим, используя (II.13),

$$\Delta\Omega = \frac{\pi p}{\sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{(-B/2p)^\lambda}{\lambda!} \left(\frac{D+B}{2p} + \lambda \right)^2}.$$

Поскольку $D/2p$, $B/2p \ll 1$, в знаменателе достаточно ограничиться первым членом, вследствие чего найдем

$$\Delta\Omega = \pi \frac{D+B}{2} = \frac{\pi D}{2} \left(1 + \frac{q^2}{p^2} \right) = \frac{\omega_1^2 \pi^2 c_0}{2R_0^2} \left(1 + \frac{q^2}{p^2} \right). \quad (5.4.4)$$

Такова естественная ширина спектральной линии автогенератора. Легко видеть, что вследствие малости шумов ($D \ll p$) ширина спектральной линии много меньше прочности предельного

цикла $\Delta\Omega \ll p$. Введенная выше величина D , имеющая размерность частоты, получает теперь физический смысл. Легко видеть из (5.4.4), что D по порядку величины равна $\Delta\Omega$ — естественной ширине спектральной линии автогенератора. Кроме того, принципиальная связь D с шириной спектральной линии видна и из того, что D (при $q=0$) есть коэффициент в диффузионном законе флуктуаций фазы: $\langle\varphi^2\rangle = Dt$ (см. (5.3.16)), а согласно § 4.5, при дельта-коррелированных флуктуациях частоты именно этот коэффициент определяет ширину спектральной линии (см. (4.5.14)).

Если рассмотреть относительную ширину спектральной линии

$$\delta\Omega = \frac{\Delta\Omega}{\omega_1} = \frac{\omega_1 \pi^2 c_0}{2R_0^2} \left(1 + \frac{q^2}{p^2}\right), \quad (5.4.5)$$

то видно, что она прямо пропорциональна частоте автогенератора ($\omega_0 \approx \omega_1$). Это характерное свойство естественной ширины линии. С точки зрения ее уменьшения выгодно, следовательно, иметь дело с более низкочастотными автогенераторами.

Формулы (5.4.4) и (5.4.5) показывают также, что $\Delta\Omega$ или $\delta\Omega$ зависит как от мощности автогенератора (пропорциональной $P_{\Omega 0}^2$), так и от отношения неизохронности к прочности предельного цикла. При этом неизохронность увеличивает ширину спектральной линии. Это связано с тем, что значение $q > 0$ увеличивает $S_v(\Omega)$ в области малых Ω (см. рис. 5.3), а согласно § 4.5, вид спектра флуктуаций частоты, изображенный на рис. 5.3, дает основание утверждать, что ширина спектральной линии, обязанная флуктуациям частоты, определяется значением $S_v(0)$. В самом деле, на основании (4.5.21) и (5.4.2)

$$\Delta\Omega = \pi^2 S_v(0) = \frac{\pi D}{2} \left(1 + \frac{q^2}{p^2}\right),$$

что полностью совпадает с (5.4.4).

3. Форма спектральной линии. Поскольку для неизохронного автогенератора существует корреляция между амплитудными и частотными флуктуациями, для нахождения формы спектральной линии обращаемся к § 4.6.

Вычисление совместных функций корреляции $\tilde{\Phi}_{\alpha\Delta\varphi}$ и величин C^0 , C^1 , на основании (4.6.4), (4.6.12), (4.6.19), (4.6.20) и (5.4.2), дает ($\tau > 0$)

$$\Phi_{\alpha\Delta\varphi}^0(\tau) \equiv 0, \quad \Phi_{\alpha\Delta\varphi}^1(\tau) = -\frac{q}{p} \frac{D}{2p} (1 - e^{-p\tau}), \quad \tilde{\Phi}_{\alpha\Delta\varphi}^0(\tau) \equiv 0,$$

$$C^0 = 0, \quad \tilde{\Phi}_{\alpha\Delta\varphi}^1 = \frac{q}{p} \frac{D}{2p} e^{-p\tau}, \quad C^1 = \frac{q}{p} \frac{D}{2p}.$$

Сравнение этих функций с $\Phi_\alpha(\tau)$ показывает одинаковый порядок их малости. Поскольку теперь $\Delta\Omega \ll p$, $C^1 \ll 1$, $\langle\alpha^2\rangle \ll 1$, то,

согласно § 4.6, форма спектра исследуемого колебания описывается следующими формулами (см. 4.6.26):

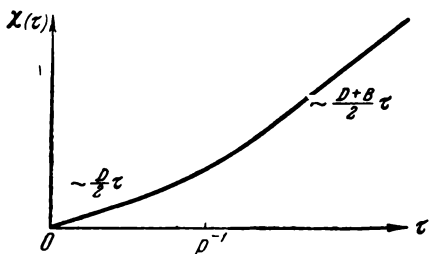
$$W_x^0(\Omega) = W_{x\chi}^0(\Omega) + \frac{R_0^2}{2} S_a(\Omega),$$

$$W_x^1(\Omega) = -2C^1 W_{x\chi}^1(\Omega) + \frac{R_0^2}{2} 2 \frac{S_{av}^0(\Omega) - S_{av}^0(0)}{\Omega},$$

где

$$W_{x\chi}^0(\Omega) = \frac{R_0^2}{2\pi} \int_0^\infty e^{-\chi(\tau)} \cos \Omega \tau d\tau, \quad W_{x\chi}^1(\Omega) = \frac{R_0^2}{2\pi} \int_0^\infty e^{-\chi(\tau)} \sin \Omega \tau d\tau.$$

Используя малость $B/2p$ и $D/2p$, в разложении (II.13) можно ограничиться первыми двумя слагаемыми (второе слагаемое необходимо учитывать, ибо оно становится сравнимым с первым при $\Omega \gg \Delta\Omega$) и получить



$$W_{x\chi}^0(\Omega) = \frac{R_0^2}{2\pi} \frac{\frac{D}{2} \Omega^2 + p^2 \frac{\Delta\Omega}{\pi}}{\left(\frac{\Delta\Omega^2}{\pi^2} + \Omega^2\right)(p^2 + \Omega^2)} = \frac{R_0^2}{2\pi} \frac{D}{2} \frac{(p^2 + \Omega^2) + q^2}{\left(\frac{\Delta\Omega^2}{\pi^2} + \Omega^2\right)(p^2 + \Omega^2)}.$$

Рис. 5.4.

(5.4.6)

При $\Omega \ll p$ отсюда получаем выражение для пика спектральной линии

$$W_{x\chi}^0(\Omega) = \frac{R_0^2}{2\pi} \frac{\frac{\Delta\Omega}{\pi}}{\frac{\Delta\Omega^2}{\pi^2} + \Omega^2}, \quad (5.4.7)$$

который имеет резонансную форму, ширину $\Delta\Omega$, являясь достаточно высоким при $\Omega=0$. Эта резонансная форма линии получается также из (5.4.6) и при любых Ω , если изохронность генератора q равна нулю.

Из (5.4.6) следует, что неизохронность генератора искажает резонансную форму пика спектральной линии. Согласно § 4.5 резонансная форма линии получалась для случая, когда функция $\chi(\tau)$ была пропорциональна τ для всех τ . В нашем случае (см. (5.4.4)) $\chi(\tau)$ имеет более сложный вид, показанный на рис. 5.4. При этом пропорциональность $\chi(\tau)$ и τ нарушается при $\tau \approx 1/p$. Это и приводит к отклонению формы спектральной линии при Ω , сравнимых с p , от резонансной формы. Рис. 5.4 по-

казывает также, что неизохронность автогенератора начинает сказываться на законе диффузии приращения фазы, только начиная с $\tau \approx 1/p$, а при меньших значениях τ неизохронный генератор с точки зрения флуктуаций фазы ведет себя как изохронный.

Нечетную компоненту спектральной линии $W_x^1(\Omega)$ нетрудно найти, используя (II. 14):

$$W_x^1(\Omega) = \frac{R_0^2}{2\pi} \frac{\Omega}{\Delta\Omega^2/\pi^2 + \Omega^2}.$$

Следовательно, в общем случае узкополосный пик линии несимметричен, и эта несимметрия обязана неизохронности автогенератора.

Собирая все слагаемые вместе, получаем следующие компоненты формы спектральной линии исследуемого колебания:

$$\begin{aligned} W_x^0(\Omega) &= \frac{R_0^2}{2\pi} \left[\frac{(p^2 + \Omega^2) + q^2}{\left(\frac{\Delta\Omega^2}{\pi^2} + \Omega^2\right)(p^2 + \Omega^2)} + \frac{1}{p^2 + \Omega^2} \right] \frac{D}{2}, \\ W_x^1(\Omega) &= \frac{R_0^2}{2\pi} 2 \frac{q}{p} \left[\frac{-\frac{\Omega}{p}}{\frac{\Delta\Omega^2}{\pi^2} + \Omega^2} + \frac{\frac{\Omega}{p}}{p^2 + \Omega^2} \right] \frac{D}{2}. \end{aligned} \quad (5.4.8)$$

Отсюда видно, что если генератор неизохронный, то как пик, так и пьедестал являются несимметричными, но в пределах ширины пика ($\Omega \approx \Delta\Omega$) несимметрия пика вследствие $\Delta\Omega \ll p$ мала, что подтверждает, в частности, общий вывод, полученный нами в п. 4 § 4.6.

Для изохронного автогенератора спектр колебания симметричен и равен

$$W_x(\Omega) = \frac{R_0^2}{2\pi} \left[\frac{1}{\frac{\Delta\Omega^2}{\pi^2} + \Omega^2} + \frac{1}{p^2 + \Omega^2} \right] \frac{D}{2}, \quad (5.4.9)$$

при этом $\Delta\Omega = \pi D/2$.

Рассмотрим теперь поведение $W^0(\Omega)$ и $W^1(\Omega)$ при $\Omega \rightarrow \infty$, т. е. рассмотрим крылья спектральной линии. На основании формул (4.7.24), (4.7.26) и (5.4.2) имеем

$$W_x^0(\Omega) = \frac{R_0^2}{2\pi} \frac{D}{\Omega^2}, \quad W_x^1(\Omega) = -\frac{R_0^2}{2\pi} q \frac{D}{\Omega^3}. \quad (5.4.10)$$

Нетрудно видеть, что эти же самые формулы, как и должно быть, получаются и из (5.4.8) для $\Omega \gg p$. При этом нечетная компонента не только убывает быстрее четной, но она и много меньше последней при $\Omega \gg p$ вследствие $0 \leq q < p$.

Тем самым при $\Omega \gg p$

$$W_x(\Omega) = \frac{R_0^2}{2\pi} \frac{D}{\Omega^2}.$$

Эта формула, разумеется, справедлива в применении к нашему автогенератору, пока $\Omega \ll \omega_0$, ибо это ограничение, как уже упоминалось, вообще свойственно применяемым методам исследования нелинейных уравнений автогенератора (см. § 5.2).

Сравнение формул (5.4.10) и (5.4.8) демонстрирует ценность методов, развитых в § 4.7 для нахождения крыльев спектральной линии колебания. Крылья линии мы находили в предположении $\Omega \rightarrow \infty$. Как видно из сравнения вышеуказанных формул, эта математическая абстракция просто эквивалентна выбору частоты Ω , много большей ширины спектра компонент, входящих в выражения для $W^0(\Omega)$ и $W^1(\Omega)$. Таким образом, результаты, полученные в § 4.7 при $\Omega \rightarrow \infty$, сохраняют свою ценность и при $\Omega \ll \omega_0$.

Можно, наконец, объединить формулы (5.4.8). Учítывая, что $\Delta\Omega \ll p$, нетрудно получить

$$W_x(\Omega) = \frac{R_0^2}{2\pi} \frac{2\left(\Omega - \frac{q}{2}\right)^2 + \frac{q^2}{2} + p^2}{\left(\frac{\Delta\Omega^2}{\pi^2} + \Omega^2\right)(p^2 + \Omega^2)} \frac{D}{2}.$$

Как уже говорилось, при $q=0$ форма спектральной линии полностью симметрична. При $q=p$ ширина пика удваивается и для $|\Omega| \sim p$ левое крыло ($\Omega < 0$) почти втрое выше правого ($\Omega > 0$).

§ 5.5. Сравнительный анализ флуктуаций и естественной ширины спектральной линии простейших томсоновских автогенераторов

Рассмотрим количественные характеристики флуктуаций для некоторых конкретных схем LC-генераторов.

1. Начнем анализ с автогенератора, рассмотренного в § 5.1 (рис. 5.1). Для него мы получили

$$\ddot{x} + \omega_1^2 x = F(x, \dot{x}) + \omega_1^2 E(t),$$

где x — напряжение на сетке лампы,

$$F(x, \dot{x}) = g\dot{x} - h\dot{x}x^2, \quad g = \omega_1^2(MS - rC), \quad h = 3\beta\omega_1^2 MS, \quad (5.5.1)$$

$$E(t) = \left(\frac{d^2 \xi_{T2}}{dt^2} + \frac{\omega_1}{Q} \frac{d \xi_{T2}}{dt} + \omega_1^2 \mathcal{E}_{T2} + \frac{1}{SZ_{oe}} \frac{d^2 \xi_{T1}}{dt^2} + \frac{1}{SZ_{oe}C} \frac{di_{ap}}{dt} \right) \omega_1^{-2}.$$

Прежде чем находить флуктуационные характеристики, отыщем стационарные значения частоты и амплитуды автоколебаний.

На основании (5.2.9) и (5.5.1) имеем

$$\Phi(\omega, R) = -gR\omega + \frac{h}{4}\omega R^3, \quad \Psi(\omega, R) \equiv 0.$$

Тем самым, согласно (5.2.13), поправка на частоту равна нулю и частота автоколебаний равна собственной частоте контура $\omega_0 = \omega_1$. Для стационарной амплитуды находим

$$R_0^2 = \frac{4g}{h} = \frac{4(MS - rC)}{3\beta MS}. \quad (5.5.2)$$

Расчет неизохронности и прочности предельного цикла приводит, согласно (5.2.17), к

$$p = g = \omega_0^2(MS - rC), \quad q = 0. \quad (5.5.3)$$

Автоколебания генератора будут устойчивыми, если $p > 0$, т. е. если выполняется условие самовозбуждения $MS > rC$. Будем считать это условие выполненным.

Найдем теперь спектральную плотность шума $E(t)$ (ограничиваясь, согласно § 5.3, ее постоянной частью). Нам нужно отыскать значение $c_0 = S_E(\omega_0)$. В рассматриваемой схеме автогенератора мы имеем три источника естественных шумов, $i_{др}$ — дробовой шум лампы и $\mathcal{E}_{\tau 1}$, $\mathcal{E}_{\tau 2}$ — тепловые шумы сопротивления потерь контура r и потерь катушки обратной связи r_c . Пусть постоянная составляющая анодного тока лампы равна I_0 , а температуры обоих сопротивлений одинаковы и равны T . Тогда спектральные плотности рассматриваемых шумов равны соответственно (см. (3.1.3) и (3.2.5)):

$$\begin{aligned} S_{др}(\omega) &= \frac{1}{2\pi} eI_0\Gamma^2, \\ S_{\tau 1}(\omega) &= \frac{1}{\pi} kTr, \\ S_{\tau 2}(\omega) &= \frac{1}{\pi} kTr_c, \end{aligned} \quad (5.5.4)$$

где k — постоянная Больцмана, а Γ^2 — коэффициент депрессии дробового шума.

Используя формулу (5.3.3) для случайной функции $E(t)$, представленной выражением (5.5.1), с учетом (5.5.4) нетрудно получить

$$S_E(\omega) = b_0 + b_2\omega^2 + b_4\omega^4,$$

где

$$\begin{aligned} b_0 &= \frac{1}{\pi} kTr_c, \\ b_2 &= \left\{ \left(\frac{\omega_0^2}{Q^2} - 2\omega_0^2 \right) \frac{1}{\pi} kTr_c + \frac{1}{(SZ_{oe}C)^2} \frac{1}{2\pi} eI_0\Gamma^2 \right\} \frac{1}{\omega_0^4}, \\ b_4 &= \left(\frac{1}{\pi} kTr_c + \frac{1}{(SZ_{oe})^2} \frac{1}{\pi} kTr \right) \frac{1}{\omega_0^4}. \end{aligned}$$

Полагая $\omega = \omega_0$, получим следующее выражение для коэффициента c_0 :

$$c_0 = S_E(\omega_0) = \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{2kTr_c}{Q^2} + \frac{2kTr}{(SZ_{oe})^2} + \frac{eI_0\Gamma^2 r Z_{oe}}{(SZ_{oe})^2} \right\}. \quad (5.5.5)$$

Оценим соотношение первых двух членов этой формулы. Входящая в первое слагаемое величина r_c обычно не поддается непосредственному измерению, в то время как сопротивление r легко может быть определено экспериментально через Z_{oe} и Q согласно $r = Z_{oe}Q^{-2}$. Поэтому имеет смысл найти приближенное значение r_c , выразив его через r .

Предположим, что катушка контура имеет n витков, а катушка обратной связи — n_c . Тогда можно считать, что L пропорциональна n^2 , а M — пропорциональна nn_c . В этом случае (см. § 5.1)

$$\frac{M}{L} \approx \frac{n_c}{n} \approx \frac{r_c}{r} \approx \frac{1}{SZ_{oe}}.$$

Следовательно, можно считать, что

$$r_c \approx \frac{r}{SZ_{oe}}.$$

В таком случае первые два слагаемые в скобке формулы (5.5.5) примут вид

$$\frac{2kTr}{Q^2 SZ_{oe}} + \frac{2kTr}{(SZ_{oe})^2}.$$

Поскольку для всех реальных схем всегда выполняется условие $Q^2 \gg Z_{oe}$, то первым слагаемым, т. е. тепловыми шумами сопротивления потерь катушки обратной связи, несмотря на то, что они действуют непосредственно на сетку лампы, можно пренебречь по сравнению с тепловыми шумами контура.

Следовательно, окончательное выражение для спектральной плотности естественных шумов, пересчитанных на сетку лампы для схемы рис. 5.1, имеет вид

$$c_0 = \frac{1}{2\pi (SZ_{oe})^2} (2kTr + eI_0\Gamma^2 r Z_{oe}).$$

Постоянная D , введенная в предыдущем параграфе, равна, следовательно,

$$D = \frac{\omega_1^2}{2R_0^2(SZ_{oe})^2} (2kTr + eI_o\Gamma^2rZ_{oe}).$$

2. Обращаясь теперь к формулам (5.4.2), находим, что амплитудные и частотные флуктуации рассматриваемого автогенератора не коррелированы и имеют следующие характеристики:

$$\begin{aligned} \langle \alpha^2 \rangle &= \frac{D}{2p} = \frac{\omega_1^2}{4R_0^2p(SZ_{oe})^2} (2kTr + eI_o\Gamma^2rZ_{oe}), \\ S_\alpha(\Omega) &= \frac{\langle \alpha^2 \rangle p}{\pi(p^2 + \Omega^2)}, \quad S_\nu(\Omega) = \frac{D}{2\pi}. \end{aligned} \quad (5.5.6)$$

Спектральная плотность частотных флуктуаций получилась в принятых ограничениях точно постоянной и не зависящей, в отличие от амплитудных флуктуаций от близости автогенератора к порогу самовозбуждения (от величины $p=g$).

Интенсивность и ширина спектра амплитудных флуктуаций генератора существенно зависят от p или тем самым (см. (5.5.3)) от $(MS - rC)$. На рис. 5.5 показаны зависимости $S_\alpha(\Omega)$ для разных значений p . Кривая 1 соответствует значению p_1 , кривая 2 — значению $p_2 > p_1$. С уменьшением p резко возрастает и $\langle \alpha^2 \rangle$. Эти изменения объясняются тем, что при близости автогенератора к порогу самовозбуждения отклонения амплитуды от ее стационарного значения, в силу малой прочности предельного цикла, исчезают медленно (в случае отсутствия внешних воздействий) и случайные силы «накачивают» сравнительно большие значения $\langle \alpha^2 \rangle$.

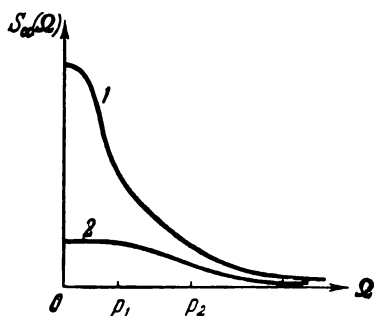


Рис. 5.5.

Таким образом, с точки зрения уменьшения амплитудных флуктуаций генератор должен работать в режиме, далеком от порога самовозбуждения (это утверждение безусловно справедливо пока генератор считается томсоновским).

Ширина спектральной линии на основании (5.4.4) равна

$$\Delta\Omega = \frac{\pi D}{2} = \frac{\pi\omega_1^2}{4R_0^2(SZ_{oe})^2} (2kTr + eI_o\Gamma^2rZ_{oe}). \quad (5.5.7)$$

Форма линии является симметричной и состоит из узкополосного пика и пьедестала

$$W_x(\Omega) = \frac{R_0^2}{2\pi} \left[\frac{1}{D^2/4 + \Omega^2} + \frac{1}{p^2 + \Omega^2} \right] \frac{D}{2}. \quad (5.5.8)$$

Согласно (5.5.7) естественная ширина спектральной линии рассмотренного LC -генератора, так же как и $\langle \alpha^2 \rangle$, зависит от крутизны лампы S и резонансного сопротивления контура Z_{oe} . Чем больше крутизна лампы, тем меньше ширина линии $\Delta\Omega$. Это обстоятельство связано с тем, что при прочих равных условиях большей крутизне лампы соответствует меньшая связь контура с сеткой лампы и, следовательно, меньшие естественные шумы, пересчитываемые на сетку.

Двойное влияние Z_{oe} на $\Delta\Omega$ связано с тем, что, с одной стороны, при большем Z_{oe} на контуре падает большее значение дробовых шумов, а с другой стороны, при большем значении Z_{oe} (при большей добротности контура) связь контура с сеткой становится меньше (чтобы сохранить, например, ту же самую амплитуду колебаний на сетке лампы). Первое ведет к увеличению ширины линии, а второе — к уменьшению.

Интересно проследить влияние добротности колебательного контура на интенсивность амплитудных флуктуаций и на естественную ширину спектральной линии. Если, сохраняя параметры L, C, p, S, R_0, I_0 неизменными, увеличить добротность контура на порядок (уменьшив сопротивление потерь r), то, учитывая, что $rZ_{oe} = L/C = \text{const}$, на основании (5.5.6) и (5.5.7) нетрудно убедиться в том, что слагаемые $\langle \alpha^2 \rangle$ и $\Delta\Omega$, обязанные тепловым шумам, уменьшились на три порядка, а слагаемые, обязанные дробовым шумам, — на два порядка.

Эта разница связана с тем, что при увеличении Q вклад дробовых шумов не изменяется ($eI_0\Gamma^2 r Z_{oe} = \text{const}$), а вклад тепловых шумов ($2kTr$) уменьшается.

Добротность колебательного контура играет, следовательно, очень большую роль в величине флуктуаций автогенератора.

Оценим удельную роль тепловых и дробовых шумов. Пусть постоянная составляющая анодного тока лампы равна $I_0 = 10 \text{ ма}$, коэффициент депрессии дробового шума равен $\Gamma^2 = 0,2$, а температура контура равна $T = 300^\circ \text{ К}$. Тогда отношение вклада дробовых шумов к вкладу тепловых равно

$$\frac{\text{дроб.}}{\text{тепл.}} = \frac{eI_0\Gamma^2}{2kT} Z_{oe} = \frac{eI_0\Gamma^2}{2kT\omega_1 C} Q = \frac{0,32 \cdot 10^{-21} a^2 / \varepsilon \mu}{8 \cdot 10^{-21} \delta^2 / \omega_m \cdot \varepsilon \mu} Z_{oe} = \frac{Z_{oe(ом)}}{25}. \quad (5.5.9)$$

Совершенно очевидно отсюда, что уже для колебательного контура с $Z_{0e} \geq 250$ ом влиянием его тепловых шумов по сравнению с дробовыми шумами лампы можно пренебречь.

3. Представляет интерес численно оценить естественную ширину спектральной линии рассмотренного автогенератора. Пусть частота автоколебаний равна $f_0 = 10^5$ гц, амплитуда автоколебаний на сетке лампы — $R_0 = 1$ в, крутизна лампы $S = 3$ ма/в, постоянная составляющая анодного тока $I_0 = 10$ ма, температура контура $T = 300^\circ$ К, сопротивление потерь контура $r = 1$ ом, резонансное сопротивление контура $Z_{0e} = 10$ ком ($Q = 100$). Тогда на основании (5.5.7) получим

$$\Delta f = \frac{\Delta \Omega}{2\pi} = 1,6 \cdot 10^{-10} \text{ гц.}$$

Относительная ширина линии равна

$$\delta f = \frac{\Delta f}{f_0} = 1,6 \cdot 10^{-15}. \quad (5.5.10)$$

Таково значение естественной ширины спектральной линии реального автогенератора. Она чрезвычайно мала. Если бы наши часы (представляющие собой автоколебательную систему) обладали такой же шириной спектральной линии (т. е. по существу стабильностью $\approx 10^{-15}$), то они уходили бы на одну секунду за двадцать миллионов лет.

Никакой реальный автогенератор, конечно, не обладает такой высокой стабильностью. Это связано с тем, что в нем, кроме естественных шумов, как уже говорилось, имеются и технические шумы, интенсивность которых превышает интенсивность естественных шумов. Это, как будет показано ниже, приводит к тому, что у обычных генераторов относительная ширина («техническая» ширина) спектральной линии равна примерно $\delta f \approx \approx 10^{-7}$. Однако изучение естественной ширины линии, несмотря на ее малость, представляет большой принципиальный интерес и существуют методы, позволяющие на фоне большой технической ширины линии измерять малую естественную ширину.

Оценим теперь интенсивность относительных амплитудных флуктуаций. В первую формулу (5.5.6), помимо уже численно известных нам параметров, входит прочность предельного цикла, равная $p = g = \omega_0^2 (MS - rC)$. Предположим, что для рассматриваемого автогенератора она равна $p = \omega_0/100 = 2\pi \cdot 10^3$ (время установления 1 мсек). Из (5.5.6) и (5.5.7) можно найти следующую связь между интенсивностью амплитудных флуктуаций и шириной спектральной линии:

$$\langle a^2 \rangle = \frac{2 \Delta f}{p}. \quad (5.5.11)$$

Подставляя численные значения, получим $\langle \alpha^2 \rangle = 5,1 \cdot 10^{-14}$. Это значит, что естественные флуктуации амплитуды равны примерно (в пересчете на сетку лампы)

$$\Delta R \approx R_0 \sqrt{\langle \alpha^2 \rangle} \approx 1 \cdot 2,3 \cdot 10^{-7} \text{ в} = 0,23 \text{ мкв.}$$

4. Рассмотрим теперь естественные флуктуации в автогенераторе с контуром в сеточной цепи, схема которого показана на рис. 5.6. Тепловые шумы катушки обратной связи учитывать уже не будем; можно показать, что они пренебрежимы в сравнении с тепловыми шумами контура. Уравнения схемы принимают вид:

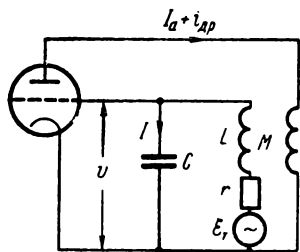


Рис. 5.6.

$$L \frac{dI}{dt} + rI + \frac{1}{C} \int I dt = \mathcal{E}_r(t) - M \frac{d}{dt} [I_a + i_{ар}],$$

$$I_a = Sv(1 - \beta v^2), \quad v = -\frac{1}{C} \int I dt.$$

Обозначая напряжение на сетке $v = x$, отсюда нетрудно получить

$$\ddot{x} + \omega_1^2 x = F(x, \dot{x}) + \omega_1^2 E(t),$$

где $F(x, \dot{x})$ по-прежнему задается формулой (5.5.1), а

$$E(t) = -\mathcal{E}_r(t) + M \frac{di_{ар}}{dt} = -\mathcal{E}_r + \frac{1}{\omega_1^2 SZ_{oe} C} \frac{di_{ар}}{dt}. \quad (5.5.12)$$

Тем самым автогенератор с контуром в сеточной цепи отличается от генератора с контуром в анодной цепи только выражением для $E(t)$ — величиной естественных шумов, пересчитанных на сетку лампы. Поэтому вся разница между флуктуационными выражениями для обоих генераторов будет только в величине c_0 и, следовательно, D , которая для (5.5.12) равна

$$D = \frac{\omega_1^2}{2R_0^2 (SZ_{oe})^2} [2kTr(SZ_{oe})^2 + eI_0 \Gamma^2 Z_{oe} r]. \quad (5.5.13)$$

По сравнению с первой схемой, в автогенераторе с контуром в сеточной цепи влияние тепловых шумов контура существенно сильнее, оно возрастает в $(SZ_{oe})^2 \sim Q^2$ раз, в то время как влияние дробовых шумов остается прежним.

Интенсивность амплитудных флуктуаций для рассматриваемого генератора равна

$$\langle \alpha^2 \rangle = \frac{\omega_1^2}{4R_0^2 (SZ_{oe})^2 p} [2kTr(SZ_{oe})^2 + eI_0 \Gamma^2 r Z_{oe}]. \quad (5.5.14)$$

Ширина спектральной линии равна

$$\Delta\Omega = \frac{\pi\omega_1^2}{4R_0^2 (SZ_{oe})^2} [2kTr(SZ_{oe})^2 + eI_0 \Gamma^2 r Z_{oe}]. \quad (5.5.15)$$

Нетрудно видеть, что для этой схемы увеличение добротности контура (при постоянстве тех же параметров, что и для предыдущей схемы) сказывается на изменении интенсивности амплитудных флуктуаций и ширины спектральной линии по-другому. При увеличении Q на порядок, слагаемые $\langle \alpha^2 \rangle$ и Q , связанные с тепловыми шумами, уменьшаются всего лишь на порядок, а слагаемые, обусловленные дробовым шумом, по-прежнему уменьшаются на два порядка.

Следовательно, отношение вклада дробовых шумов к вкладу тепловых теперь иное и оно равно (для прежних значений I_0 , T , S)

$$\frac{\text{дроб.}}{\text{тепл.}} = \frac{eI_0 \Gamma^2}{2kTS^2 Z_{oe}} = \frac{eI_0 \Gamma^2 \omega_1 C}{2kTS^2 Q} = \frac{10^5}{25} \frac{1}{Z_{oe}(\text{ом})}. \quad (5.5.16)$$

Отсюда очевидно, что для генератора с $Z_{oe} \geq 10^5$ ом дробовыми шумами можно пренебречь, и лишь при $Z_{oe} \leq 10^3$ ом основную роль начинают играть дробовые шумы. При $Z_{oe} \approx 10^4$ ом необходимо учитывать и дробовые и тепловые шумы.

Сравнивая (5.5.9) с (5.5.16), видим, что для рассмотренных схем роль добротности контура во влиянии дробовых и тепловых шумов совершенно различна. Если высокодобротный контур ставить в анодную цепь лампы, его тепловые шумы незначительны, а если его ставить в сеточную цепь, то его шумы являются определяющими. Дело здесь в том, что когда контур стоит в сеточной цепи, его тепловой шум действует на сетку непосредственно, в то время как при нахождении контура в анодной цепи его тепловой шум проходит на сетку лампы дополнительно ослабленным, вследствие малой величины обратной связи (которая тем меньше, чем больше Q). Дробовой шум в обеих схемах автогенераторов проходит на сетку лампы через одну и ту же цепь обратной связи и поэтому оказывает одинаковое влияние.

Таким образом, при прочих равных условиях (одинаковые значения ω_0 , R_0 , S , Z_{oe} , r , I_0 , Γ^2) и при $Z_{oe}S > 1$ автогенератор с контуром в сеточной цепи обладает большей интенсивностью

флуктуаций амплитуды и частоты и большей шириной спектральной линии по сравнению с генератором, контур которого находится в анодной цепи. Только этим и отличаются флуктуационные характеристики обоих генераторов.

Оценивая величину естественной ширины спектральной линии для автогенератора с контуром в сеточной цепи, из (5.5.15) можно получить (для тех же параметров, что и в предыдущем случае) следующие значения:

$$\Delta f = 5,6 \cdot 10^{-10} \text{ гц}, \quad \delta f = 5,6 \cdot 10^{-15}. \quad (5.5.17)$$

Разница между (5.5.10) и (5.5.17) как раз и обязана учету в последнем случае тепловых шумов контура. Такая же разница, согласно (5.5.11), имеет место и для интенсивности амплитудных флуктуаций.

Форма спектральной линии для генератора с контуром в цепи сетки по-прежнему дается формулой (5.5.8), где D находится согласно (5.5.13).

Глава 6

ТЕХНИЧЕСКИЕ ФЛУКТУАЦИИ В ПРОСТЕЙШИХ АВТОГЕНЕРАТОРАХ

В предыдущей главе рассматривались флуктуации амплитуды и фазы LC -генераторов, обремененные тепловым и дробовым шумом генераторов. Теперь обратимся к рассмотрению влияния технических шумов генератора на амплитуду и фазу автогенератора.

Основной причиной существования технических флуктуаций амплитуды и фазы автоколебания, а равно и технической ширины спектральной линии являются флуктуации параметров генератора. Среди них наибольшее влияние на форму спектральной линии оказывают флуктуации полной емкости контура генератора.

По сравнению с естественными флуктуациями, технические флуктуации LC -генераторов исследованы как теоретически, так и экспериментально, еще недостаточно (1956 [8], 1958 [1, 17, 18, 27], 1959 [13], 1960 [3], 1961 [14, 15, 17], 1962 [4], 1963 [6, 8]), особенно это касается учета фликкерной нестационарности технических шумов.

В первых двух параграфах настоящей главы излагается общий метод анализа технических флуктуаций генератора, применяемый и в последующих главах второй части книги. §§ 6.3 и 6.4 посвящены анализу формы и ширины спектральной линии LC -генераторов, обладающих флуктуациями крутизны и емкости.

В § 6.5 рассматривается случай существования быстрых флуктуаций параметров, спектр которых может простирается до частоты автоколебания и выше. Показано, что высокочастотные части спектра могут приводить к своеобразному параметрическому уширению спектральной линии колебания.

Фликкерный шум лампы вследствие своей медленности для сравнительно высокочастотных генераторов непосредственного влияния на амплитуду и частоту колебания не оказывает. Однако учет периодической нестационарности фликкерного шума,

существующей благодаря наличию периодической составляющей анодного тока лампы, показывает его влияние на флуктуации амплитуды и частоты. Учет этого нестационарного воздействия фликкерного шума рассмотрен в последнем параграфе.

§ 6.1. Флуктуационные уравнения томсоновского автогенератора, обладающего флуктуациями параметров

1. Как уже неоднократно упоминалось, в реальных автогенераторах, помимо естественных шумов, всегда присутствуют технические шумы: фликкерные шумы ламп, сопротивлений, флуктуации напряжений источников питания и т. п.

Чаще всего эти технические шумы обладают низкочастотным (по сравнению с $\cos \omega_0 t$) спектром. Поэтому непосредственного (аддитивного) влияния этих шумов на работу автогенератора практически не существует. С другой стороны, как показано в гл. 3, эти технические шумы приводят к флуктуациям некоторых параметров автогенератора, таких, например, как крутизна лампы, емкости лампы, величины нагрузочного сопротивления и т. п. Поскольку от указанных параметров могут зависеть, например, амплитуда и частота генератора, то очевидно, что флуктуации этих параметров могут приводить к амплитудно-частотным флуктуациям автоколебания. По этой причине влияние технических шумов генератора на его работу целесообразно рассматривать прежде всего именно с точки зрения существования в автогенераторе флуктуаций параметров.

Другой механизм влияния технических шумов генератора на его амплитуду и частоту может быть связан, например, с периодической нестационарностью фликкерного шума лампы. В этом случае мы имеем как бы «обратную» картину. Автоколебания генератора «модулируют» фликкерный шум лампы, вследствие чего фликкерный шум как бы переносится в область частоты генерации и там уже «непосредственно» влияет на амплитуду и частоту автогенератора.

2. Рассмотрим томсоновский автогенератор, уравнение движения которого в отсутствие каких-либо флуктуаций имеет вид

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_1^2 x = F(x, \dot{x}), \quad (6.1.1)$$

где функция $F(x, \dot{x})$ является как всегда малым членом, включающим в себя малые потери и малые нелинейности. Приближенное устойчивое стационарное решение уравнения (6.1.1) равно

$$x_0 = R_0 \cos \psi, \quad \psi = \omega_0 t + \varphi, \quad (6.1.2)$$

где φ произвольно, а стационарная амплитуда R_0 и частота ω_0 определяются, согласно § 5.2, уравнениями

$$\begin{aligned}\omega_0 &= \omega_1 + \Delta\omega_0, \quad \Phi(\omega_1, R_0) = 0, \\ \Delta\omega_0 &= -\frac{1}{2\omega_1 R_0} \Psi(\omega_1, R_0).\end{aligned}\quad (6.1.3)$$

Пусть теперь в автогенераторе имеется параметр $m = m(t)$, испытывающий флуктуации около своего среднего значения $\langle m \rangle$:

$$m = \langle m \rangle + \Delta m = \langle m \rangle [1 + \mu(t)],$$

где $\mu = \mu(t) = \Delta m(t) / \langle m \rangle$ — относительные флуктуации параметра, которые будем полагать заданными и имеющими нормальное распределение. Предположим далее, что $\Delta m(t)$ являются достаточно малыми флуктуациями (если $\langle m \rangle \neq 0$, то $\langle \mu^2 \rangle \ll 1$) и что решение (6.1.2) уравнения (6.1.1) не изменяет своего характера при изменении $m(t)$ в интервале $(\langle m \rangle - 3\sqrt{\langle \Delta m^2 \rangle}, \langle m \rangle + 3\sqrt{\langle \Delta m^2 \rangle})$. Другими словами, в области изменения флуктуирующего параметра $m(t)$ не лежит ни одна бифуркационная точка.

Уравнение движения автогенератора, включающее в себя флуктуирующий параметр, зависит в общем случае не только от самого параметра, но и от его производных, например от первой производной

$$\frac{dm}{dt} = \frac{d\Delta m}{dt} = \frac{d\mu}{dt} \langle m \rangle.$$

В этом случае вместо (6.1.1) имеем измененное уравнение движения

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + a(m, \dot{m})x = M(x, \dot{x}; m, \dot{m}). \quad (6.1.4)$$

Очевидно, что

$$a(\langle m \rangle, 0) = \omega_1^2, \quad M(x, \dot{x}; \langle m \rangle, 0) = F(x, \dot{x}).$$

Вследствие малости $\Delta m(t)$ получим, ограничиваясь членами первого порядка малости,

$$\begin{aligned}a(m, \dot{m}) &= \omega_1^2 \left(1 + a_{00}\mu + a_{01} \frac{d\mu}{dt} \right), \\ M(x, \dot{x}; m, \dot{m}) &= F(x, \dot{x}) + \omega_1^2 F_0 \mu + \omega_1^2 F_1 \frac{d\mu}{dt},\end{aligned}\quad (6.1.5)$$

где

$$\begin{aligned}\omega_1^2 a_{00} &= \langle m \rangle \left[\frac{\partial a(m, \dot{m})}{\partial m} \right]_{(m)}, \quad \omega_1^2 a_{01} = \langle m \rangle \left[\frac{\partial a(m, \dot{m})}{\partial \dot{m}} \right]_{(m)}, \\ \omega_1^2 F_0 &= \langle m \rangle \left[\frac{\partial M}{\partial m} \right]_{(m)}, \quad \omega_1^2 F_1 = \langle m \rangle \left[\frac{\partial M}{\partial \dot{m}} \right]_{(m)}.\end{aligned}\quad (6.1.6)$$

Здесь $a_{00} = a_{00}(\langle m \rangle)$, $a_{01} = a_{01}(\langle m \rangle)$, а функции $F_0 = F_0(\langle m \rangle, x, \dot{x})$, $F_1 = F_1(\langle m \rangle, x, \dot{x})$ являются по отношению к x и \dot{x} в общем случае нелинейными. Подставляя (6.1.5) в (6.1.4), получим

$$\ddot{x} + \omega_1^2 x = F(x, \dot{x}) + \omega_1^2 \mathcal{G}(t, x, \dot{x}), \quad (6.1.7)$$

где

$$\mathcal{G}(t, x, \dot{x}) = -a_{00}x\mu - xa_{01}\dot{\mu} + F_{0\mu} + F_{1\dot{\mu}}. \quad (6.1.8)$$

Заметим, что если имеется два флуктуирующих параметра, то (6.1.7) не изменится, а в (6.1.8) войдут аналогичные дополнительные члены для второго параметра.

3. Уравнение движения (6.1.7) мы рассматривали выше в § 5.2 (см. (5.2.29)), согласно которому для составления флуктуационного уравнения необходимо найти медленные функции $g_{\parallel}(t)$ и $g_{\perp}(t)$ (см. (5.2.30)).

Флуктуации параметра $\mu(t)$ могут быть в общем случае как медленными, так и сравнимыми или даже быстрыми по отношению к $\cos \omega_0 t$. В этом параграфе мы ограничимся рассмотрением медленных флуктуаций $\mu(t)$. Другие случаи будут рассмотрены ниже.

Для случая медленных $\mu(t)$ вклад в g_{\parallel} и g_{\perp} , согласно (6.1.8), будут давать только первые гармоники нелинейных функций F_0, F_1 . Подставляя вместо x и \dot{x} значения $\tilde{x} = R_0 \cos \psi$, $\tilde{\dot{x}} = -\omega_0 R_0 \sin \psi$, $\psi = \omega_0 t + \varphi$ в $F_0(\langle m \rangle, x, \dot{x})$, $F_1(\langle m \rangle, x, \dot{x})$ и ограничиваясь первыми гармониками, будем иметь

$$\begin{aligned} F_0 &= R_0(F_{0c} \cos \psi - F_{0s} \sin \psi), \\ F_1 &= R_0(F_{1c} \cos \psi - F_{1s} \sin \psi). \end{aligned} \quad (6.1.9)$$

Объединяя (6.1.8) и (6.1.9) и сравнивая результат с (5.2.30), получаем следующие значения для медленных случайных функций:

$$g_c(t) \equiv g_{\parallel}(t)/R_0, \quad g_s(t) \equiv g_{\perp}(t)/R_0; \quad (6.1.10)$$

$$g_c(t) = \Psi_{0c}\mu + \Psi_{1c}\dot{\mu}, \quad g_s(t) = F_{0s}\mu + F_{1s}\dot{\mu},$$

где введены обозначения

$$\Psi_{0c} = F_{0c} - a_{00}, \quad \Psi_{1c} = F_{1c} - a_{01}. \quad (6.1.11)$$

Таким образом, уравнения для флуктуаций амплитуды и частоты генератора, обладающего медленными флуктуациями параметра, принимают, согласно (5.2.31), следующий вид:

$$\frac{da}{dt} = -p\alpha + \frac{\omega_1}{2} g_s(t), \quad \frac{d\varphi}{dt} = -q\alpha - \frac{\omega_1}{2} g_c(t). \quad (6.1.12)$$

Эти флуктуационные уравнения похожи на (5.3.8), но в отличие от последних являются точными. Кроме того, функции

$g_s(t)$ и $g_c(t)$ всегда между собой коррелированы, так как порождаются флуктуациями одного и того же параметра, и к тому же не обязательно дельта-коррелированы.

4. Теперь необходимо найти спектрально-корреляционные характеристики функций $g_c(t)$ и $g_s(t)$. Предполагая существование структурной функции $\Delta_\mu(\theta, \tau)$ флуктуаций параметра $\mu(t)$, на основании (2.1.13) — (2.1.16) находим следующие значения структурных функций $\Delta_c(\theta, \tau)$, $\Delta_s(\theta, \tau)$, $\Delta_{sc}^0(\theta, \tau)$, $\Delta_{sc}^1(\theta, \tau)$ для случайных процессов $g_c(t)$, $g_s(t)$:

$$\begin{aligned}\Delta_c(\theta, \tau) &= \Psi_{0c}^2 \Delta_\mu(\theta, \tau) - \Psi_{1c}^2 \frac{\partial^2 \Delta_\mu(\theta, \tau)}{\partial \theta^2}, \\ \Delta_s(\theta, \tau) &= F_{0s}^2 \Delta_\mu(\theta, \tau) - F_{1s}^2 \frac{\partial^2 \Delta_\mu(\theta, \tau)}{\partial \theta^2}, \\ \Delta_{sc}^0(\theta, \tau) &= \Psi_{0c} F_{0s} \Delta_\mu(\theta, \tau) - \Psi_{1c} F_{1s} \frac{\partial^2 \Delta_\mu(\theta, \tau)}{\partial \theta^2}, \\ \Delta_{sc}^1(\theta, \tau) &= (\Psi_{1c} F_{0s} - \Psi_{0c} F_{1s}) \frac{\partial \Delta_\mu(\theta, \tau)}{\partial \theta}.\end{aligned}\quad (6.1.13)$$

Если для почти всех τ существует функция корреляции $\Phi_\mu(\tau)$ флуктуирующего параметра $\mu(t)$, то функции корреляции $\Phi_c(\tau)$, $\Phi_s(\tau)$, $\Phi_{sc}^0(\tau)$, $\Phi_{sc}^1(\tau)$ для $g_c(t)$ и $g_s(t)$ получаются из (6.1.13) при замене $\Delta(\theta, \tau)$ на $\Phi(\tau)$, $\partial/\partial\theta$ на $d/d\tau$.

Помимо обязательного существования совместной структурной функции $\Delta_{sc}(\theta, \tau)$ (если, разумеется, одна из функций $g_c(t)$ или $g_s(t)$ не обращается в тождественный нуль) особенностью (6.1.13) является и то, что в общем случае $\Delta_c(\theta, \tau) \neq \Delta_s(\theta, \tau)$ (ср. с (5.2.25), где мы имели $\Phi_{||}(\tau) = \Phi_{\perp}(\tau)$).

Обращаясь к спектральным плотностям функций $g_c(t)$ и $g_s(t)$, на основании (2.1.17) — (2.1.20) имеем:

$$\begin{aligned}S_c(\Omega) &= [\Psi_{0c}^2 + \Omega^2 \Psi_{1c}^2] S_\mu(\Omega), \quad S_s(\Omega) = [F_{0s}^2 + \Omega^2 F_{1s}^2] S_\mu(\Omega), \\ S_{sc}^0(\Omega) &= [\Psi_{0c} F_{0s} + \Omega^2 \Psi_{1c} F_{1s}] S_\mu(\Omega), \\ S_{sc}^1(\Omega) &= [\Psi_{0c} F_{1s} - \Psi_{1c} F_{0s}] \Omega S_\mu(\Omega).\end{aligned}\quad (6.1.14)$$

Здесь мы полагаем известной спектральную плотность мощности $S_\mu(\Omega)$.

§ 6.2. Общий расчет технических флуктуаций амплитуды и частоты автоколебаний томсоновского автогенератора

1. Один флуктуирующий параметр. Начнем рассмотрение технических флуктуаций автогенератора со случая, когда спектр флуктуаций параметра, являясь низкочастотным,

примыкает к нулю и его ширина много меньше прочности предельного цикла p . В этом случае производной амплитудных флуктуаций можно пренебречь по сравнению с $p\alpha$ (рассматривая только режим установившихся флуктуаций), и уравнения (6.1.12) примут тогда вид

$$p\alpha = \frac{\omega_1}{2} g_s, \quad v = -\frac{q}{p} \frac{\omega_1}{2} g_s - \frac{\omega_1}{2} g_c. \quad (6.2.1)$$

Отсюда с помощью (6.1.13), предполагая существование $\Phi_\mu(\tau)$, легко найти функции корреляции для амплитудных и частотных флуктуаций:

$$\begin{aligned} \Phi_a(\tau) &= \frac{\omega_1^2}{4p^2} \left[F_{0s}^2 \Phi_\mu - F_{1s}^2 \frac{d^2 \Phi_\mu}{d\tau^2} \right], \\ \Phi_v(\tau) &= \frac{\omega_1^2}{4} \left\{ \left(\Psi_{0c} + \frac{q}{p} F_{0s} \right)^2 \Phi_\mu - \left(\Psi_{1c} + \frac{q}{p} F_{1s} \right)^2 \frac{d^2 \Phi_\mu}{d\tau^2} \right\}, \\ \Phi_{av}^0(\tau) &= -\frac{\omega_1^2}{4p} \left\{ F_{0s} \left(\Psi_{0c} + \frac{q}{p} F_{0s} \right) \Phi_\mu - F_{1s} \left(\Psi_{1c} + \frac{q}{p} F_{1s} \right) \frac{d^2 \Phi_\mu}{d\tau^2} \right\}, \\ \Phi_{av}^1(\tau) &= -\frac{\omega_1^2}{4p} (\Psi_{1c} F_{0s} - F_{1s} \Psi_{0c}) \frac{d\Phi_\mu}{d\tau}. \end{aligned} \quad (6.2.2)$$

С помощью (6.1.14) и (2.1.3) нетрудно получить спектральные плотности квазистатистических амплитудных и частотных флуктуаций, порождаемых флуктуациями параметра:

$$\begin{aligned} S_a(\Omega) &= \frac{\omega_1^2}{4p^2} [F_{0s}^2 + F_{1s}^2 \Omega^2] S_\mu(\Omega), \\ S_v(\Omega) &= \frac{\omega_1^2}{4} \left[\left(\Psi_{0c} + \frac{q}{p} F_{0s} \right)^2 + \left(\Psi_{1c} + \frac{q}{p} F_{1s} \right)^2 \Omega^2 \right] S_\mu(\Omega), \\ S_{av}^0(\Omega) &= -\frac{\omega_1^2}{4p} \left[F_{0s} \left(\Psi_{0c} + \frac{q}{p} F_{0s} \right) + F_{1s} \left(\Psi_{1c} + \frac{q}{p} F_{1s} \right) \Omega^2 \right] S_\mu(\Omega), \\ S_{av}^1(\Omega) &= -\frac{\omega_1^2}{4p} [\Psi_{0c} F_{1s} - \Psi_{1c} F_{0s}] \Omega S_\mu(\Omega). \end{aligned} \quad (6.2.3)$$

Если ширина полосы спектра флуктуаций параметра, помимо того, что она много меньше p , много меньше также $|F_{0s}/F_{1s}|$ и $|\Psi_{0c}/\Psi_{1c}|$, то производными от функции корреляции $\Phi_\mu(\tau)$ в (6.2.2) можно пренебречь (при этом $\Phi_{av}^1(\tau) \approx 0$), а спектральные плотности примут вид:

$$\begin{aligned} S_a(\Omega) &= \frac{\omega_1^2}{4p^2} F_{0s}^2 S_\mu(\Omega), \quad S_v(\Omega) = \frac{\omega_1^2}{4} \left(\Psi_{0c} + \frac{q}{p} F_{0s} \right)^2 S_\mu(\Omega), \\ S_{av}^0(\Omega) &= -\frac{\omega_1^2}{4p} F_{0s} \left(\Psi_{0c} + \frac{q}{p} F_{0s} \right) S_\mu(\Omega), \quad S_{av}^1(\Omega) \equiv 0. \end{aligned} \quad (6.2.4)$$

Эти формулы относятся к квазистатическим флуктуациям параметра, амплитуды, частоты автоколебания и в принципе могут быть получены из уравнений (6.1.3), определяющих стационарные значения амплитуды и частоты автоколебаний.

В ω_0 , $\Phi(\omega_1, R_0)$, $\Psi(\omega_1, R_0)$ входит значение параметра m . Задаваясь приращениями параметра $\langle m \rangle \mu$, можно найти приращения амплитуды $R_0 \alpha$ и частоты ν . Расчет показывает, что

$$\alpha = \frac{\omega_1}{2p} F_{0s} \mu, \quad \nu = -\frac{\omega_1}{2} \left[\Psi_{0c} + \frac{q}{p} F_{0s} \right] \mu. \quad (6.2.5)$$

Отсюда сразу же получаем, как это и должно быть, формулы (6.2.4). Заметим, что из (6.2.5) следует пропорциональность амплитудных и частотных флуктуаций и, следовательно, полная их коррелированность. Однако это справедливо только для сколь угодно медленных флуктуаций.

Пропорциональность $\alpha(t)$ и $\nu(t)$ приводит к несимметрии спектральной линии колебания. На основании (4.6.20), (4.6.22), (4.6.26), предполагая малость интенсивности флуктуаций параметра

$$\langle \mu^2 \rangle \ll \frac{4p^2}{\omega_1^2} F_{0s}^{-2},$$

нетрудно записать следующие выражения для компонент технической формы спектральной линии:

$$\begin{aligned} W_x^0(\Omega) &= W_{x\chi}^0(\Omega) + \frac{R_0^2 \omega_1^2 F_{0s}^2}{8p^2} S_\mu(\Omega), \\ W_x^1(\Omega) &= -2\pi \frac{\omega_1^2 F_{0s} \left(\Psi_{0c} + \frac{q}{p} F_{0s} \right) S_\mu(0)}{4p} W_{x\chi}^1(\Omega) - \\ &\quad - \frac{R_0^2 F_{0s} \left(\Psi_{0c} + \frac{q}{p} F_{0s} \right) S_\mu(\Omega) - S_\mu(0)}{4p \Omega}, \end{aligned} \quad (6.2.6)$$

где $W_{x\chi}^0(\Omega)$, $W_{x\chi}^1(\Omega)$ даются формулами (4.6.16). Нетрудно видеть, что несимметрия формы спектральной линии сохраняется и для изохронного генератора. Для дальнейшего анализа формы линии необходимо задаваться конкретным значением спектральной плотности флуктуаций параметра $S_\mu(\Omega)$. Крылья этой спектральной линии при достаточно больших Ω , согласно (4.7.20), имеют вид

$$W_x(\Omega) = \frac{1}{8} R_0^2 \omega_1^2 \left(\Psi_{0c} + \frac{q}{p} F_{0s} \right)^2 \frac{S_\mu(\Omega)}{\Omega^2}. \quad (6.2.7)$$

2. Пусть теперь спектр флуктуаций параметра имеет произвольный вид и произвольную ширину (хотя по-прежнему выполняются условия медленности флуктуаций параметра по сравнению с $\cos \omega_0 t$). Воспользовавшись результатами § 2.3, в отношении уравнений (6.1.12) можем написать следующие общие выражения для функций корреляции амплитудных и частотных флуктуаций:

$$\begin{aligned}\Phi_a(\tau) &= \frac{\omega_1^2}{4} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-p(u+v)} \Phi_s(\tau+u-v) du dv, \\ \Phi_v(\tau) &= q^2 \Phi_a(\tau) + \\ &+ \gamma \frac{\omega_1^2}{4} \int_0^\infty e^{-p u} [\Phi_{sc}(\tau+u) + \Phi_{sc}(-\tau+u)] du + \frac{\omega_1^2}{4} \Phi_c(\tau), \\ \Phi_{av}^0(\tau) &= -q \Phi_a(\tau) - \frac{\omega_1^2}{8} \int_0^\infty e^{-p u} [\Phi_{sc}(\tau+u) + \Phi_{sc}(-\tau+u)] du, \\ \Phi_{av}^1(\tau) &= -\frac{\omega_1^2}{8} \int_0^\infty e^{-p u} [\Phi_{sc}(\tau+u) - \Phi_{sc}(-\tau+u)] du.\end{aligned}\quad (6.2.8)$$

Можно выразить Φ_a , Φ_v , Φ_{av} и через Φ_μ . Однако вследствие громоздкости конечных формул мы их приводить не будем. Менее громоздкими являются выражения спектральных плотностей амплитудных и частотных флуктуаций через спектральную плотность флуктуаций параметра. Используя результаты § 2.3, нетрудно записать следующие выражения для спектральных плотностей амплитудных и частотных флуктуаций:

$$\begin{aligned}S_a(\Omega) &= \frac{\omega_1^2}{4} \frac{S_s(\Omega)}{p^2 + \Omega^2}, \\ S_v(\Omega) &= \frac{\omega_1^2}{4} \left\{ S_c(\Omega) + \frac{q^2 S_c(\Omega) + 2q p S_{sc}^0(\Omega) + 2q \Omega S_{sc}^1(\Omega)}{p^2 + \Omega^2} \right\}, \\ S_{av}^0(\Omega) &= -\frac{\omega_1^2}{4} \left\{ \frac{q S_s(\Omega) + p S_{sc}^0(\Omega) + \Omega S_{sc}^1(\Omega)}{p^2 + \Omega^2} \right\}, \\ S_{av}^1(\Omega) &= \frac{\omega_1^2}{4} \left\{ \frac{-p S_{sc}^1(\Omega) + \Omega S_{sc}^0(\Omega)}{p^2 + \Omega^2} \right\}.\end{aligned}\quad (6.2.9)$$

Принимая во внимание (6.1.14), нетрудно выразить эти спектральные плотности непосредственно через $S_\mu(\Omega)$:

$$\begin{aligned}
 S_\alpha(\Omega) &= \frac{\omega_1^2}{4} \frac{F_{0s}^2 + F_{1s}^2 \Omega^2}{p^2 + \Omega^2} S_\mu(\Omega), \\
 S_\nu(\Omega) &= \frac{\omega_1^2}{4} \left\{ \Psi_{0c}^2 + \Psi_{1c}^2 \Omega^2 + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{q^2 (F_{0s}^2 + F_{1s}^2 \Omega^2) + 2qp (\Psi_{0c} F_{0s} + \Psi_{1c} F_{1s} \Omega^2) + 2q\Omega^2 (\Psi_{0c} F_{1s} - \Psi_{1c} F_{0s})}{p^2 + \Omega^2} \right\} S_\mu(\Omega), \\
 S_{av}^0(\Omega) &= -\frac{\omega_1^2}{4} \times \\
 &\quad \times \left\{ \frac{q (F_{0s}^2 + F_{1s}^2 \Omega^2) + p (\Psi_{0c} F_{0s} + \Psi_{1c} F_{1s} \Omega^2) + (\Psi_{0c} F_{1s} - \Psi_{1c} F_{0s}) \Omega^2}{p^2 + \Omega^2} \right\} S_\mu(\Omega), \\
 S_{av}^1(\Omega) &= \frac{\omega_1^2}{4} \left\{ \frac{\Psi_{0c} F_{0s} - p (\Psi_{0c} F_{1s} - \Psi_{1c} F_{0s}) + \Psi_{1c} F_{1s} \Omega^2}{p^2 + \Omega^2} \right\} \Omega S_\mu(\Omega).
 \end{aligned} \tag{6.2.10}$$

Для справедливости этих формул достаточно существования $S_\mu(\Omega)$ для почти всех Ω .

Обсудим полученные спектральные плотности. Легко видеть, прежде всего, что, как и должно быть, при $\Omega \ll p$ они переходят в (6.2.3). Если потребовать дополнительно $\Omega \ll \ll F_{0s}/F_{1s}$, $\Omega \ll |\Psi_{0c}/\Psi_{1c}|$, то мы приходим к (6.2.4). Тем самым формулы (6.2.3) и (6.2.4) описывают спектральные плотности амплитудных и частотных флуктуаций не только при медленных (по сравнению с $\cos pt$, $\cos |F_{0s}/F_{1s}|t$, $\cos |\Psi_{0c}/\Psi_{1c}|t$) флуктуациях параметра, но и при произвольных, лишь бы достаточно малыми были значения частоты Ω .

Спектр амплитудных флуктуаций автогенератора, согласно (6.2.10), при конечном $F_{0s}/F_{1s} \neq 0$ весьма похож на спектр флуктуаций параметра. «Коэффициент передачи» от μ к α , равный

$$K_{\mu\alpha}(\Omega) = \frac{\omega_1^2}{4} \frac{F_{0s}^2 + \Omega^2 F_{1s}^2}{p^2 + \Omega^2},$$

имеет вид, изображенный на рис. 6.1, откуда видно, что на малых Ω и на достаточно больших Ω $S_\alpha(\Omega)$ ведет себя подобно $S_\mu(\Omega)$. Если $p \approx F_{0s}/F_{1s}$, то коэффициент передачи $K_{\mu\alpha}(\Omega)$ не зависит от частоты и спектры $S_\mu(\Omega)$ и $S_\alpha(\Omega)$ почти полностью

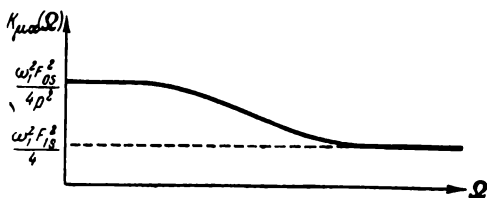


Рис. 6.1.

совпадают по форме. Если производная флуктуирующего параметра не содержится в исходных уравнениях автогенератора, то $F_{1s} = \Psi_{1c} = 0$, и тогда амплитудные флуктуации спадают как $S_\mu(\Omega)/\Omega^2$ при возрастании частоты. В этом сказывается инерционность автогенератора по отношению к амплитудным флуктуациям.

Спектр флуктуаций частоты можно считать состоящим из двух резко различных слагаемых. Одно из слагаемых связано с неизохронностью генератора и отражает влияние флуктуаций амплитуды на флуктуации частоты. Коэффициент передачи этого слагаемого (при $q \neq 0$) подобен $K_{\mu\alpha}(\Omega)$. Оно не представляет особого интереса. Второе слагаемое имеет вид (см. вторую формулу (6.2.10))

$$\frac{\omega_1^2}{4} \{ \Psi_{0c}^2 + \Psi_{1c}^2 \Omega^2 \} S_\mu(\Omega)$$

и отражает непосредственное воздействие флуктуации параметра на частоту автоколебаний. Если производная параметра не входит, то $\Psi_{1c} = 0$ и (при $q = 0$)

$$S_v(\Omega) = \frac{\omega_1^2}{4} \Psi_{0c}^2 S_\mu(\Omega).$$

Спектр флуктуаций частоты совпадает по форме со спектром флуктуаций параметра. Это происходит фактически потому, что $v(t)$ просто-напросто пропорциональны $\mu(t)$. В самом деле, при $q = 0$ и $\Psi_{1c} = 0$ из (6.1.12) и (6.1.10) имеем

$$v = - \frac{\omega_1}{2} \Psi_{0c} \mu.$$

Если же $\Psi_{1c} \neq 0$, то при $q = 0$ и $\Omega \gg |\Psi_{0c}/\Psi_{1c}|$

$$S_v(\Omega) = \frac{\omega_1^2}{4} \Psi_{1c}^2 \Omega^2 S_\mu(\Omega).$$

Если рассмотреть спектр флуктуаций фазы $S_\varphi(\Omega)$, то отсюда имеем

$$S_\varphi(\Omega) = \frac{\omega_1^2}{4} \Psi_{1c}^2 S_\mu(\Omega).$$

Формой спектра флуктуаций параметров обладают теперь флуктуации фазы. Это связано с тем, что при $q = 0$ и достаточно быстрых флуктуациях параметра из (6.1.12) и (6.1.10) нетрудно получить

$$\varphi(t) = - \frac{\omega_1}{2} \Psi_{1c} \mu(t),$$

т. е. имеет место пропорциональность фазовых флуктуаций флуктуациям параметра.

Совместные спектральные плотности $S_{\alpha\nu}(\Omega)$ отличны от нуля не только у неизохронного генератора. Помимо прямой связи α и ν через q имеется как бы косвенная связь α с ν через μ , поскольку флуктуации амплитуды и частоты порождаются флуктуациями *одного и того же параметра*. Тем самым, в отличие от естественных флуктуаций, технические флуктуации α и ν всегда коррелированы и, следовательно, техническая форма спектральной линии автогенератора всегда, строго говоря, *не симметрична*.

3. Два флуктуирующих параметра. В реальных автогенераторах редко нестабильным бывает только один параметр. Обычно флуктуируют одновременно несколько параметров. Если флуктуации испытывает, например, какая-либо емкость, то она часто входит как составляющая часть в другие емкости и вследствие этого они также испытывают флуктуации. Представляет интерес поэтому рассмотрение особенностей, возникающих при одновременном существовании флуктуаций нескольких параметров. Мы ограничимся случаем двух флуктуирующих параметров.

Пусть в основное уравнение автогенератора входят два параметра s и r , имеющие средние значения $\langle s \rangle$ и $\langle r \rangle$. Пусть относительные флуктуации этих параметров $\Delta s / \langle s \rangle = \sigma$, $\Delta r / \langle r \rangle = \rho$ являются достаточно малыми: $\langle \sigma^2 \rangle \ll 1$, $\langle \rho^2 \rangle \ll 1$. Будем считать заданными их вероятностные и спектральные характеристики.

Флуктуационные уравнения автогенератора по-прежнему будут иметь вид

$$\frac{d\alpha}{dt} = -p\alpha + \frac{\omega_1}{2} g_s, \quad \nu = \frac{d\varphi}{dt} = -q\alpha - \frac{\omega_1}{2} g_c,$$

где теперь

$$\begin{aligned} g_s &= F_{0s\sigma}\sigma + F_{0s\rho}\rho + F_{1s\sigma}\frac{d\sigma}{dt} + F_{1s\rho}\frac{d\rho}{dt}, \\ g_c &= \Psi_{0c\sigma}\sigma + \Psi_{0c\rho}\rho + \Psi_{1c\sigma}\frac{d\sigma}{dt} + \Psi_{1c\rho}\frac{d\rho}{dt}. \end{aligned} \quad (6.2.11)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \Psi_{0c\sigma} &= F_{0c\sigma} - a_{00\sigma}, & \Psi_{1c\sigma} &= F_{1c\sigma} - a_{01\sigma}, \\ \Psi_{0c\rho} &= F_{0c\rho} - a_{00\rho}, & \Psi_{1c\rho} &= F_{1c\rho} - a_{01\rho}. \end{aligned}$$

Величины $F_{0s\sigma}$, $F_{0s\rho}$, $F_{1s\sigma}$, $F_{1s\rho}$, $a_{00\sigma}$, $a_{00\rho}$, $a_{01\sigma}$, $a_{01\rho}$ очевидным способом на основании (6.1.6) определяются из $a(s, \dot{s}; r, \dot{r})$, $M(x, \dot{x}; s, \dot{s}; r, \dot{r})$.

Рассматривая общий случай для амплитудных и частотных флуктуаций, имеем те же формулы (6.2.8) и (6.2.9), где функции корреляции и спектральные плотности Φ_s , Φ_c , Φ_{sc} ; S_s , S_c , S_{sc}

имеют значения, соответствующие (6.2.11). Вследствие громоздкости этих выражений мы приводить их не будем, а укажем, что они могут быть легко получены из формул (2.1.13)—(2.1.20), приведенных в п. 4 § 2.1.

Предыдущее рассмотрение предполагало произвольную корреляцию между флуктуациями двух параметров. Рассмотрим некоторые частные случаи этой корреляции. К наиболее простому случаю относится предельный случай статистической независимости σ и ρ , когда $\Phi_{\sigma\rho}^0 \equiv \Phi_{\sigma\rho}^1 \equiv 0$. В этом случае спектральные плотности S_s , S_c , S_{sc} распадаются на два слагаемых: первое связано с параметром σ , а второе — с параметром ρ .

$$\begin{aligned} S_s &= S_{s\sigma} + S_{s\rho}, & S_c &= S_{c\sigma} + S_{c\rho}, \\ S_{sc}^0 &= S_{sc\sigma}^0 + S_{sc\rho}^0, & S_{sc}^1 &= S_{sc\sigma}^1 + S_{sc\rho}^1. \end{aligned} \quad (6.2.12)$$

Эти слагаемые в отдельности без труда могут быть найдены из (6.1.14). Суперпозиция, имеющая место для спектральных плотностей S_s , S_c , S_{sc} , приводит к суперпозиции амплитудных и частотных флуктуаций

$$\begin{aligned} S_a &= S_{a\sigma} + S_{a\rho}, & S_v &= S_{v\sigma} + S_{v\rho}, \\ S_{av}^0 &= S_{av\sigma}^0 + S_{av\rho}^0, & S_{av}^1 &= S_{av\sigma}^1 + S_{av\rho}^1. \end{aligned} \quad (6.2.13)$$

Здесь слагаемые по отдельности могут быть найдены из (6.2.9).

Таким образом, для независимых флуктуаций параметров соответствующие им флуктуации амплитуды и частоты также получаются независимыми.

Обращаясь к форме спектральной линии колебания, мы, однако, не можем сказать, что спектральная плотность колебания — форма линии — распадается на две независимые формы, определяемые соответствующими параметрами. Это следует из того, что, согласно § 4.6, имеется нелинейная зависимость $A^0(\tau)$ и $A^1(\tau)$ от Φ_v и Φ_{av} . Следовательно, статистически независимые параметры с точки зрения формы линии «взаимодействуют». Если рассмотреть диффузию фазы — функцию $\chi(\tau)$, то на основании (4.5.9) и (6.2.13) $\chi = \chi_\sigma + \chi_\rho$ и, следовательно, независимые флуктуации параметров также независимо действуют на случайные блуждания фазы. В частности, если $\chi(\tau) = D\tau$, то $D = D_\sigma + D_\rho$, и тем самым можно рассматривать коэффициенты диффузии, зависящие от интенсивности флуктуаций каждого параметра, в отдельности. Однако ширина пика спектральной линии, равная

$$\Delta\Omega = \frac{\pi}{\int_0^\infty e^{-\chi(\tau)} d\tau},$$

нелинейно зависит от $\chi(\tau)$ и, следовательно, как и форма, не распадается на два независимых слагаемых.

Другим предельным случаем корреляции между σ и ρ является их полная коррелированность, в простейшем случае — линейная зависимость. Пусть $\rho = b\sigma$. Тогда

$$\begin{aligned} g_s &= (F_{0s\sigma} + bF_{0s\rho})\sigma + (F_{1s\sigma} + bF_{1s\rho})\frac{d\sigma}{dt}, \\ g_c &= (\Psi_{0c\sigma} + b\Psi_{0c\rho})\sigma + (\Psi_{1c\sigma} + b\Psi_{1c\rho})\frac{d\sigma}{dt}, \end{aligned} \quad (6.2.14)$$

и мы фактически приходим к случаю одного флуктуирующего параметра, подробно рассмотренного выше.

Возможен, наконец, третий наиболее общий случай конкретной коррелированности σ и ρ . Пусть $\rho = b\sigma + \xi$, где ξ — случайная стационарная функция, статистически независимая от σ . Этот случай можно свести к случаю статистически независимых параметров, хотя корреляция между σ и ρ существует и равна $\Phi_{\sigma\rho} = b\Phi_{\sigma}$. В самом деле, согласно (6.1.10), (6.2.11),

$$\begin{aligned} g_s &= (F_{0s\sigma} + bF_{0s\rho})\sigma + (F_{1s\sigma} + bF_{1s\rho})\frac{d\sigma}{dt} + F_{0s\rho}\xi + F_{1s\rho}\frac{d\xi}{dt}, \\ g_c &= (\Psi_{0c\sigma} + b\Psi_{0c\rho})\sigma + (\Psi_{1c\sigma} + b\Psi_{1c\rho})\frac{d\sigma}{dt} + \Psi_{0c\rho}\xi + \Psi_{1c\rho}\frac{d\xi}{dt}, \end{aligned}$$

и мы имеем два статистически независимых флуктуирующих параметра σ и ξ .

§ 6.3. Флуктуации емкости и крутизны в простейших LC-генераторах

Обратимся теперь к конкретной схеме автогенератора, обладающего флуктуациями некоторых параметров. Пусть имеется LC-генератор с контуром в анодной цепи (рис. 5.1), и пусть в этом автогенераторе имеются нормально распределенные флуктуации емкости и крутизны. Естественные шумы автогенератора принимать в расчет не будем.

1. Начнем анализ со случая, когда имеются только флуктуации емкости контура, которая теперь зависит от времени. Уравнения токов и напряжений схемы имеют вид

$$\begin{aligned} L \frac{dI}{dt} + rI &= V, \quad \frac{d}{dt}(CV) + I = I_a, \\ I_a &= SM \frac{dI}{dt} \left[1 - \beta M^2 \left(\frac{dI}{dt} \right)^2 \right], \end{aligned}$$

где V — напряжение на флуктуирующей емкости C .

Исключая из этих уравнений V , для тока, протекающего через индуктивность контура, имеем следующее уравнение:

$$LC \frac{d^2 I}{dt^2} + L \frac{dC}{dt} \frac{dI}{dt} + \left(r \frac{dC}{dt} + 1 \right) I = SM \frac{dI}{dt} - \beta SM^3 \left(\frac{dI}{dt} \right)^3. \quad (6.3.1)$$

Приведем его к форме (6.1.4):

$$\frac{d^2 I}{dt^2} + a(C, \dot{C}) I = M(I, \dot{I}, C, \dot{C});$$

при этом

$$a(C, \dot{C}) = \left(1 + r \frac{dC}{dt} \right) \frac{1}{LC}, \quad (6.3.2)$$

$$M(I, \dot{I}; C, \dot{C}) = \frac{1}{LC} \left(SM - rC - L \frac{dC}{dt} \right) \dot{I} - \beta \frac{SM^3}{LC} (\dot{I})^3. \quad (6.3.3)$$

Флуктуирующая емкость равна

$$C = \langle C \rangle + \Delta C = \langle C \rangle (1 + \delta C),$$

где $\langle \delta C^2 \rangle \ll 1$.

Найдем параметры стационарного движения. Полагая $\Delta C(t) \equiv 0$, получим

$$a(\langle C \rangle, 0) = \frac{1}{L \langle C \rangle} = \omega_1^2,$$

$$F(I, \dot{I}) = M(I, \dot{I}; \langle C \rangle, 0) = \omega_1^2 (SM - r \langle C \rangle) \dot{I} - \omega_1^2 \beta SM^3 (\dot{I})^3.$$

Отсюда легко найти, согласно (5.2.9),

$$\Psi(\omega, R) \equiv 0, \quad \Phi(\omega, R) = -g\omega R + \frac{3}{4} h_1 \omega^3 R^3,$$

где g и h_1 равны:

$$g = \omega_1^2 (MS - r \langle C \rangle), \quad h_1 = \omega_1^2 \beta SM^3.$$

Следовательно, частота и амплитуда установившихся автоколебаний равны

$$\omega_0 = \omega_1, \quad R_0^2 = 4g/3h_1\omega_0^2. \quad (6.3.4)$$

Заметим, что R_0 есть амплитуда колебательного тока в контуре генератора. Неизохронность и прочность предельного цикла легко определяются, согласно (5.2.17):

$$p = g, \quad q = 0.$$

Таким образом, рассматриваемый нами автогенератор является изохронным.

Дифференцируя (6.3.2), (6.3.3) по C и по dC/dt , получим, согласно (6.1.6), учитывая (6.3.4):

$$a_{00} = -1, \quad a_{01} = \frac{1}{\omega_0 Q}, \quad (6.3.5)$$

$$F_0 = \left[- \left(g + \frac{\omega_0}{Q} \right) \dot{I} + h_1 (\dot{I})^3 \right] \frac{1}{\omega_0^2}, \quad F_1 = -\omega_0^{-2} \dot{I}. \quad (6.3.6)$$

Подставляя $\tilde{I} = R_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$ в (6.3.6), можно на основании (6.1.9) найти:

$$\begin{aligned} F_{0c} &= 0, & F_{0s} &= -\frac{1}{Q}, & \Psi_{0c} &= 1, \\ F_{1c} &= 0, & F_{1s} &= -\frac{1}{\omega_0 Q}, & \Psi_{1c} &= -\frac{1}{\omega_0 Q}. \end{aligned} \quad (6.3.7)$$

Используя (6.1.10), получаем следующие выражения для медленных случайных функций $g_c(t)$, $g_s(t)$:

$$g_c(t) = \delta C(t) - \frac{1}{Q\omega_0} \frac{d}{dt} \delta C(t), \quad g_s(t) = -\frac{1}{Q} \delta C(t) - \frac{1}{\omega_0} \frac{d}{dt} \delta C(t). \quad (6.3.8)$$

Имея в виду, что по условию полоса относительных флуктуаций емкости $\Pi_{\delta C}$ меньше чем ω_0 , нетрудно видеть, что вторым слагаемым в $g_c(t)$ можно пренебречь, ибо даже если $\Pi_{\delta C} = \omega_0$, то и в этом случае второе слагаемое по порядку величины меньше первого в Q раз.

Что касается $g_s(t)$, то в этой формуле вторым слагаемым можно пренебречь лишь тогда, когда $\Pi_{\delta C} \ll \Pi$, где $\Pi = \omega_0/Q$ — ширина полосы колебательного контура автогенератора, а в общем случае оно должно быть сохранено. Итак, принимаем окончательно ($\Psi_{1c} = 0$)

$$g_c(t) = \delta C(t), \quad g_s(t) = -\frac{1}{\omega_0} \left[\Pi \delta C(t) + \frac{d}{dt} \delta C(t) \right]. \quad (6.3.9)$$

Таким образом, флуктуационные уравнения автогенератора, обладающего флуктуациями контурной емкости, согласно (6.1.12), принимают вид

$$\frac{d\alpha}{dt} = -p\alpha - \frac{1}{2} \left[\Pi \delta C + \frac{d}{dt} \delta C \right], \quad \nu = \frac{d\varphi}{dt} = -\frac{\omega_0}{2} \delta C. \quad (6.3.10)$$

Спектральные плотности мощности флуктуаций амплитуды и частоты равны:

$$\begin{aligned} S_\alpha(\Omega) &= \frac{1}{4} \frac{\Pi^2 + \Omega^2}{p^2 + \Omega^2} S_{\delta C}(\Omega) \equiv K_\alpha(\Omega) S_{\delta C}(\Omega), \\ S_\nu(\Omega) &= \frac{\omega_0^2}{4} S_{\delta C}(\Omega), \\ S_{\alpha\nu}^0(\Omega) &= \frac{\omega_0}{4} \frac{p\Pi + \Omega^2}{p^2 + \Omega^2} S_{\delta C}(\Omega) \equiv \omega_0 K_{\alpha\nu}^0(\Omega) S_{\delta C}(\Omega), \\ S_{\alpha\nu}^1(\Omega) &= -\frac{\omega_0}{4} \frac{(\Pi - p)\Omega}{p^2 + \Omega^2} S_{\delta C}(\Omega) \equiv -\omega_0 K_{\alpha\nu}^1(\Omega) S_{\delta C}(\Omega). \end{aligned} \quad (6.3.11)$$

Здесь $K_a(\Omega)$, $K_{av}^0(\Omega)$, $K_{av}^1(\Omega)$ — «коэффициенты передачи», показывающие, как спектральные компоненты флуктуации емкости контура генератора передаются на соответствующие спектральные компоненты флуктуаций амплитуды и частоты.

Для обычных томсоновских генераторов почти всегда вы-

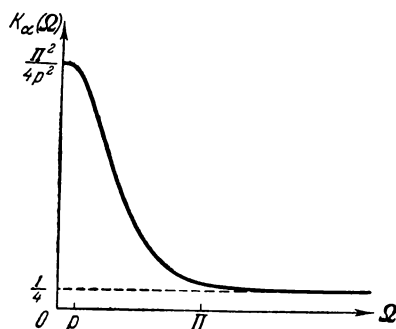


Рис. 6.2.

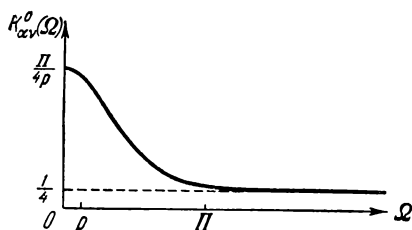


Рис. 6.3.

полняется неравенство $\Pi \gg \rho$. Это приводит к сильной зависимости $K_a(\Omega)$, $K_{av}^0(\Omega)$ и $K_{av}^1(\Omega)$ от частоты. Графики этих коэффициентов передачи даны на рис. 6.2, 6.3, 6.4.

Заметим, что характерной особенностью спектральных плотностей мощности технических флуктуаций амплитуды и частоты, как это видно из (6.3.11), является их независимость от

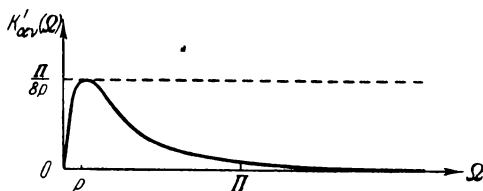


Рис. 6.4.

амплитуды автоколебания (при постоянной прочности предельного цикла ρ).

2. Рассмотрим теперь тот же LC -генератор, обладающий малыми флуктуациями крутизны:

$$S = \langle S \rangle + \Delta S(t) = \langle S \rangle (1 + \delta S), \quad \langle \delta S^2 \rangle \ll 1.$$

Уравнение движения в этом случае имеет вид

$$\frac{d^2 I}{dt^2} + \omega_1^2 I = M(I, \dot{I}; S),$$

где

$$M(I, \dot{I}; S) = \omega_1^2 (SM - rC) \dot{I} - \omega_1^2 \beta SM^3 (\dot{I})^3. \quad (6.3.12)$$

Легко видеть, что $a_{00} = a_{01} = 0$, а из (6.3.12) получаем

$$F_0 = \omega_1^{-2} \left[\left(g + \frac{\omega_0}{Q} \right) i - h_1 (i)^3 \right], \quad F_1 \equiv 0.$$

Согласно (6.1.9), (6.1.11) имеем отсюда

$$\Psi_{0c} = 0, \quad \Psi_{1c} = 0, \quad F_{0s} = Q^{-1}, \quad F_{1s} = 0.$$

Тем самым медленные случайные функции $g_c(t)$ и $g_s(t)$ равны

$$g_c(t) \equiv 0, \quad g_s(t) = \frac{1}{Q} \delta S(t). \quad (6.3.13)$$

Подставляя эти значения в (6.1.12), видим, что флуктуации частоты отсутствуют (в принятом приближении крутизна не влияет на частоту автоколебаний), а амплитудные флуктуации подчиняются уравнению

$$\frac{da}{dt} = -pa + \frac{\Pi}{2} \delta S. \quad (6.3.14)$$

Следовательно, функция корреляции и спектральная плотность амплитудных флуктуаций генератора с флуктуирующей крутизной равны

$$\Phi_a(\tau) = \frac{\Pi^2}{2} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-p(x+y)} \Phi_{\delta S}(\tau + x - y) dx dy, \quad (6.3.15)$$

$$S_a(\Omega) = \frac{\Pi^2}{4(p^2 + \Omega^2)} S_{\delta S}(\Omega). \quad (6.3.16)$$

Из последней формулы следует, что квазистатистические флуктуации крутизны ($\Omega \ll p$) переносятся на флуктуации амплитуды с большим «усилением» так же, как это имело место и для флуктуаций емкости, поскольку $\Pi \gg p$.

3. В реальном автогенераторе флуктуации емкости и крутизны всегда существуют одновременно. В зависимости, однако, от их происхождения они могут быть или статистически независимыми, или коррелированными.

Статистическая независимость может быть, например, тогда, когда флуктуации крутизны определяются или фликкерным шумом лампы, или флуктуациями питающих напряжений, а флуктуации емкости определяются в основном эффектом мерцания керамических конденсаторов контура.

Поскольку при статистической независимости величин их функции корреляции и спектральные плотности складываются, получим на основании первой формулы (6.3.11) и формулы (6.3.16) спектральную плотность суммарных амплитудных флуктуаций

$$S_a(\Omega) = \frac{1}{4} \frac{\Pi^2 + \Omega^2}{p^2 + \Omega^2} S_{\delta c}(\Omega) + \frac{1}{4} \frac{\Pi^2}{p^2 + \Omega^2} S_{\delta s}(\Omega).$$

Формулы для $S_v(\Omega)$, $S_{av}^0(\Omega)$ и $S_{av}^1(\Omega)$ сохраняют прежнее значение, данное (6.3.11). Таким образом, видоизменяются только амплитудные флуктуации.

Рассмотрим подробнее самый общий случай — случай произвольной коррелированности одновременно существующих флуктуаций емкости и крутизны.

На основании (6.3.8) и (6.3.13) в общем случае имеем

$$g_c(t) = \delta C(t), \quad g_s(t) = -\frac{1}{\omega_0} \left[\Pi \delta C(t) - \Pi \delta S(t) + \frac{d}{dt} \delta C(t) \right].$$

Будем считать, что нам заданы структурные функции $\Delta_{\delta C}(\theta, \tau)$, $\Delta_{\delta S}(\theta, \tau)$, $\Delta_{\delta C \delta S}(\theta, \tau)$ и спектральные плотности $S_{\delta C}(\Omega)$, $S_{\delta S}(\Omega)$, $S_{\delta C \delta S}^0(\Omega)$, $S_{\delta C \delta S}^1(\Omega)$.

С помощью (2.1.13) — (2.1.16) нетрудно найти следующие структурные функции для $g_c(t)$ и $g_s(t)$:

$$\begin{aligned} \Delta_c(\theta, \tau) &= \Delta_{\delta C}(\theta, \tau), \\ \Delta_s(\theta, \tau) &= \frac{1}{\omega_1^2} \left\{ \Pi^2 [\Delta_{\delta C}(\theta, \tau) - 2\Delta_{\delta C \delta S}^0(\theta, \tau) + \Delta_{\delta S}(\theta, \tau)] + \right. \\ &\quad \left. + 2\Pi \frac{\partial \Delta_{\delta C \delta S}^1(\theta, \tau)}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 \Delta_{\delta C}(\theta, \tau)}{\partial \theta^2} \right\}, \quad (6.3.17) \end{aligned}$$

$$\Delta_{sc}^0(\theta, \tau) = -\frac{\Pi}{\omega_1} [\Delta_{\delta C}(\theta, \tau) - \Delta_{\delta C \delta S}^0(\theta, \tau)],$$

$$\Delta_{sc}^1(\theta, \tau) = -\frac{1}{\omega_1} \left[\Pi \Delta_{\delta C \delta S}^1(\theta, \tau) - \frac{\partial \Delta_{\delta C}(\theta, \tau)}{\partial \theta} \right].$$

Спектральные плотности функций $g_c(t)$ и $g_s(t)$ определяются на основании (2.1.17) — (2.1.20):

$$\begin{aligned} S_c(\Omega) &= S_{\delta C}(\Omega), \\ S_s(\Omega) &= \frac{1}{\omega_1^2} \{ [\Pi^2 + \Omega^2] S_{\delta C}(\Omega) + \Pi^2 S_{\delta S}(\Omega) - \\ &\quad - 2\Pi^2 S_{\delta C \delta S}^0(\Omega) + 2\Pi S_{\delta C \delta S}^1(\Omega) \}, \quad (6.3.18) \end{aligned}$$

$$S_{sc}^0(\Omega) = -\frac{\Pi}{\omega_1} [S_{\delta C}(\Omega) - S_{\delta C \delta S}^0(\Omega)],$$

$$S_{sc}^1(\Omega) = -\frac{1}{\omega_1} [\Pi S_{\delta C \delta S}^1(\Omega) + \Omega S_{\delta C}(\Omega)].$$

Значения структурных функций и спектральных плотностей для $\alpha(t)$ и $v(t)$, которые мы не будем приводить вследствие их громоздкости, получаются при использовании формул § 2.3 и подстановке (6.3.18) в (6.2.9).

Пусть, наконец, флуктуации емкости линейно связаны с флуктуациями крутизны

$$\delta S(t) = b \delta C(t).$$

Такой случай имеет место тогда, когда и флуктуации емкости, и флуктуации крутизны порождаются одним и тем же явлением, например фликкерным шумом лампы LC -генератора.

В этом случае нетрудно найти следующие значения спектральных плотностей амплитудных и частотных флуктуаций (выражая их через $S_{\delta C}(\Omega)$):

$$\begin{aligned} S_a(\Omega) &= \frac{1}{4} \frac{\Pi^2 d^2 + \Omega^2}{p^2 + \Omega^2} S_{\delta C}(\Omega), \\ S_v(\Omega) &= \frac{\omega_0^2}{4} S_{\delta C}(\Omega), \\ S_{av}^0(\Omega) &= \frac{\omega_0}{4} \frac{p\Pi d + \Omega^2}{p^2 + \Omega^2} S_{\delta C}(\Omega), \\ S_{av}^1(\Omega) &= -\frac{\omega_0}{4} \frac{(\Pi d - p)\Omega}{p^2 + \Omega^2} S_{\delta C}(\Omega). \end{aligned} \quad (6.3.19)$$

Эти формулы совпадают с (6.3.11) при замене в последних Π на Πd , где $d=1-b$. Поскольку, однако, величина d может быть малой по сравнению с единицей, то графики спектральных плотностей, данных формулами (6.3.19), в общем случае отличаются от таковых для формул (6.3.11). Это отличие в основном относится к медленным флуктуациям параметров и приводит к меньшим значениям спектральных плотностей для линейно связанных δS и δC при b положительном и близком к единице ($d \ll 1$). Физически это уменьшение спектральных плотностей связано с «компенсацией» влияния флуктуаций емкости влиянием флуктуаций крутизны, поскольку в $g_s(t)$ эти флуктуации входят в виде разности $\delta C(t) - \delta S(t)$.

§ 6.4. Форма и ширина спектральной линии LC -генератора, обладающего флуктуациями емкости и крутизны

Приступим теперь к исследованию технической формы и ширины спектральной линии LC -генератора. Как указывалось выше, подробный анализ формы линии возможен лишь при конкретизации спектрально-корреляционных характеристик флуктуаций параметров.

1. Начнем анализ со случая стационарных флуктуаций емкости, функция корреляции и спектральная плотность которых равны

$$\Phi_{\delta C}(\tau) = \langle \delta C^2 \rangle \exp(-a|\tau|), \quad S_{\delta C}(\Omega) = \frac{\langle \delta C^2 \rangle}{\pi} \frac{a}{a^2 + \Omega^2}. \quad (6.4.1)$$

Используя (1.2.4), для функций $g_c(t)$ и $g_s(t)$, определяемых формулами (6.3.9), нетрудно получить следующие функции корреляции:

$$\Phi_c(\tau) = \Phi_{\delta C}(\tau), \quad \Phi_s(\tau) = \langle \delta C^2 \rangle \left[\frac{\Pi^2 - a^2}{\omega_0^2} e^{-a|\tau|} + \frac{2a}{\omega_0^2} \delta(\tau) \right],$$

$$\Phi_{sc}^0(\tau) = -\frac{\Pi}{\omega_0} \langle \delta C^2 \rangle e^{-a|\tau|}, \quad \Phi_{sc}^1(\tau) = -\langle \delta C^2 \rangle \frac{a}{\omega_0} e^{-a|\tau|} \operatorname{sign} \tau.$$

Отсюда на основании (6.2.8) находим функции корреляции амплитудных и частотных флуктуаций:

$$\Phi_a(\tau) = \frac{\langle \delta C^2 \rangle}{4p(p^2 - a^2)} [p(\Pi^2 - a^2) e^{-a|\tau|} - a(\Pi^2 - p^2) e^{-p|\tau|}],$$

$$\Phi_a(0) = \langle a^2 \rangle = \frac{\langle \delta C^2 \rangle}{4p} \frac{\Pi^2 + ap}{p + a}, \quad \Phi_v(\tau) = \frac{\omega_0^2}{4} \langle \delta C^2 \rangle e^{-a|\tau|},$$

$$\Phi_{av}^0(\tau) = \frac{\langle \delta C^2 \rangle \omega_0}{4(p^2 - a^2)} [(p\Pi - a^2) e^{-a|\tau|} - a(\Pi - p) e^{-p|\tau|}],$$

$$\Phi_{av}^1(\tau) = -\frac{\langle \delta C^2 \rangle \omega_0}{4(p^2 - a^2)} a(\Pi - p) [e^{-a|\tau|} - e^{-p|\tau|}] \operatorname{sign} \tau.$$
(6.4.2)

Спектральные плотности флуктуаций амплитуды и частоты, соответствующие (6.4.2), можно написать непосредственно с помощью (6.3.11) и (6.4.1):

$$S_a(\Omega) = \frac{\langle \delta C^2 \rangle a}{4\pi} \frac{\Pi^2 + \Omega^2}{(p^2 + \Omega^2)(a^2 + \Omega^2)}, \quad S_v(\Omega) = \frac{\langle \delta C^2 \rangle a \omega_0^2}{4\pi(a^2 + \Omega^2)},$$

$$S_{av}^0(\Omega) = \frac{\langle \delta C^2 \rangle a \omega_0}{4\pi} \cdot \frac{p\Pi + \Omega^2}{(p^2 + \Omega^2)(a^2 + \Omega^2)},$$

$$S_{av}^1(\Omega) = -\frac{\langle \delta C^2 \rangle a \omega_0}{4\pi} \frac{\Omega}{(p^2 + \Omega^2)(a^2 + \Omega^2)}.$$
(6.4.3)

В полученные формулы (6.4.2), (6.4.3) входят параметры a , Π , p . Последние два из них являются характеристиками генератора, и обычно $\Pi \gg p$. Параметр a — ширина спектра флуктуаций емкости может быть любым по отношению к Π и p .

При этом возможны, например, следующие три частных случая: 1) $a \ll p \ll \Pi$, 2) $p \ll a \ll \Pi$, 3) $p \ll \Pi \ll a$. В последнем случае, разумеется, выполняется неравенство $a \ll \omega_0$, принятое нами выше (см. § 6.1) — условие медленности флуктуаций параметров по сравнению с $\cos \omega_0 t$.

Для вычисления формы и ширины спектральной линии, согласно § 4.6, необходимо найти вспомогательные функции $\chi(\tau)$,

$\Phi_{\alpha \Delta\varphi}^0(\tau)$, $\Phi_{\alpha \Delta\varphi}^1(\tau)$, заданные формулами (4.6.5), (4.6.4). Учитывая условие $\Pi \gg p$, находим (для $\tau > 0$):

$$\begin{aligned}\chi(\tau) &= m(e^{-a\tau} + a\tau - 1), \\ \Phi_{\alpha \Delta\varphi}^0(\tau) &= -n \frac{a}{p+a} \left[1 - \frac{pe^{-a\tau} - ae^{-p\tau}}{p-a} \right], \\ \Phi_{\alpha \Delta\varphi}^1(\tau) &= n \left[1 - \frac{p^2 e^{-a\tau} - a^2 e^{-p\tau} + \frac{a^2 p}{\Pi} (e^{-p\tau} - e^{-a\tau})}{p^2 - a^2} \right],\end{aligned}\quad (6.4.4)$$

где $n = \frac{\langle \delta C^2 \rangle}{4} \frac{\omega_0 \Pi}{ap}$, $m = \frac{\langle \delta C^2 \rangle}{4} \frac{\omega_0^2}{a^2} = \frac{\langle v^2 \rangle}{a^2}$ — индекс модуляции.

Как мы уже видели ранее, значение индекса модуляции существенно влияет на форму спектральной линии, обязанную флуктуациям частоты. Это значит, что для задания m необходимо наложить какое-то условие на $\langle \delta C^2 \rangle$. С другой стороны, все проводимые выкладки связаны с предположением малости амплитудных флуктуаций $\langle \alpha^2 \rangle \ll 1$, что также в свою очередь накладывает определенные условия (малости) на $\langle \delta C^2 \rangle$.

2. Рассмотрим первый частный случай $m \gg 1$. Это условие означает, что $\langle \delta C^2 \rangle$ подчиняется неравенствам

$$\frac{a^2}{\omega_0^2} \ll \frac{\langle \delta C^2 \rangle}{4} \ll \frac{p(p+a)}{\Pi^2 + ap}.$$

Обратимся прежде к $W_{x\chi}^0(\Omega)$ — форме линии генератора, обязанной одним флуктуациям частоты. Для $\chi(\tau)$, заданной первой формулой (6.4.4), форма линии была нами уже рассмотрена ранее в § 4.5. Поскольку $m \gg 1$, то, согласно (4.5.30), имеем

$$W_{x\chi}^0(\Omega) = \frac{R_0^2}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi \langle v^2 \rangle}} \exp \left[-\frac{\Omega^2}{2 \langle v^2 \rangle} \right], \quad (6.4.5)$$

где $\langle v^2 \rangle = \Phi_v(0) = \frac{\langle \delta C^2 \rangle}{4} \omega_0^2 = ma^2$. Как уже указывалось, эта формула, являясь приближенной, справедлива только для не слишком больших Ω (меньших или сравнимых с $\sqrt{\langle v^2 \rangle}$). При Ω , достаточно больших по сравнению с $\sqrt{\langle v^2 \rangle}$, следует пользоваться выражением для крыльев спектральной линии (см. (4.5.31)):

$$W_{x\chi}^0(\Omega) = \frac{R_0^2}{2} \frac{S_v(\Omega)}{\Omega^2} = \frac{R_0^2}{2\pi} \frac{a \langle v^2 \rangle}{\Omega^4} = \frac{R_0^2}{2\pi} \frac{\langle \delta C^2 \rangle \omega_0^2 a}{4\Omega^4}. \quad (6.4.6)$$

Ширина спектральной линии $W_{x\chi}^0(\Omega)$ при $m \gg 1$ равна, согласно (4.5.34) и (4.5.35),

$$\Delta\Omega = \omega_0 \sqrt{\frac{\pi}{2} \langle \delta C^2 \rangle} = \sqrt{2\pi \langle v^2 \rangle} = a \sqrt{2\pi m}. \quad (6.4.7)$$

Отыщем ширину спектров амплитудных и амплитудно-частотных флуктуаций Π_α и $\Pi_{\alpha\nu}$. Определяя их как $\Pi_\alpha = \langle a^2 \rangle / S_a(0)$, $\Pi_{\alpha\nu} = \langle \alpha\nu \rangle / S_{\alpha\nu}^0(0)$, нетрудно найти

$$\Pi_\alpha = \pi a \frac{1 + \frac{ap}{\Pi^2}}{1 + \frac{a}{p}}, \quad \Pi_{\alpha\nu} = \pi a \frac{1 + \frac{a}{\Pi}}{1 + \frac{a}{p}}.$$

Если учесть, что $p \ll \Pi$, то при любых значениях a имеем $\Pi_\alpha < \pi a$, $\Pi_{\alpha\nu} < \pi a$. Таким образом, спектр $W_{x\chi}^0(\Omega)$ много шире спектров амплитудных и амплитудно-частотных флуктуаций. В этом случае мы должны обратиться к п. 3 § 4.6. Согласно (4.6.9), принимая во внимание, что $\Phi_{\alpha\nu}^0(0) = \frac{n}{\pi} \Pi_{\alpha\nu}$ и что $W_{x\chi}^0(\Omega)$ определяется формулой (6.4.5), имеем

$$W_x^0(\Omega) = W_{x\chi}^0(\Omega), \quad W_x^1(\Omega) = 2 \frac{n}{\pi} \Pi_{\alpha\nu} \frac{\Omega}{\langle v^2 \rangle} W_{x\chi}^0(\Omega).$$

Суммируя, получаем окончательно

$$W_x(\Omega) = \left[1 + 2 \frac{\Pi + a}{p + a} \frac{\Omega}{\omega_0} \right] W_{x\chi}^0(\Omega). \quad (6.4.8)$$

Эта формула справедлива при $\Omega \leq \Delta\Omega$. Такова форма спектральной линии генератора при «больших» флуктуациях емкости контура, когда $m \gg 1$.

Поведение спектра генератора при $\Omega \gg \Delta\Omega$ (крылья спектральной линии) определяются формулой (4.7.25). Поскольку $\Delta\Omega \gg \Pi_\alpha$, $\Pi_{\alpha\nu}$, то подставлять значения $S_v(\Omega)$, $S_{\alpha\nu}^0(\Omega)$, $S_\alpha(\Omega)$ в указанную формулу следует при $\Omega \gg a$, Π_α , $\Pi_{\alpha\nu}$. Кроме того, легко видеть, что

$$E^0 = \frac{\langle \delta C^2 \rangle}{4} a \omega_0, \quad B^0 = \frac{\langle \delta C^2 \rangle}{4} \omega_0 \frac{\Pi + a}{p + a}, \quad B^1 = 0.$$

Собирая все вместе и полагая $\Omega \ll \omega_0$, имеем следующее выражение для крыльев спектральной линии:

$$W_x(\Omega) = W_{x\chi}^0(\Omega) = \frac{R_0^2}{2\pi} \frac{a \langle v^2 \rangle}{\Omega^4}. \quad (6.4.9)$$

Таким образом, при любых соотношениях p , Π , a крылья спектральной линии определяются главным образом спектром частотных флуктуаций. Это связано с тем, что, согласно (6.3.10), быстрые частотные флуктуации зависят от флуктуаций емкости в большей степени ($v \approx -\frac{\omega_0}{2} \delta C$), чем быстрые амплитудные ($\alpha = -\frac{1}{2} \delta C$); другими словами, флуктуации емкости дают го-

раздо больший вклад в частотные флуктуации, нежели в амплитудные. И это верно до тех пор, пока $\Omega \ll \omega_0$, т. е. как раз при принятых ограничениях излагаемого метода.

3. Пусть теперь индекс модуляции является малым $m \ll 1$, что имеет место при достаточно малых флуктуациях емкости

$$\frac{\langle \delta C^2 \rangle}{4} \ll \frac{a^2}{\omega_0^2} \ll \frac{p(p+a)}{\Pi^2 + ap}.$$

Для малого индекса модуляции, согласно (4.5.27) и (4.5.32), имеем

$$W_{x\chi}^0(\Omega) = \frac{R_0^2}{2\pi} \frac{\frac{\Delta\Omega}{\pi} a^2}{\left[\frac{\Delta\Omega^2}{\pi^2} + \Omega^2 \right] [a^2 + \Omega^2]}, \quad (6.4.10)$$

где ширина линии равна

$$\Delta\Omega = \pi m a = \pi \frac{\langle \delta C^2 \rangle \omega_0^2}{4a} = \pi \frac{\langle v^2 \rangle}{a} \ll a. \quad (6.4.11)$$

Если теперь потребовать дополнительного условия $m \ll \frac{p^2}{\Pi^2}$, то нетрудно показать, что тогда при любых a , $\Delta\Omega \ll \Pi_\alpha$, $\Pi_{\alpha v}$. Это дополнительное условие означает требование еще меньших флуктуаций емкости: $\frac{\langle \delta C^2 \rangle}{4} \ll \frac{a^2 p^2}{\omega_0^2 \Pi^2}$. При этом также $n^2 \ll \langle \alpha^2 \rangle$.

При таких малых флуктуациях емкости мы можем воспользоваться результатами п. 4 § 4.6. Сравнивая (4.6.12) с (6.4.4), нетрудно убедиться в том, что

$$C^0 = -n \frac{a}{p+a}, \quad C^1 = -n, \quad |C^0|, |C^1| \ll 1.$$

На основании (4.6.26) и (4.6.22) получаем

$$W_x^0(\Omega) = W_{x\chi}^0(\Omega) + \frac{R_0^2}{2} S_\alpha(\Omega),$$

$$W_x^1(\Omega) = 2n W_{x\chi}^1(\Omega) + \frac{R_0^2}{2} 2 \frac{S_{\alpha v}^0(\Omega) - S_{\alpha v}^0(0)}{\Omega},$$

где $W_{x\chi}^0(\Omega)$ дается формулой (6.4.10), а

$$W_{x\chi}^1(\Omega) = \frac{R_0^2}{2\pi} \int_0^\infty e^{-\chi(\tau)} \sin \Omega \tau d\tau.$$

Воспользовавшись формулой (II.14), найдем, ограничиваясь первым членом ряда, вследствие малости индекса модуляции

$$W_{x\lambda}^1(\Omega) = \frac{R_0^2}{2\pi} \frac{\Omega}{\frac{\Delta\Omega}{\pi^2} + \Omega^2} : \quad (6.4.12)$$

Учитывая (6.4.3), получим, собирая вместе все члены,

$$W_x^0(\Omega) = \frac{R_0^2}{2\pi} \left\{ \frac{\omega_0^2}{\left[\frac{\Delta\Omega^2}{\pi^2} + \Omega^2\right] [a^2 + \Omega^2]} + \frac{\Pi^2 + \Omega^2}{(a^2 + \Omega^2)(p^2 + \Omega^2)} \right\} \frac{\langle \delta C^2 \rangle a}{4}, \quad (6.4.13)$$

$$W_x^1(\Omega) = \frac{R_0^2}{2\pi} \frac{\langle \delta C^2 \rangle a}{4} \left\{ \frac{1}{\frac{\Delta\Omega^2}{\pi^2} + \Omega^2} + \frac{p^2 a^2 - p\Pi(p^2 + a^2) - p\Pi\Omega^2}{\Pi p(p^2 + \Omega^2)(a^2 + \Omega^2)} \right\} \frac{2\omega_0\Pi}{pa^2} \Omega.$$

Таковы компоненты формы спектральной линии генератора, обладающего достаточно малыми флуктуациями емкости. Прежде всего отсюда видно, что форма линии имеет почти симметричный узкополосный пик с шириной, определяемой (6.4.11), и почти симметричный пьедестал. Форма пика линии равна

$$\frac{R_0^2}{2\pi} \frac{\langle \delta C^2 \rangle \omega_0}{4a} \frac{\omega_0 + 2\frac{\Pi}{p} \Omega}{\frac{\Delta\Omega^2}{\pi^2} + \Omega^2}. \quad (6.4.14)$$

Она с большой степенью точности симметрична и ее четная часть имеет резонансную форму.

Полагая $\Omega \gg \Delta\Omega/\pi$, из (6.4.13) нетрудно найти, суммируя компоненты, следующее выражение для пьедестала спектральной линии генератора:

$$W_x(\Omega) = \frac{R_0^2}{2\pi} \frac{\langle \delta C^2 \rangle a}{4} \frac{\Omega^4 + 2\omega_0\Omega^3 + (\omega_0^2 + \Pi^2)\Omega^2 + 2\omega_0\Pi p\Omega + \omega_0^2 p^2}{\Omega^2(a^2 + \Omega^2)(p^2 + \Omega^2)}. \quad (6.4.15)$$

Следует отметить, что это же самое выражение мы получим и из (4.7.25), поскольку теперь $\Delta\Omega \ll a$, Π_α , $\Pi_{\alpha\nu}$ и значения спектральных плотностей $S_\nu(\Omega)$, $S_{\alpha\nu}^0(\Omega)$ и $S_\alpha(\Omega)$, согласно замечанию в п. 5 § 4.7, можно брать и при $\Omega \ll a$, Π_α , $\Pi_{\alpha\nu}$. Кроме того, вследствие $n^2 \ll \langle \alpha^2 \rangle$, последнее слагаемое в (4.7.25) можно не учитывать.

Полагая далее $a, p, \Pi \ll \Omega \ll \omega_0$, из (6.4.15) получаем крылья спектральной линии:

$$W_x(\Omega) = \frac{R_0^2}{2\pi} \frac{\langle \delta C^2 \rangle a}{4} \frac{(\omega_0^2 + \Pi^2)}{\Omega^4}. \quad (6.4.16)$$

Тем самым для крыльев спектральной линии при $m \ll 1$, как и в случае $m \gg 1$, имеем одну и ту же формулу (6.4.9). Однако при $m \gg 1$ мы получили в явной форме выражение лишь для пика и для крыльев, теперь же при $m \ll 1$ мы имеем точную формулу (6.4.13), справедливую при любом Ω , и она дает возможность проследить плавный переход пика в пьедестал и пьедестала в крылья. Из этой формулы также следует, что выражением для пьедестала можно действительно пользоваться, если $\Omega \gg \Delta\Omega$. Кроме того, заметим, что в случае $m \gg 1$ у формы спектральной линии фактически отсутствует пьедестал и доплеровский пик непосредственно переходит в крылья линии. Это связано с тем, что при $m \gg 1$ ширина линии много больше полос амплитудно-частотных спектров и при $\Omega \approx a$, P_α , $P_{\alpha\nu}$ мы находимся почти в центре пика.

Выше нигде не накладывалось никаких ограничений на a (кроме ранее принятого ограничения $a \ll \omega_0$). Поэтому полученные результаты справедливы, например, при $a \ll p \ll \Pi$, $p \ll a \ll \Pi$ или $p \ll \Pi \ll a \ll \omega_0$. Первое неравенство $a \ll p$ можно казалось бы толковать как квазистатическое воздействие флуктуаций емкости на генератор. В последнем неравенстве мы имеем дело с флуктуациями частоты, ширина которых много больше даже полосы свободного контура, не говоря уже о полосе генератора. Казалось бы, что в этом случае флуктуации частоты можно считать дельта-коррелированными. С другой стороны, мы получили и доплеровскую, и резонансную форму линии как для случая $a \ll p$, так и для случая $\Pi \ll a$, хотя, согласно § 4.5, доплеровская форма линии обязана квазистатическим флуктуациям частоты, а резонансная форма линии — дельта-коррелированным. Тем самым, казалось бы, имеет место противоречие. Однако это противоречие только видимое. Дело в том, что условие $a \ll p$ не является условием квазистатичности флуктуаций частоты. Квазистатичность в этом случае имеет место только для флуктуаций амплитуды генератора, а условием квазистатичности флуктуаций частоты является условие, накладываемое на индекс модуляции: $m = \langle v^2 \rangle / a \gg 1$. Ширина спектра флуктуаций частоты должна быть для квазистатичности малой по сравнению со средним отклонением флуктуаций частоты $\sqrt{\langle v^2 \rangle}$, а не по сравнению с прочностью предельного цикла генератора.

Совершенно аналогично дело обстоит и с неравенством $\Pi \ll a$, которое вовсе не означает существование сколь угодно быстрых флуктуаций частоты. Последние можно считать сколь угодно быстрыми, если $\sqrt{\langle v^2 \rangle} \ll a$.

Согласно (6.4.4) значение индекса модуляции не зависит от отношения p/a , поэтому и форма спектральной линии не зависит от величины этого отношения.

4. Обратимся к более общему случаю, когда наряду с флуктуациями емкости имеются флуктуации крутизны лампы автогенератора. Пусть флуктуации крутизны пропорциональны флуктуациям емкости $\delta S(t) = b \delta C(t)$, а функция корреляции флуктуации частоты по-прежнему определяется формулой (6.4.1). Используя (6.3.19), найдем следующие спектральные плотности флуктуаций амплитуды и частоты автогенератора:

$$\begin{aligned} S_a(\Omega) &= \frac{\langle \delta C^2 \rangle a}{4\pi} \frac{\Pi^2 d^2 + \Omega^2}{(p^2 + \Omega^2)(a^2 + \Omega^2)}, \quad S_v(\Omega) = \frac{\langle \delta C^2 \rangle a \omega_0^2}{4\pi(a^2 + \Omega^2)}, \\ S_{av}^0(\Omega) &= \frac{\langle \delta C^2 \rangle a \omega_0}{4\pi} \frac{p \Pi d + \Omega^2}{(p^2 + \Omega^2)(a^2 + \Omega^2)}, \\ S_{av}^1(\Omega) &= - \frac{\langle \delta C^2 \rangle a \omega_0 (\Pi d - p)}{4\pi} \frac{\Omega}{(p^2 + \Omega^2)(a^2 + \Omega^2)}, \quad d = 1 - b. \end{aligned} \quad (6.4.17)$$

Сравнивая (6.4.17) с (6.4.3), нетрудно видеть, что присутствие когерентных флуктуаций крутизны привело лишь к замене Π на Πd . При этом индекс модуляции m остался неизменным, а вместо n имеем nd .

Таким образом, изменения спектра томсоновского автогенератора касаются в основном пьедестала линии, в то время как форма четной части пика (доплеровская при $m \gg 1$ и резонансная при $m \ll 1$) и ширина остались неизменными. Однако, поскольку изменилась интенсивность амплитудных флуктуаций, теперь $\langle \alpha^2 \rangle = \frac{\langle \delta C^2 \rangle}{4p} \frac{\Pi^2 d^2 + ap}{p + a}$, то несколько изменилось и условие малости, накладываемое на флуктуации емкости. Оно, как нетрудно видеть, имеет теперь следующий вид:

$$\frac{\langle \delta C^2 \rangle}{4} \ll \frac{p(p+a)}{\Pi^2 d^2 + ap}.$$

При $|d| \gg 1$, а такой случай означает, что относительные флуктуации крутизны намного больше когерентных им относительных флуктуаций емкости, согласно (6.4.8) и (6.4.14), несимметрия пиков возрастает, ибо теперь при $m \gg 1$

$$W_x(\Omega) = \left[1 + 2 \frac{\Pi d + a}{p + a} \frac{\Omega}{\omega_0} \right] W_{x\chi}^0(\Omega), \quad (6.4.18)$$

а при $m \ll 1$

$$W_x(\Omega) = \frac{R_0^2}{2\pi} \frac{\langle \delta C^2 \rangle \omega_0}{4a} \frac{\omega_0 + 2 \frac{\Pi}{p} d \Omega}{(\Delta \Omega^2 / \pi^2) + \Omega^2}. \quad (6.4.19)$$

Наиболее сильно присутствие флуктуаций крутизны у лампы генератора сказывается на форме пьедестала при $m \ll 1$. Рас-

считывая такие частоты, что $\Delta\Omega \ll \Omega \ll \omega_0$, вместо (6.4.15) получим

$$W_x(\Omega) = \frac{R_0^2}{2\pi} \frac{\langle \delta C^2 \rangle a}{4} \frac{\omega_0^2 \Omega^2 + (\Pi d \Omega + \omega_0 p)^2}{\Omega^2 (a^2 + \Omega^2) (p^2 + \Omega^2)}. \quad (6.4.20)$$

Числитель этой дроби имеет минимум при $\Omega = -\Omega_0$, $\Omega_0 = \frac{p}{(\omega_0/\Pi d) + (\Pi d/\omega_0)}$. Значение числителя в минимуме по сравнению со значением при $\Omega = 0$ равно $1 - \frac{1}{1 + (\omega_0/\Pi d)^2}$. При $\omega_0 \ll \Pi d$ минимум $W_x(\Omega)$ при $\Omega = \Omega_0$ может быть глубоким. Примерный вид спектра колебания генератора при $|d| \gg 1$ изображен на рис. 6.5.

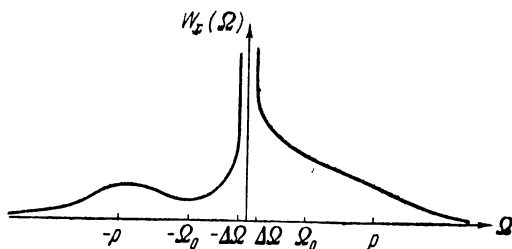


Рис. 6.5.

Крылья спектральной линии, сохранив прежний закон изменения с частотой, лишь несколько увеличились. Вместо (6.4.16) имеем теперь следующее уравнение крыльев:

$$W_x(\Omega) = \frac{R_0^2}{2\pi} \frac{\langle \delta C^2 \rangle a}{4} \frac{\omega_0^2 + \Pi^2 d^2}{\Omega^4}.$$

Появление сильной несимметрии у формы спектра генератора связано с тем, что при больших (по сравнению с флуктуациями емкости) флуктуациях крутизны возникают сравнительно большие амплитудные флуктуации, сильно коррелированные с флуктуациями частоты. В самом деле, вместо (6.3.9) имеем теперь следующие флуктуационные уравнения:

$$\frac{d}{dt} a + pa = -\frac{1}{2} [\Pi d \delta C + \frac{d}{dt} \delta C], \quad \nu = -\frac{\omega_0}{2} \delta C.$$

Рассмотрим медленные (по сравнению с $\cos pt$) флуктуации амплитуды и частоты. Тогда

$$pa = -\frac{1}{2} \Pi d \delta C, \quad \nu = -\frac{1}{2} \omega_0 \delta C.$$

Отсюда видно, что, например, положительные флуктуации емкости и крутизны приводят к большим отрицательным ампли-

тудным флуктуациям и к отрицательным частотным флуктуациям. Тем самым «монохроматическая спектральная линия» генератора при рассмотрении колебания в данный момент смещается влево (рис. 6.6) и при этом амплитуда ее уменьшается. При отрицательных флуктуациях емкости линия смещается вправо и амплитуда ее возрастает. Таким образом, при $|\Omega| \leq p$ как раз и должна быть сильная несимметрия. Более быстрые флуктуации емкости приводят к меньшим амплитудным флуктуациям, и несимметрия спектра уменьшается при возрастании Ω .

5. Рассмотрим теперь случай фликкерных стационарных флуктуаций емкости и пропорциональных им флуктуаций крутизны. Пусть

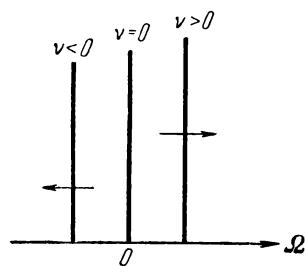


Рис. 6.6.

$$S_{\delta c}(\omega) = \frac{A_c}{2\pi |\omega|^\gamma}, \quad 0 < \gamma < 1.$$

Тогда функция корреляции флуктуаций емкости существует и равна

$$\Phi_{\delta c}(\tau) = B |\tau|^{\gamma-1}, \quad B = \frac{A_c}{\pi} \Gamma(1-\gamma) \sin \frac{\pi\gamma}{2}.$$

На основании (6.3.19) спектральные плотности амплитудных и частотных флуктуаций генератора равны

$$S_a(\Omega) = \frac{A_c}{8\pi} \frac{\Pi^2 d^2 + \Omega^2}{p^2 + \Omega^2} \frac{1}{|\Omega|^\gamma}, \quad S_v(\Omega) = -\frac{\omega_0^2 A_c}{8\pi} \frac{1}{|\Omega|^\gamma}, \quad (6.4.21)$$

$$S_{av}^0(\Omega) = \frac{\omega_0 A_c}{8\pi} \frac{p\Pi d + \Omega^2}{p^2 + \Omega^2} \frac{1}{|\Omega|^\gamma}, \quad S_{av}^1(\Omega) = -\frac{\omega_0 A_c}{8\pi} \frac{(\Pi d - p)\Omega}{p^2 + \Omega^2} \frac{1}{|\Omega|^\gamma}.$$

Наличие совместных спектральных плотностей, так же как и в предыдущих примерах, приводит к несимметричной форме спектральной линии. Обратимся к общему случаю § 4.6, представленному формулами (4.4.5). Форма линии, связанная с функцией $A_x^0(\tau)$ и обязанная флуктуациям частоты, равна, согласно § 4.5,

$$W_{xx}^0(\Omega) = \frac{R_0^2}{2\pi} \int_0^\infty \exp[-a\tau^{1+\gamma}] \cos \Omega\tau \, d\tau,$$

где

$$a = \frac{\omega_0^2 A_c}{8\Gamma(2+\gamma) \sin \frac{\pi(1+\gamma)}{2}},$$

а ширина этой спектральной линии равна

$$\Delta\Omega = \frac{\pi(1+\gamma)\omega_0}{\sqrt{8}\Gamma\left(\frac{1}{1+\gamma}\right)} \sqrt{\frac{A_c}{\sin\frac{\pi(1+\gamma)}{2}\Gamma(2+\gamma)}}.$$

Как уже упоминалось выше, эта форма линии находится как бы между резонансной и доплеровской, приближаясь к той или к другой, в зависимости от значения γ . Крылья этой спектральной линии находятся, согласно (4.7.20):

$$W_{x\chi}^0(\Omega) = \frac{R_0^2}{2} \frac{\omega_0^2 A_c}{8\pi} \frac{1}{|\Omega|^{\gamma+2}}.$$

Спектральные плотности, соответствующие функциям корреляции $\Phi_{\alpha\Delta\varphi}^0(\tau)$ и $\Phi_{\alpha\Delta\varphi}^1(\tau)$, определяются с помощью (4.6.21). Для $\Omega \neq 0$

$$S_{\alpha\Delta\varphi}^0(\Omega) = \frac{\omega_0 A_c}{8\pi} \frac{Pd}{(p^2 + \Omega^2)|\Omega|^\gamma}, \quad S_{\alpha\Delta\varphi}^1(\Omega) = \frac{\omega_0 A_c}{8\pi} \frac{pPd + \Omega^2}{(p^2 + \Omega^2)|\Omega|^{\gamma+1}}.$$

Совершая фурье-преобразования (4.4.5), нетрудно получить

$$\begin{aligned} W_x^0(\Omega) &= W_{x\chi}^0(\Omega) + \int_{-\infty}^{+\infty} W_{x\chi}^0(u) S_{\alpha}(\Omega - u) du + \\ &+ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{\alpha\Delta\varphi}^0(v) S_{\alpha\Delta\varphi}^0(u - v) W_{x\chi}^0(\Omega - u) du dv + \\ &+ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{\alpha\Delta\varphi}^1(v) S_{\alpha\Delta\varphi}^1(u - v) W_{x\chi}^0(\Omega - u) dv du, \\ W_x^1(\Omega) &= 2 \int_{-\infty}^{+\infty} W_{x\chi}^0(u) S_{\alpha\Delta\varphi}^1(\Omega - u) du. \end{aligned}$$

Эти формулы являются точными, однако чрезвычайно громоздкими и трудными для анализа. Если форма пика спектральной линии $W_{x\chi}^0(\Omega)$ более или менее ясна, то пьедестал в общем случае трудно обозрим.

Рассмотрим поэтому подробнее один частный случай: γ близко к единице. Пусть, например, $\gamma = 0,99$. При этом $a \approx \frac{25}{2\pi} \omega_0^2 A_c$, $\Delta\Omega \approx 7\omega_0 \sqrt{A_c}$, а форма спектральной линии $W_{x\chi}^0(\Omega)$ при Ω , меньших или сравнимых с $\Delta\Omega$, близка к доплеровской. Поскольку при γ , близкой к единице, $\Phi_{\alpha}(\tau)$ изменяется с изменением τ чрезвычайно медленно (при $\gamma = 0,99$ $\Phi_{\alpha}(\tau) \approx A_c \tau^{-0,01/4\pi}$),

то можно принять, что $\Phi_\alpha(\tau)$ намного шире $A_\chi^0(\tau)$. Это значит, что ширину спектральной линии $\Delta\Omega$ можно считать много большей ширины спектров S_α , $S_{\alpha\nu}$. Следовательно, мы должны обращаться к § 4.6 и использовать формулы (4.6.9), для чего необходимо определить $\Phi_{\alpha\nu}^0(0)$. Для малых τ можно найти, что $\Phi_{\alpha\nu}^0(\tau) = \frac{\omega_0 B}{4} |\tau|^{\gamma-1}$. Следовательно, $\Phi_{\alpha\nu}^0(0)$ не существует. Не-

трудно видеть, что для малых $\tau > 0$ $\Phi_{\alpha\Delta\varphi}^1(\tau) = \frac{\omega_0 B}{4\gamma} \tau^\gamma$. Поскольку $\gamma < 1$, то мы, вообще говоря, должны обращаться к (4.6.10) и (4.6.11), где $N = \omega_0 B / 4\gamma$. Поскольку, однако, мы ограничимся случаем $\gamma = 0,99$, то можно примерно считать, что (4.6.10) близко ко второй формуле (4.6.8) и положить $\Phi_{\alpha\nu}^0(0) \approx N = \omega_0 B / 4$. Тогда для нечетной части пика спектральной линии имеем приближенно

$$W_x^1(\Omega) = -\frac{\omega_0 B}{2} \frac{d}{d\Omega} W_{x\chi}^0(\Omega).$$

Таким образом, для γ , близкого к единице, форма пика спектральной линии равна

$$W_x(\Omega) = \frac{R_0^2}{2\Delta\Omega} \left\{ 1 + \frac{A_C \omega_0 \Omega}{\Delta\Omega^2} \right\} \exp \left[-\frac{\Omega^2}{\Delta\Omega^2/\pi} \right].$$

При достаточно малых флуктуациях емкости несимметрией пика можно пренебрегать.

При $\Omega \gg \Delta\Omega$, ρ форму крыльев спектральной линии колебания находим, согласно (4.7.25), где, как легко проверить,

$$B^1 = 0, \quad \frac{6B^0 E^0}{\pi\Omega^4} = \frac{6\omega_0^2 A_C^2}{8\pi |\Omega|^\gamma 4\pi\Omega^2}.$$

Поскольку считаем, что $A_C \ll 1$, то получаем следующее уравнение крыльев:

$$W_x(\Omega) = \frac{R_0^2}{2} \frac{A_C}{8\pi |\Omega|^\gamma} \frac{\omega^2 + \Pi^2 d^2}{\Omega^2}.$$

6. Обращаемся далее к нестационарным флуктуациям емкости и крутизны, обладающих стационарными приращениями. Пусть по-прежнему $S_{\delta c}(\Omega) = A_C / 2\pi |\Omega|^\gamma$, где $1 < \gamma < 3$. Тогда у флуктуаций емкости функции корреляции не существует, но существует структурная функция $d_{\delta c}[0; \tau] = \Delta_{\delta c}(0, \tau) = B_1 |\tau|^{\gamma-1}$, где $B_1 = A_C / 2\Gamma(\gamma) \sin \frac{\pi}{2} (\gamma - 1)$.

Имея в виду формулы (6.4.21), которые справедливы и в рассматриваемом случае, для флуктуаций частоты получаем структурную функцию

$$\Delta_v(0, \tau) = d_v[0; \tau] = \frac{\omega^2}{4} B_1 |\tau|^{\nu-1}.$$

Обратимся к § 4.5 и рассмотрим сначала форму линии, обусловленную одним флуктуациям частоты. На основании п. 9 для достаточно большого t_0 , подчиняющегося условию (4.5.51), можем пользоваться асимптотическими формулами (4.5.52) и (4.5.48). Таким образом, имеем

$$W_{xv}(t_0, \Omega) = \frac{R_0^2}{2\Delta\Omega(t_0)} \exp\left[-\frac{\Omega^2}{\Delta\Omega^2(t_0)/\pi}\right], \quad (6.4.22)$$

$$\Delta\Omega(t) = \omega_0 \sqrt{\pi B_1 t_0^{\nu-1}}.$$

Рассмотрим подробнее условие, накладываемое на t_0 . Представляя $\frac{\omega_0^2}{4} B_1 = \theta^{-(\nu+1)}$, находим

$$\theta = \frac{\sqrt[\nu+1]{8\Gamma(\nu) \sin \frac{\pi}{2} (\nu-1)}}{\sqrt[\nu+1]{\omega_0^2 A_C}}.$$

Таким образом, согласно (4.5.51), для t_0 таких, что

$$t_0 \geq \theta 25^{\frac{1}{\nu-1}}, \quad (6.4.23)$$

справедливы вышеуказанные формулы.

Теперь можно использовать результаты п. 7 § 4.6, для чего необходимо вычислить сначала структурные функции $d_a[0; \tau]$, $d_{av}[0; \tau]$. Вычисление этих функций не представляет принципиальных трудностей — с помощью результатов §§ 2.1, 2.2, 2.3 их можно найти, однако для произвольного ν этот расчет является громоздким и не показательным. Для упрощения расчетов (при сохранении принципиальных выводов) ограничимся пока частным случаем $\nu=2$, когда $d_{\delta c}[0; \tau] = B_1 |\tau|$.

Прежде всего, на основании (1.5.7) имеем для $\tau > 0$, $\theta > 0$

$$d_{\delta c}[\theta; \tau] = B_1 \begin{cases} \tau - \theta, & \tau \geq \theta, \\ 0, & \tau \leq \theta. \end{cases}$$

Записывая флуктуационные уравнения (6.3.10) с заменой Π на Πd , в виде

$$\frac{d}{dt} a + pa = y(t), \quad y(t) = -\frac{\Pi d}{2} \delta C - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \delta C,$$

$$\nu = z(t), \quad z(t) = -\frac{\omega_0}{2} \delta C$$

на основании (2.1.5), для $y(t)$ получаем структурную функцию

$$\begin{aligned} d_y[0; \tau] &= \frac{\Pi^2 d^2}{4} d_{\delta c}[0; \tau] - \frac{1}{4} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} d_{\delta c}[0; \tau] = \\ &= -\frac{B_1}{4} [\delta(\theta + \tau) + \delta(\theta - \tau) - 2\delta(\theta)] + B_1 \frac{\Pi^2 d^2}{4} \begin{cases} \tau - \theta, & \tau \geq \theta; \\ 0, & \tau \leq \theta. \end{cases} \end{aligned}$$

Обращаясь теперь к § 2.2, для $\alpha(t)$ имеем (см. (2.2.26))

$$d_\alpha[0; \tau] = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-p(u+v)} d_y[u-v; \tau] du dv = \frac{1}{p} \int_0^\infty e^{-p\xi} d_y[\xi; \tau] d\xi.$$

Вычисляя интеграл, получаем

$$d_\alpha[0; \tau] = \frac{B_1}{4p} \left\{ \frac{d^2 \Pi^2}{p^2} (p\tau - 1 + e^{-p\tau}) + 1 - e^{-p\tau} \right\}.$$

При $\tau \gg 1/p$, $1/\Pi d$ имеем $d_\alpha[0; \tau] = B_1 \frac{\Pi^2 d^2}{4p^2} \tau$. Для вычисления $d_{\alpha v}[0; \tau]$ находим структурную функцию $d_{yz}[0; \tau]$:

$$\begin{aligned} d_{yz}[0; \tau] &= \frac{\omega_0 \Pi d}{4} d_{\delta c}[0; \tau] - \frac{\omega_0}{4} \frac{\partial}{\partial \theta} d_{\delta c}[0; \tau] = \\ &= \frac{\omega_0}{4} B_1 \begin{cases} d\Pi(\tau - \theta) + 1, & \tau \geq \theta, \\ 0, & \tau < \theta. \end{cases} \end{aligned}$$

Используя (2.3.18), нетрудно получить

$$d_{\alpha v}[0; \tau] = d_{\alpha v}^0[0; \tau] = \int_0^\infty e^{-p\xi} d_{yz}[\xi; \tau] d\xi.$$

Подставляя сюда предыдущую формулу, находим

$$d_{\alpha v}[0; \tau] = B_1 \frac{\omega_0 \Pi d}{4p^2} \left[p\tau - 1 + \frac{p}{\Pi d} + \left(1 - \frac{p}{\Pi d} \right) e^{-p\tau} \right].$$

При $\tau \gg 1/p$, $1/\Pi d$ структурная функция $d_{\alpha v}[0; \tau] = B_1 \frac{\omega_0 \Pi d}{4p} \tau$. Если $\tau \ll 1/p$, $1/\Pi d$, то имеем

$$d_\alpha[0; \tau] = \frac{1}{4} B_1 \tau; \quad d_{\alpha v}[0; \tau] = \frac{\omega_0}{4} B_1 \tau.$$

Таким образом, полагая $t_0 \gg 1/p$, $1/\Pi d$, имеем

$$d_\alpha[0; t_0] = B_1 \frac{\Pi^2 d^2}{4p^2} t_0, \quad d_{\alpha v}[0; t_0] = B_1 \frac{\omega_0 \Pi d}{4p} t_0.$$

Поскольку для $\gamma = 2$ $\Delta\Omega(t_0) = \omega_0 \sqrt{\pi B t_0}$, то нетрудно видеть, что

$$\frac{4\pi}{\Delta\Omega^2} d_{\alpha v}^2[0; t_0] = d_\alpha[0; t_0]. \quad (6.4.24)$$

Таким образом, для рассматриваемого автогенератора ни при каких t_0 неравенство (4.6.40) не выполняется, в то время как при $t_0 \ll 8p^2/A_c \Pi^2 d^2$ выполняются неравенства (4.6.38). Тем самым форма пика спектральной линии является для $\gamma=2$ несимметричной, равной, согласно (4.6.39),

$$W_x(t_0, \Omega) = \frac{R_0^2}{2 \Delta \Omega(t_0)} \left[1 + 2 \frac{\Pi d \Omega}{p \omega_0} \right] \exp \left[-\frac{\Omega^2}{\Delta \Omega^2 / \pi} \right]. \quad (6.4.25)$$

Эта формула справедлива при времени t_0 , подчиняющемся неравенствам

$$\frac{50}{V \omega_0^2 A_c} \leq t_0 \leq \frac{p^2}{A_c \Pi^2 d^2}. \quad (6.4.26)$$

При $\gamma \neq 2$ вычисление $d_\alpha[0; \tau]$ и $d_{\alpha\nu}[0; \tau]$ при любых τ , как уже отмечалось, является весьма громоздким. Однако для достаточно больших τ эти структурные функции могут быть найдены сравнительно легко. В самом деле, при $\tau \gg 1/p, 1/\Pi d$ мы получили (для $\gamma=2$)

$$d_\alpha[0; \tau] = \frac{\Pi^2 d^2}{4p^2} d_{\delta c}[0; \tau], \quad d_{\alpha\nu}[0; \tau] = \frac{\omega_0 \Pi d}{4p} d_{\delta c}[0; \tau]. \quad (6.4.27)$$

С другой стороны, из (6.4.21) следует, что при $\Omega \ll p, \Pi d$

$$S_\alpha(\Omega) = \frac{\Pi^2 d^2}{4p^2} S_{\delta c}(\Omega), \quad S_{\alpha\nu}(\Omega) = \frac{\omega_0 \Pi d}{4p} S_{\delta c}(\Omega). \quad (6.4.28)$$

Коэффициенты пропорциональности между структурными функциями и соответствующими спектральными плотностями одни и те же. Разумеется, это обстоятельство не случайно, а объяснено тому, что значения структурных функций при достаточно больших τ обязаны поведению спектральных плотностей (как их фурье-сопряженных) при достаточно малых Ω .

Это обстоятельство позволяет утверждать, что, поскольку (6.4.28) справедливы при любых γ , то и (6.4.27) также справедливы при любых γ . Следовательно, для $t_0 \gg 1/p, 1/\Pi d$ при $1 < \gamma < 3$

$$d_\alpha[0; t_0] = B_1 \frac{\Pi^2 d^2}{4p^2} t_0^{\gamma-1}, \quad d_{\alpha\nu}[0; t_0] = B_1 \frac{\omega_0 \Pi d}{4p} t_0^{\gamma-1}.$$

Легко проверить, что при этом по-прежнему выполняется соотношение (6.4.24) и справедлива формула (6.4.25) для формы пика спектральной линии при соблюдении (6.4.23) и

$$t_0^{\gamma-1} \ll \frac{4p^2}{B_1 \Pi^2 d^2}. \quad (6.4.29)$$

Напомним, что требование ограничения t_0 снизу связано с тем, что только при достаточно больших t_0 формируется именно доплеровская форма линии — большое t_0 требуется для того, чтобы

интенсивность флуктуаций частоты успела возрасти до значения индекса модуляции, много большего единицы.

С другой стороны, при рассмотрении четной части пика мы можем пренебрегать эффектом амплитудных флуктуаций при $\Omega \leq \Delta\Omega$ лишь до тех пор, пока их интенсивность достаточно мала — это и дает верхнюю границу для t_0 .

Обратимся теперь к крыльям спектральной линии. Чтобы мы могли воспользоваться формулой (4.7.27), дающей уравнение крыльев, необходимо найти T_{av} и $\varepsilon > 0$, определенные как $d_{av}[0; \tau] = T_{av} \tau^\varepsilon$ при $\tau \rightarrow +0$. Поскольку при $\Omega \rightarrow \infty$

$$S_{av}^0(\Omega) = \frac{\omega_0}{4} S_{\delta c}(\Omega),$$

то можно считать, что при $\tau \rightarrow +0$

$$d_{av}[0; \tau] = \frac{\omega_0}{4} d_{\delta c}[0; \tau] = B_1 \frac{\omega_0}{4} |\tau|^{\gamma-1}.$$

Тем самым $T_{av} = B_1 \omega_0/4$, $\varepsilon = \gamma - 1$. В таком случае (4.7.27) дает следующее выражение для крыльев спектральной линии, при выполнении (6.4.29):

$$W_x(t_0, \Omega) = \frac{R_0^2}{2} \frac{A_c}{8\pi |\Omega|^\gamma} \left\{ \frac{\omega_0^2 + \Pi^2 d^2}{\Omega^2} + \frac{\omega_0^2 H_1}{\Omega^2} \operatorname{Re} [(-j)^{\gamma+2}] - \right. \\ \left. - \frac{\omega_0^2 H_2}{\Omega^{\gamma+1}} \operatorname{Re} [(-j)^{2\gamma+1}] \right\},$$

где

$$H_1 = \frac{4p}{\Pi d} \frac{\Gamma(\gamma+2)}{\Gamma(\gamma) \sin \frac{\pi}{2}(\gamma-1)}, \quad H_2 = \frac{\pi A_c}{8} \frac{\Gamma(2\gamma+1)}{\gamma^2 \Gamma^2(\gamma) \sin^2 \frac{\pi}{2}(\gamma-1)}.$$

Поскольку $\gamma > 1$, то при достаточно больших Ω последним слагаемым можно пренебрегать. Если к тому же показатель γ не слишком близок к единице, то $H_1 \ll 1$, и вторым слагаемым можно также пренебрегать. Тогда крылья спектральной линии равны

$$W_x(t_0, \Omega) = \frac{R_0^2}{2} \frac{A_c}{8\pi |\Omega|^\gamma} \frac{\omega_0^2 + \Pi^2 d^2}{\Omega^2}.$$

7. Рассмотрим теперь последний случай, когда для малых Ω спектр флуктуаций емкости и когерентных им флуктуаций крутизны пропорционален $1/\Omega$. Пусть

$$S_{\delta c}(\Omega) = \frac{A_c}{2\pi |\Omega| (|\Omega| + \Omega_0)}.$$

Согласно (1.6.23) приближенное значение структурной функции для этого случая берем в виде

$$d_{\delta c}[0; \tau] = \Delta_{\delta c}(0, \tau) = \frac{A_c}{\Omega_b \pi} \ln(1 + \Omega_b |\tau|).$$

Спектральные плотности флуктуаций амплитуды и частоты, порождаемые флуктуациями емкости и крутизны, равны

$$S_a(\Omega) = \frac{A_c}{8\pi} \frac{\pi^2 d^2 + \Omega^2}{p^2 + \Omega^2} \frac{1}{|\Omega|(|\Omega| + \Omega_b)}, \quad S_v(\Omega) = \frac{\omega_0^2 A_c}{8\pi} \frac{1}{|\Omega|(|\Omega| + \Omega_b)}.$$

$$S_{av}^0(\Omega) = \frac{\omega_0 A_c}{8\pi} \frac{p \Pi d + \Omega^2}{p^2 + \Omega^2} \frac{1}{|\Omega|(|\Omega| + \Omega_b)},$$

$$S_{av}^1(\Omega) = -\frac{\omega_0 A_c}{8\pi} \frac{(\Pi d - p) \Omega}{(p^2 + \Omega^2)} \frac{1}{|\Omega|(|\Omega| + \Omega_b)}.$$

Отсюда находим структурную функцию флуктуации частоты

$$\Delta_v(0, \tau) = d_v[0; \tau] = \frac{\omega_0^2 A_c}{4\pi \Omega_b} \ln(1 + \Omega_b |\tau|).$$

Рассмотрим теперь такие t_0 , что $\ln \Omega_b t_0 \gg 1$, тогда на основании § 4.5 форма спектральной линии, обязанная только флуктуациям частоты, является доплеровской

$$W_{xv}(t_0, \Omega) = \frac{R_0^2}{2 \Delta \Omega(t_0)} \exp \left[-\frac{\Omega^2}{\Delta \Omega^2(t_0)/\pi} \right]$$

с шириной, равной (см. (4.5.54))

$$\Delta \Omega(t_0) = \omega_0 \sqrt{\frac{A_c}{\Omega_b} \ln \Omega_b t_0},$$

которая, как видно, возрастает с ростом t_0 чрезвычайно медленно.

Вычисляя структурные функции $d_a[0; \tau]$, $d_{av}[0; \tau]$ для больших и малых τ , найдем для $t_0 \gg 1/p, 1/\Pi d$

$$d_a[0; t_0] = \frac{\pi^2 d^2 A_c}{4\pi p^2 \Omega_b} \ln \Omega_b t_0, \quad d_{av}[0; t_0] = \frac{\pi d \omega_0 A_c}{4\pi p \Omega_b} \ln \Omega_b t_0.$$

Для $\tau \rightarrow +0$

$$d_{av}[0; \tau] = \frac{\omega_0}{4} d_{\delta c}[0; \tau] = \frac{\omega_0 A_c}{4\pi} \tau. \quad (6.4.30)$$

Легко видеть, что для структурных функций выполняется условие (6.4.24). Поэтому при изменении t_0 в таких пределах, что

$$1 \ll \ln \Omega_b t_0 \ll \frac{4\pi p^2 \Omega_b}{\pi^2 d^2 A_c}, \quad (6.4.31)$$

для пика спектральной линии генератора, согласно (4.6.39), имеем по-прежнему (6.4.25).

Обращаясь к крыльям спектральной линии для $\Delta\Omega \ll \Omega$, из (4.7.28) получаем, принимая во внимание, что, согласно (6.4.30), $T_{av} = \omega_0 A_C / 4\pi$, $\varepsilon = 1$.

$$W_x(t_0, \Omega) =$$

$$= \frac{R_0^2}{2} \left\{ \frac{A_C}{8\pi |\Omega| (|\Omega| + \Omega_B)} \frac{\omega_0^2 \Omega^2 + (\pi d\Omega + \omega_0 p)^2}{\Omega^2 (p^2 + \Omega^2)} + \frac{3d_{av}[0; t_0] \omega_0 A_C}{\pi^2 \Omega^4} \right\}.$$

Если выбрать Ω_B — частоту, на которой спектральная плотность флуктуаций емкости и крутизны переходит от пропорциональности $1/\Omega$ к пропорциональности $1/\Omega^2$ — достаточно большой, пусть, например, сравнимую с ω_0 , то для $p \ll \Omega \ll \omega_0$, Ω_B крылья спектральной линии подчиняются уравнению

$$W_x(t_0, \Omega) = \frac{R_0^2}{2} \frac{A_C (\omega_0^2 + \pi^2 d^2)}{8\pi \Omega_B |\Omega|^3}.$$

8. Рассмотрим некоторые общие черты полученных характеристик технической формы и ширины спектральной линии томсоновского автогенератора, обладающего флуктуациями емкости и крутизны.

Почти во всех случаях (кроме $m \ll 1$) форма четной части пика является доплеровской, причем несимметрия пика возрастает с возрастанием интенсивности медленной части флуктуаций емкости и крутизны. Так, при фликкерных флуктуациях несимметрия при $\gamma \gg 1$ существенно больше, чем для случая $\gamma < 1$. Это связано с увеличением амплитудных флуктуаций, ответственных за несимметрию.

Также почти во всех случаях (кроме случая $m \ll 1$) ширина технической линии $\Delta\Omega$ пропорциональна ω_0 . Это значит, что относительная ширина технической формы линии не зависит от частоты генератора, а только от интенсивности флуктуаций емкости. Так, например, мы имели

$$\delta f = \frac{\Delta\Omega}{\omega_0} = \sqrt{\frac{\pi}{2} \langle \delta C^2 \rangle}, \quad S_{\delta C}(\Omega) = \frac{\langle \delta C^2 \rangle a}{\pi (a^2 + \Omega^2)},$$

$$\delta f = 7 \sqrt{A_C}, \quad S_{\delta C}(\Omega) = \frac{A_C}{2\pi |\Omega|^{0.99}}, \quad (6.4.32)$$

$$\delta f = \delta f(t_0) = \sqrt{\frac{\pi A_C t_0^{\gamma-1}}{2\Gamma(\gamma) \sin \frac{\pi}{2} (\gamma-1)}}, \quad S_{\delta C}(\Omega) = \frac{A_C}{2\pi |\Omega|^\gamma}, \quad 1 < \gamma < 3,$$

$$\delta f = \delta f(t_0) = \sqrt{\frac{A_C}{\Omega_B} \ln \Omega_B t_0}, \quad S_{\delta C}(\Omega) = \frac{A_C}{2\pi |\Omega| (|\Omega| + \Omega_B)}.$$

Этим относительная техническая ширина спектральной линии существенно отличается от относительной естественной ширины линии, которая пропорциональна ω_0 .

9. Обратимся, наконец, к численному примеру. Рассмотрим флуктуации емкости и крутизны, порождаемые фликкерным шумом лампы. На основании (3.4.16), (3.4.10), (3.3.2) принимаем следующие значения:

$$S_{\delta c}(\Omega) = \frac{1}{10} \frac{A_{\phi}}{2\pi |\Omega|^{\gamma}}, \quad d = 10^2, \quad A_{\phi} = 10^{-14}.$$

Показателю степени γ придаем два значения: первое $\gamma = 0,99$, второе $\gamma = 1,5$.

Для $\gamma = 0,99$, поскольку $A_c = 0,1 A_{\phi} = 10^{-15}$, получаем, согласно (6.4.32), $\delta f \approx 2,2 \cdot 10^{-7}$. Форма пика спектральной линии практически имеет доплеровскую форму.

Для $\gamma = 1,5$ относительная ширина спектральной линии зависит от t_0 и равна $\delta f \approx 0,5 \cdot 10^{-7} \sqrt[4]{t_0}$. Время t_0 должно, с одной стороны, быть достаточно большим, чтобы успела сформироваться доплеровская форма спектральной линии, с другой стороны, не должно превышать некоторой величины, определяемой малостью амплитудных флуктуаций. Полагая, что $f_0 = 10^6$ гц, $\rho/\Pi = 10^{-2}$, можно с помощью (6.4.23) и (6.4.29) найти следующие границы для t_0 :

$$6 \cdot 10^3 \text{ сек} \leq t_0 \leq 25 \cdot 10^{12} \text{ сек}.$$

Если $t_0 = 10^4$ сек, то $\delta f \approx 0,5 \cdot 10^{-7}$; если $t_0 = 10^{12}$ сек, то $\delta f \approx 5 \cdot 10^{-5}$. Таким образом, хотя относительная ширина δf и зависит от t_0 , меняется она при этом очень медленно, увеличиваясь в 10 раз при изменении t_0 в 10 тысяч раз. Согласно (6.4.25) форма пика спектральной линии ($\Omega \leq \Delta\Omega$) становится заметно несимметричной лишь при достаточно больших t_0 .

§ 6.5. Параметрическое уширение спектральной линии генератора

1. В предыдущих параграфах рассматривались флуктуации амплитуды и частоты генераторов, порождаемые флуктуациями параметров, медленными по сравнению с $\cos \omega_0 t$. На практике могут быть, однако, такие случаи, когда ширина спектра флуктуаций параметров много больше ω_0 или по крайней мере сравнима с ω_0 , например, если рассматриваются флуктуации параметров в сравнительно низкочастотном генераторе. В этом случае флуктуации параметров уже нельзя считать медленными по

сравнению с $\cos \omega_0 t$ и при рассмотрении амплитудно-частотных флуктуаций это необходимо принимать во внимание.

Существование малых флуктуаций параметров у томсоновского автогенератора опять приведет нас к уравнению (6.1.7). Ограничиваясь для простоты рассмотрения одним параметром, по-прежнему будем иметь (6.1.8).

Рассмотрим подробнее функции F_0 и F_1 — функции в общем случае нелинейные по отношению к x и \dot{x} . Ранее в § 6.1 мы ограничивались их первыми гармониками, которые получались при подстановке $\tilde{x} = R_0 \cos \psi$, $\dot{\tilde{x}} = -\omega_0 R_0 \sin \psi$.

Пусть при указанной подстановке имеем в общем случае

$$F_i = R_0 \sum_n [R_{ni} \cos n\psi - T_{ni} \sin n\psi], \quad i = 0, 1, \quad (6.5.1)$$

где n — некоторые числа из натурального ряда, определяемые характером нелинейности автоколебательной системы.

Теперь мы не должны ограничиваться случаем $n=1$, так как характер флуктуаций параметра $\mu(t)$ может быть таким, что высшие гармоники F_i будут давать не меньший вклад в $E(t)$, чем основная гармоника $n=1$ (если, например, спектр $\mu(t)$ сосредоточен в области $\omega = 3\omega_0$, то необходимо учитывать члены с $n=2$, $n=4$). Заметим также, что если даже и ограничиться слагаемым $n=1$ в (6.5.1), то функции $g_c(t)$ и $g_s(t)$ все равно не будут описываться формулами (6.1.10), поскольку в этих формулах $\mu(t)$ считается медленной функцией (медленными должны быть $g_c(t)$ и $g_s(t)$), а она в нашем случае отнюдь не обязательно медленная.

На основании сказанного становится очевидным, что для составления флуктуационных уравнений автогенератора мы должны отыскать медленные функции $g_c(t)$, $g_s(t)$, определенные как

$$\begin{aligned} g_c(t) &= \frac{1}{R_0 T_0} \int_{t-T_0}^t 2\mathcal{F}(t, \tilde{x}, \dot{\tilde{x}}) \cos \psi dt, \\ g_s(t) &= -\frac{1}{R_0 T_0} \int_{t-T_0}^t 2\mathcal{F}(t, \tilde{x}, \dot{\tilde{x}}) \sin \psi dt \end{aligned} \quad (6.5.2)$$

для случая произвольного $\mu(t)$.

Объединяя (6.5.1) и (6.1.8), можем написать

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(t, \tilde{x}, \dot{\tilde{x}}) &= R_0 \sum_n \mathcal{F}_n(t, \psi), \\ \mathcal{F}_n(t, \psi) &= A_n(t) \cos n\psi - B_n(t) \sin n\psi, \end{aligned} \quad (6.5.3)$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} A_n(t) &= \begin{cases} (R_{10} - a_{00})\mu + (R_{11} - a_{01})\dot{\mu}, & n = 1, \\ R_{n0}\mu + R_{n1}\dot{\mu}, & n > 1, \end{cases} \\ B_n(t) &= T_{n0}\mu + T_{n1}\dot{\mu}, \quad n - \text{любое.} \end{aligned} \quad (6.5.4)$$

Нетрудно видеть, что функции $A_n(t)$ и $B_n(t)$ не являются в общем случае медленными. Учитывая (6.5.3), можем записать

$$g_c(t) = \sum_n g_{cn}(t), \quad g_s(t) = \sum_n g_{sn}(t), \quad (6.5.5)$$

где $g_{cn}(t)$, $g_{sn}(t)$ находятся из $\mathcal{G}_n(t, \psi)$, согласно (6.5.2),

$$\begin{aligned} g_{cn}(t) &= \frac{1}{T_0} \int_{t-T_0}^T A_n(t) [\cos(n-1)\psi + \cos(n+1)\psi] dt - \\ &\quad - \frac{1}{T_0} \int_{t-T_0}^t B_n(t) [\sin(n-1)\psi + \sin(n+1)\psi] dt, \\ g_{sn}(t) &= \frac{1}{T_0} \int_{t-T_0}^t A_n(t) [\sin(n-1)\psi - \sin(n+1)\psi] dt + \\ &\quad + \frac{1}{T_0} \int_{t-T_0}^t B_n(t) [\cos(n-1)\psi - \cos(n+1)\psi] dt. \end{aligned}$$

Если теперь ввести в рассмотрение следующие медленные по сравнению с $\cos \omega_0 t$ случайные функции, зависящие от флуктуирующих параметров:

$$\begin{aligned} A_{n\parallel}^-(t) &= \frac{2}{T_0} \int_{t-T_0}^t A_n(t) \cos(n-1)\omega_0 t dt, \\ A_{n\perp}^-(t) &= -\frac{2}{T_0} \int_{t-T_0}^t A_n(t) \sin(n-1)\omega_0 t dt, \\ A_{n\parallel}^+(t) &= \frac{2}{T_0} \int_{t-T_0}^t A_n(t) \cos(n+1)\omega_0 t dt, \\ A_{n\perp}^+(t) &= -\frac{2}{T_0} \int_{t-T_0}^t A_n(t) \sin(n+1)\omega_0 t dt \end{aligned} \quad (6.5.6)$$

и $B_{n\parallel}^-, B_{n\parallel}^+, B_{n\perp}^-, B_{n\perp}^+$, выраженные через $B_n(t)$ аналогичным образом, то нетрудно найти, что

$$\begin{aligned}
 2g_{cn}(t) = & A_{n\parallel}^-(t) \cos(n-1)\varphi + A_{n\parallel}^+(t) \cos(n+1)\varphi + \\
 & + B_{n\perp}^-(t) \cos(n-1)\varphi + B_{n\perp}^+(t) \cos(n+1)\varphi + \\
 & + A_{n\perp}^-(t) \sin(n-1)\varphi + A_{n\perp}^+(t) \sin(n+1)\varphi - \\
 & - B_{n\parallel}^-(t) \sin(n-1)\varphi - B_{n\parallel}^+(t) \sin(n+1)\varphi, \\
 2g_{sn}(t) = & -A_{n\perp}^-(t) \cos(n-1)\varphi + A_{n\parallel}^-(t) \sin(n-1)\varphi + \\
 & + A_{n\perp}^+(t) \cos(n+1)\varphi - A_{n\parallel}^+(t) \sin(n+1)\varphi + \\
 & + B_{n\parallel}^-(t) \cos(n-1)\varphi + B_{n\perp}^-(t) \sin(n-1)\varphi - \\
 & - B_{n\parallel}^+(t) \cos(n+1)\varphi - B_{n\perp}^+(t) \sin(n+1)\varphi.
 \end{aligned} \tag{6.5.7}$$

Флуктуационные уравнения на основании (6.1.12) и (6.5.5) примут вид

$$\frac{d\alpha}{dt} = -p\alpha + \frac{\omega_1}{2} \sum_n g_{sn}(t), \quad \nu = \frac{d\varphi}{dt} = -q\alpha - \frac{\omega_1}{2} \sum_n g_{cn}(t). \tag{6.5.8}$$

2. Полученными формулами фактически полностью решена задача о флуктуациях амплитуды и частоты генератора, обладающего произвольными флуктуациями параметра.

Обсудим полученные результаты и их физическое содержание. Прежде всего заметим, что флуктуационные уравнения (6.5.8) являются нелинейными по отношению к φ , в то время как (6.1.12) являются линейными. Нелинейность, как нетрудно видеть, обязана, во-первых, значениям $n > 1$, что связано с учетом высших гармоник функций F_i , и, во-вторых, для $n=1$ нелинейность имеет место, если хотя бы одна из функций $A_{1\parallel}^+(t)$, $A_{1\perp}^+(t)$, $B_{1\parallel}^+(t)$, $B_{1\perp}^+(t)$ не равна тождественно нулю. Какой смысл имеют эти функции? Рассмотрим подробнее, например,

$$A_{1\parallel}^+(t) = \frac{2}{T_0} \int_{t-T_0}^t [(R_{10} - a_{00}) \mu(t) + (R_{11} - a_{01}) \dot{\mu}(t)] \cos 2\omega_0 t \, dt.$$

Эта функция подобна функции $e_{\parallel}(t)$, определенной через $E(t)$, согласно (5.2.15), с той лишь разницей, что вместо $E(t)$ имеем $A_1(t)$, а вместо ω_0 удвоенную частоту $2\omega_0$. Следовательно, используя результаты § 5.2, можем утверждать, что спектральная плотность медленной функции $A_{1\parallel}^+(t)$ равна удвоенной спектральной плотности функции $A_1(t)$ вблизи частоты $2\omega_0$, которая в свою очередь пропорциональна спектральной плотности флук-

тулирующего параметра $\mu(t)$ вблизи частоты $2\omega_0$. Другими словами, $A_{1\parallel}^+(t) \neq 0$ в том случае, когда $S_\mu(2\omega_0) \neq 0$.

Таким образом, флуктуации параметра $\mu(t)$, обладающие ненулевой спектральной плотностью вблизи $2\omega_0$, дают вклад в амплитудные и частотные флуктуации автогенератора и могут размывать спектральную линию.

Если при этом предположить, что спектр флуктуирующего параметра сосредоточен только в районе частоты $2\omega_0$, то и в этом случае его флуктуации дадут вклад в $\alpha(t)$ и $\nu(t)$. Этот эффект свидетельствует по существу о существовании параметрического влияния флуктуаций параметра на колебания автогенератора, и соответствующее уширение спектральной линии генератора можно назвать *параметрическим уширением*. Соответствующие уравнения при этом получаются в общем случае нелинейными.

Если рассмотреть теперь функции (6.5.6) для произвольного значения $n > 1$, то очевидно, что они не будут равны тождественно нулю в том случае, если не равны нулю спектральные плотности $S_\mu([n-1]\omega_0)$, $S_\mu([n+1]\omega_0)$. Тем самым в этом случае имеет место параметрический эффект на частотах $(n-1)\omega_0$, $(n+1)\omega_0$.

Рассмотрим спектральную плотность флуктуирующего параметра $S_\mu(\omega)$, простирающуюся на достаточно высокие частоты (рис. 6.7). Заштрихованные участки соответствуют тем спектральным компонентам (ширина каждого участка в соответствии с (6.5.6) много меньше ω_0), которые как раз и приводят в общем случае к параметрическому эффекту.

Участок, покрытый точками, соответствует медленным спектральным компонентам, приводящим к обычному, непараметрическому воздействию флуктуаций параметров на автогенератор, описываемому уравнениями (6.1.12).

3. Обратимся к конкретному примеру. Предположим, что в LC-генераторе с контуром в анодной цепи имеются флуктуации емкости со спектральной плотностью $S_{\delta C}(\omega)$ типа изображенной на рис. 6.7.

Функции F_0 и F_1 были для этого примера найдены в § 6.3. Они даются формулами (6.3.6). Подставляя в эти формулы $I = R_0 \cos \psi$, нетрудно на основании (6.5.1) найти

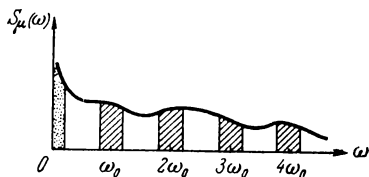


Рис. 6.7.

$$T_{10} = -Q^{-1}, \quad T_{11} = -\omega_0^{-1}, \quad T_{30} = -\frac{1}{3} \frac{p}{\omega_0}.$$

Остальные T_{ni} и все R_{ni} равны нулю. Величины a_{00} и a_{01} определяются формулами (6.3.5).

Собирая вместе все слагаемые, имеем (отбрасывая, как и ранее, член $Q^{-1}\omega_0^{-1} \frac{d}{dt} \delta C$)

$$A_1(t) = \delta C, \quad B_1(t) = -\frac{1}{\omega_0} \left[\Pi \delta C + \frac{d}{dt} \delta C \right], \quad B_3(t) = -\frac{\dot{p}}{3\omega_0} \delta C.$$

Остальные функции $A_n(t)$ и $B_n(t)$ равны тождественно нулю. Обратимся к медленным функциям, заданным выражениями (6.5.6). Особое значение имеют функции

$$A_{1\parallel}^-(t) = \frac{2}{T_0} \int_{t-T_0}^t \delta C(t) dt, \quad B_{1\parallel}^-(t) = -\frac{2}{T_0} \int_{t-T_0}^t \frac{1}{\omega_0} \left[\Pi \delta C + \frac{d}{dt} \delta C \right] dt,$$

которые равны низкочастотным частям подынтегральных выражений (эти функции фактически равны функциям $g_c(t)$ и $g_s(t)$, заданным формулами (6.3.9)).

Обозначая низкочастотную часть флуктуаций емкости значком «н» снизу, получим

$$A_{1\parallel}^-(t) = 2(\delta C)_n, \quad B_{1\parallel}^-(t) = -\frac{2}{\omega_0} \left[\Pi \delta C + \frac{d}{dt} \delta C \right]_n.$$

Остальные функции связаны со значениями спектральной плотности флуктуаций емкости на частотах $2\omega_0$ ($n=1$, $n=3$) и $4\omega_0$ ($n=3$). Собирая все вместе, получим следующие флуктуационные уравнения ($\omega_0 \approx \omega_1$):

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} = & -p\alpha + \frac{\omega_0}{2} \left\{ -\frac{1}{\omega_0} \left[\Pi \delta C + \frac{d}{dt} \delta C \right]_n + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} [A_{1\perp}^+(t) - B_{1\parallel}^+(t)] \cos 2\varphi - \frac{1}{2} [A_{1\parallel}^+(t) + B_{1\perp}^+(t)] \sin 2\varphi \right\}, \\ v = & -\frac{\omega_0}{2} \left\{ [\delta C]_n + \frac{1}{2} [A_{1\parallel}^+(t) + B_{1\perp}^+(t)] \cos 2\varphi + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} [A_{1\perp}^+(t) - B_{1\parallel}^+(t)] \sin 2\varphi + \frac{1}{2} B_{3\perp}^-(t) \cos 2\varphi - \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} B_{3\parallel}^-(t) \sin 2\varphi + \frac{1}{2} B_{3\perp}^+(t) \cos 4\varphi - \frac{1}{2} B_{3\parallel}^+(t) \sin 4\varphi \right\}. \end{aligned}$$

Эти уравнения являются нелинейными и в общем случае достаточно сложными.

Предположим для простоты, что в пределах заштрихованных участков рис. 6.7, спектральную плотность $S_\mu(\Omega)$ можно считать постоянной величиной. Тогда, согласно §§ 5.2 и 5.3, случайные функции $A(t)$ и $B(t)$, входящие в правую часть флуктуа-

ционного уравнения, можно считать дельта-коррелированными и независимыми. Применяя метод статистической эквивалентности, получим следующие упрощенные флуктуационные уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -p\alpha - \frac{1}{2} \left[\Pi \delta C + \frac{d}{dt} \delta C \right]_{\text{н}} + \frac{\omega_0}{4} [A_{1\perp}^+(t) - B_{1\parallel}^+(t)], \\ v &= -\frac{\omega_0}{2} [\delta C]_{\text{н}} - \frac{\omega_0}{4} [A_{1\parallel}^+(t) + B_{1\perp}^+(t) + B_{3\perp}^-(t) + B_{3\perp}^+(t)]. \end{aligned} \quad (6.5.9)$$

Согласно (5.3.6) и (5.2.24) спектральные плотности функций $A_{1\perp}^+(t)$ и $A_{1\parallel}^+(t)$ равны $2S_{A_1}(2\omega_0) = 2S_{\delta C}(2\omega_0)$; спектральные плотности функций $B_{1\parallel}^+(t)$, $B_{1\perp}^+(t)$ равны $2S_{B_1}(2\omega_0) = \frac{2}{\omega_0^2} [\Pi^2 + 4\omega_0^2] \times \times S_{\delta C}(2\omega_0) \approx 8S_{\delta C}(2\omega_0)$; спектральные плотности функций $B_{3\perp}^-(t)$, $B_{3\perp}^+(t)$ равны $2S_{B_3}(2\omega_0) = \frac{2p^2}{9\omega_0^2} S_{\delta C}(2\omega_0)$ и $2S_{B_3}(4\omega_0) = \frac{2p^2}{9\omega_0^2} S_{\delta C}(4\omega_0)$.

Флуктуационные уравнения (6.5.9) являются линейными, и из них легко могут быть определены все интересующие нас спектрально-корреляционные характеристики флуктуаций амплитуды и частоты автогенератора. Однако подробного анализа этих уравнений мы делать не будем, а остановимся только на ширине спектральной линии автогенератора, которая равна (при условии, что $S_{\delta C}(0) < \infty$)

$$\Delta\Omega = \frac{\pi^2\omega_0^2}{4} \left\{ S_{\delta C}(0) + \frac{5}{2} S_{\delta C}(2\omega_0) + \frac{2p^2}{9\omega_0^2} S_{\delta C}(4\omega_0) \right\}. \quad (6.5.10)$$

Эта формула наглядно показывает вклад в ширину спектральной линии генератора эффекта параметрического уширения, которому обязаны два последних слагаемых. Если спектр флуктуаций емкости таков, что $S_{\delta C}(4\omega_0) \leq S_{\delta C}(2\omega_0)$, то последним слагаемым можно пренебречь. Если $S_{\delta C}(\omega) = \text{const} = S_0$ (флуктуации емкости представляют собой белый шум), то

$$\Delta\Omega = \frac{\pi^2\omega_0^2}{4} \frac{7}{2} S_0.$$

Если ограничиться только низкочастотными флуктуациями емкости (имеющими $S_{\delta C}(\omega) = S_0$ для всех $\Omega \ll \omega_0$), то, как мы имели ранее (см. (6.4.11) и (6.4.1)) и как получается из (6.5.10),

$$\Delta\Omega = \frac{\pi^2\omega_0^2}{4} S_0.$$

Таким образом, в этом случае эффект параметрического уширения увеличивает ширину спектральной линии генератора более чем в три раза.

§ 6.6. Нестационарное воздействие фликкерного шума лампы на автогенератор

1. Выше было показано, что на автогенератор эффективно воздействуют только те шумы, спектр которых существует вблизи частоты автоколебаний ω_0 (или при учете нелинейностей вблизи ее гармоник). По этой причине фликкерный шум лампы, представляющий собой низкочастотные флуктуации анодного тока лампы, непосредственно не может оказывать воздействия на работу автогенератора.

Однако если принять во внимание, что анодный ток лампы генератора, кроме постоянной составляющей I_0 , в режиме автоколебаний имеет и переменную составляющую $I_1 \cos(\omega_0 t + \varphi)$, то фликкерный шум становится частично модулированным автоколебаниями.

Спектр модулированной части фликкерного шума расположен, как легко понять, в районе частоты автоколебаний, и поэтому модулированная часть фликкерного шума должна оказывать определенное воздействие на амплитуду и частоту автоколебаний.

Рассмотрению этого воздействия на примере конкретного автогенератора и посвящен настоящий параграф.

2. Обратимся к LC -генератору с контуром в анодной цепи. Пренебрегая его естественными шумами, а также флуктуациями параметров, вводя в рассмотрение фликкерный шум $i_\Phi(t)$ лампы, будем иметь следующие уравнения движения (обозначения соответствуют гл. 5 и рис. 5.1):

$$L \frac{dI}{dt} + rI - \frac{1}{C} \int (I_a - I + i_\Phi) dt = 0,$$

$$v = M \frac{dI}{dt}, \quad I_a = Sv(1 - \beta v^2).$$

Обозначая, как всегда, напряжение на сетке лампы v через x , получим

$$\ddot{x} + \omega_1^2 x = F(x, \dot{x}) + \omega_1^2 M \frac{di_\Phi}{dt},$$

где малая нелинейная функция $F(x, \dot{x})$ задана первой формулой (5.5.1).

Будем полагать для простоты рассмотрения, что относительные флуктуации фликкерного шума лампы $\delta i_\Phi(t)$ не зависят от величины тока, протекающего в данный момент через лампу (см. § 3.3). Тогда

$$i_\Phi(t) = I_0 \delta i_\Phi(t) + I_a \delta i_\Phi(t).$$

Второе слагаемое этой формулы есть модулированная часть фликкерного шума, поскольку I_a зависит от $v=x$. Первым слагаемым этой формулы можно пренебречь.

Таким образом, уравнение движения LC-генератора принимает вид

$$\ddot{x} + \omega_1^2 x = F(x, \dot{x}) + \omega_1^2 \mathcal{G}(t, x, \dot{x}),$$

где

$$\mathcal{G}(t, x, \dot{x}) = MS\dot{x}\delta i_\Phi(t) + MSx\frac{d}{dt}\delta i_\Phi(t).$$

Здесь мы полагали, что $I_a = Sv$, поскольку учет нелинейности лампы в $\mathcal{G}(t, x, \dot{x})$ является учетом высших порядков малостей. Полученное уравнение движения имеет вид (5.2.27). Легко видеть, что, согласно (5.2.30),

$$g_{\parallel}(t) = MSR_0 \frac{d}{dt} \delta i_\Phi(t),$$

$$g_{\perp}(t) = MSR_0 \omega_0 \delta i_\Phi(t).$$

Полагая, как и в § 5.1, что $MS \approx rC = 1/\omega_0 Q$, учитывая изохронность генератора, получим на основании (5.2.31) следующие уравнения для флуктуаций амплитуды и частоты автоколебаний:

$$\frac{d\alpha}{dt} = -p\alpha + \frac{\Pi}{2} \delta i_\Phi, \quad \frac{d\varphi}{dt} = -\frac{1}{2Q} \frac{d}{dt} \delta i_\Phi. \quad (6.6.1)$$

3. Обращаясь к первому уравнению (6.6.1), прежде всего обратим внимание на то, что оно совпадает с (6.3.14), если флуктуации δi_Φ заменить на флуктуации крутизны. Тем самым влияние нестационарности фликкерного шума на флуктуации амплитуды автоколебаний полностью эквивалентно влиянию на них флуктуаций крутизны. Этого нельзя, однако, сказать о влиянии $\delta i_\Phi(t)$ на частоту автоколебания. Как следует из п. 2 § 6.3, флуктуации крутизны никоим образом не влияли на частоту (и фазу) генератора, в то время как, согласно второму уравнению (6.6.1), флуктуации фазы колебания пропорциональны фликкерному шуму

$$\varphi(t) = \frac{1}{2Q} \delta i_\Phi(t),$$

а следовательно, существуют и флуктуации частоты.

Спектральная плотность флуктуаций частоты равна

$$S_v(\Omega) = \frac{\Omega^2}{4Q^2} S_\Phi(\Omega).$$

Ее поведение с изменением Ω зависит от характера поведения спектральной плотности фликкерного шума.

Поскольку в общем случае имеет место (3.3.2), то

$$S_{\nu}(\Omega) = \frac{|\Omega|^{2-\nu} A_{\Phi}}{8\pi Q^2}. \quad (6.6.2)$$

Если $\nu < 2$, то спектральная плотность флуктуаций частоты получается возрастающей с возрастанием частоты. Это обстоятельство, разумеется, не может иметь места для сколь угодно больших частот Ω , поскольку флуктуационные уравнения (6.6.1) справедливы только для $\Omega \ll \omega_0$.

При достаточно больших Ω спектральная плотность флуктуаций частоты, по-видимому, стремится к нулю. В этом случае вопрос о форме спектральной линии остается открытым, а ширина спектральной линии будет определяться в основном поведением $S_{\nu}(\Omega)$ при $\Omega \rightarrow 0$. Если $\nu < 1$, то ширина спектральной линии будет равна нулю; при $\nu > 1$ будет иметь место уширение спектральной линии.

Нетрудно найти асимптотическое значение $\chi(\tau)$ при достаточно больших τ , поскольку оно определяется поведением $S_{\nu}(\Omega)$ при малых Ω . Для $1 < \nu < 3$, согласно (4.5.10) и (II.21), имеем

$$\chi(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - \cos \Omega \tau}{\Omega^2} S_{\nu}(\Omega) d\Omega = \frac{A_{\Phi}}{8Q^2 \sin \frac{\pi}{2} (\nu - 1) \Gamma(\nu)} |\tau|^{\nu-1} = b |\tau|^{\nu-1}.$$

Отсюда можно получить приближенное значение ширины спектральной линии (см. (4.5.38))

$$\Delta\Omega = \pi b^{\frac{1}{\nu-1}} (\nu - 1) / \Gamma\left(\frac{1}{\nu-1}\right),$$

которое для $\nu > 1$ действительно является отличным от нуля.

Таким образом, модуляция фликкерного шума автоколебаниями приводит к уширению спектральной линии автогенератора только при нестационарном фликкерном шуме, когда $\nu > 1$.

Глава 7

ФЛУКТУАЦИИ В КВАРЦЕВЫХ ГЕНЕРАТОРАХ

Рассмотренный в предыдущих главах LC -генератор обладает одной степенью свободы. Практически часто используются автогенераторы и с большим числом степеней свободы. К таким генераторам относятся, например, двухконтурные, частным случаем которых является кварцевый автогенератор.

Кварцевый автогенератор занимает особое положение среди различных двухконтурных автогенераторов благодаря чрезвычайно высокой добротности одного из контуров (кварца). Это обстоятельство находит свое отражение в различном порядке малости правых частей уравнений движения (и флуктуационных уравнений), относящихся к кварцевому и вспомогательному контурам генератора.

Особое положение кварцевый автогенератор занимает и с точки зрения его флуктуаций. Создание кварцевого генератора преследовало цель повышения стабильности частоты генератора. Достижение этой цели обязано малости флуктуаций автоколебания в кварцевом контуре генератора. Как будет показано ниже, эта малость амплитудных и частотных флуктуаций связана в основном с высокой добротностью кварцевого контура. По этой же причине ширина спектральной линии кварцевого генератора на несколько порядков меньше по сравнению с LC -генераторами.

Флуктуации в кварцевых генераторах рассматривались в целом ряде работ (см., например, (1958, [20], 1963 [8], 1966 [4, 6, 11, 14])). Вместе с тем следует заметить, что остается практически необходимым достаточно полный и подробный анализ как естественных, так и технических флуктуаций автоколебания в различных схемах кварцевых генераторов.

В § 7.1 проводится флуктуационный анализ двухконтурного генератора общего типа. Последующие параграфы главы посвящены анализу естественных и технических флуктуаций одной конкретной схемы кварцевого автогенератора.

§ 7.1. Флуктуационные уравнения двухконтурного генератора

Прежде чем переходить непосредственно к кварцевому генератору, целесообразно провести общее рассмотрение двухконтурного генератора с шумами и получить уравнения для флуктуаций амплитуд и фаз в самом общем случае.

1. Рассмотрим автоколебательную систему с двумя степенями свободы, находящуюся под воздействием случайных сил. Пусть эта система описывается следующими уравнениями:

$$\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_1^2 x &= F(x, \dot{x}, y, \dot{y}) + \omega_1^2 E_1(t), \\ \frac{d^2y}{dt^2} + \omega_1^2 y &= H(x, \dot{x}, y, \dot{y}) + \omega_1^2 E_2(t).\end{aligned}\tag{7.1.1}$$

Здесь $E_1(t)$ и $E_2(t)$ являются достаточно малыми случайными функциями ($\langle E_1(t) \rangle = \langle E_2(t) \rangle = 0$). Функции F и H также малые по сравнению с левыми частями уравнений. Они включают в себя малые потери и малые нелинейности системы. Как уже говорилось, для кварцевого автогенератора функции F и H (а также соответственно E_1 и E_2) имеют разные порядки малости. Однако мы пока этого принимать во внимание не будем и рассмотрим систему (7.1.1) с произвольным соотношением малостей правых частей.

Будем полагать, что система уравнений (7.1.1) допускает одночастотный устойчивый режим автоколебаний с частотой, близкой к ω_1 . Нашей задачей является исследование флуктуаций амплитуды, фазы и частоты автоколебаний.

Решение уравнений (7.1.1) ищем в виде

$$y = R \cos \psi, \quad x = P \cos \psi + B \sin \psi, \quad \psi = \omega_1 t + \vartheta. \tag{7.1.2}$$

$$\dot{y} = -\omega_1 R \sin \psi, \quad \dot{x} = -\omega_1 P \sin \psi + \omega_1 B \cos \psi,$$

Здесь введены новые неизвестные переменные R , P , B , ϑ — амплитуды и фазы. Сведем уравнения (7.1.1) к четырем уравнениям первого порядка по отношению к R , P , B , ϑ . Вычисляя первые производные от x и y и принимая во внимание (7.1.2), получим первые два уравнения:

$$\begin{aligned}\dot{R} \cos \psi - \dot{\vartheta} R \sin \psi &= 0, \\ \dot{P} \cos \psi + \dot{B} \sin \psi + \dot{\vartheta} (-P \sin \psi + B \cos \psi) &= 0.\end{aligned}\tag{7.1.3}$$

Вычисляя вторые производные от x и y и подставляя их в (7.1.1), получим вторую пару уравнений

$$\begin{aligned} -\omega_1 \dot{R} \sin \psi - \omega_1 R \dot{\psi} \cos \psi &= H(P \cos \psi + B \sin \psi, \dots) + \omega_1^2 E_2(t), \\ -\omega \dot{P} \sin \psi + \omega_1 \dot{B} \cos \psi + \dot{\psi} (-P \cos \psi - B \sin \psi) \omega_1 &= \\ &= F(P \cos \psi + B \sin \psi, \dots) + \omega_1^2 E_1(t). \end{aligned} \quad (7.1.4)$$

Разрешая уравнения (7.1.3) и (7.1.4) относительно \dot{R} , \dot{P} , \dot{B} , $\dot{\psi}$, получаем:

$$\frac{dR}{dt} = -\frac{1}{\omega_1} [H(P \cos \psi + B \sin \psi, \dots) + \omega_1^2 E_2(t)] \sin \psi, \quad (7.1.5)$$

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dt} &= -\frac{1}{\omega_1} [F(P \cos \psi + B \sin \psi, \dots) + \omega_1^2 E_1(t)] \sin \psi + \\ &+ \frac{B}{R\omega_1} [H(P \cos \psi + B \sin \psi, \dots) + \omega_1^2 E_2(t)] \cos \psi, \end{aligned} \quad (7.1.6)$$

$$\begin{aligned} \frac{dB}{dt} &= \frac{1}{\omega_1} [F(P \cos \psi + B \sin \psi, \dots) + \omega_1^2 E_1(t)] \cos \psi - \\ &- \frac{P}{R\omega_1} [H(P \cos \psi + B \sin \psi, \dots) + \omega_1^2 E_2(t)] \cos \psi, \end{aligned} \quad (7.1.7)$$

$$\frac{d\psi}{dt} = -\frac{1}{R\omega_1} [H(P \cos \psi + B \sin \psi, \dots) + \omega_1^2 E_2(t)] \cos \psi. \quad (7.1.8)$$

Эти уравнения справедливы при неравенстве нулю определителя системы (7.1.3)–(7.1.4). Последний равен $R\omega_1^2$. Следовательно, уравнения (7.1.5)–(7.1.8) имеют место при $R=R(t) \neq 0$, т. е. если второй контур, описываемый вторым уравнением (7.1.1), является возбужденным. Это условие является обычным при работе двухконтурного генератора.

Если же считать, что второй контур не возбужден ($R \equiv 0$, $\dot{R} \equiv 0$), то из четырех уравнений (7.1.3)–(7.1.4) остается фактически только два, и мы по существу приходим к обычному генератору с одной степенью свободы. Тем самым, рассматривая двухконтурный автогенератор, мы полагаем, что ни при каком t амплитуда $R(t)$ не обращается в нуль.

Полученные уравнения (7.1.5)–(7.1.8) являются точными и описывают поведение любого одночастотного двухконтурного автогенератора, подверженного влиянию случайных сил.

2. Заменяем эти точные уравнения приближенными, пользуясь подробно рассмотренным в § 5.2 методом усреднения:

$$\begin{aligned}
 \frac{dR}{dt} &= -\frac{1}{2\omega_1} \Phi_H(\omega_1, R, P, B) - \frac{\omega_1}{2} a_{2s}(t), \\
 \frac{dP}{dt} &= -\frac{1}{2\omega_1} \Phi_F(\omega_1, R, P, B) + \frac{B}{2R\omega_1} \Psi_H(\omega_1, R, P, B) - \\
 &\quad - \frac{\omega_1}{2} \left[a_{1s}(t) - \frac{B}{R} a_{2c}(t) \right], \\
 \frac{dB}{dt} &= \frac{1}{2\omega_1} \Psi_F(\omega_1, R, P, B) - \frac{P}{2R\omega_1} \Psi_H(\omega_1, R, P, B) + \\
 &\quad + \frac{\omega_1}{2} \left[a_{1c}(t) - \frac{P}{R} a_{2c}(t) \right], \\
 \frac{d\vartheta}{dt} &= -\frac{1}{2R\omega_1} \Psi_H(\omega_1, R, P, B) - \frac{\omega_1}{2R} a_{2c}(t).
 \end{aligned} \tag{7.1.9}$$

Здесь обозначено (в пределах интегралов $T_1 = 2\pi/\omega_1$):

$$\begin{aligned}
 \Phi_F &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(P \cos \xi + B \sin \xi, \dots) \sin \xi \, d\xi, \\
 \Psi_F &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(P \cos \xi + B \sin \xi, \dots) \cos \xi \, d\xi, \\
 \Phi_H &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} H(P \cos \xi + B \sin \xi, \dots) \sin \xi \, d\xi, \\
 \Psi_H &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} H(P \cos \xi + B \sin \xi, \dots) \cos \xi \, d\xi, \\
 a_{1s} &= \frac{1}{T_1} \int_{t-T_1}^t 2E_1(\xi) \sin(\omega_1 \xi + \vartheta) \, d\xi, \quad a_{1c} = \frac{1}{T_1} \int_{t-T_1}^t 2E_1(\xi) \cos(\omega_1 \xi + \vartheta) \, d\xi, \\
 a_{2s} &= \frac{1}{T_1} \int_{t-T_1}^t 2E_2(\xi) \sin(\omega_1 \xi + \vartheta) \, d\xi, \quad a_{2c} = \frac{1}{T_1} \int_{t-T_1}^t 2E_2(\xi) \cos(\omega_1 \xi + \vartheta) \, d\xi.
 \end{aligned} \tag{7.1.10}$$

Разбивая амплитуды и фазу колебаний на детерминированные и флуктуационные:

$$R = R_a + \rho_1, \quad P = P_a + \rho_2, \quad B = B_a + \rho_3, \quad \vartheta = \vartheta_a + \varphi,$$

для детерминированных слагаемых имеем уравнения:

$$\begin{aligned}\frac{dR_1}{dt} &= -\frac{1}{2\omega_1} \Phi_H(\omega_1, R_d, P_d, B_d), \\ \frac{dP_d}{dt} &= -\frac{1}{2\omega_1} \Phi_F(\omega_1, R_d, P_d, B_d) + \frac{B_d}{2R_d\omega_1} \Psi_H(\omega_1, R_d, P_d, B_d), \\ \frac{dB_d}{dt} &= \frac{1}{2\omega_1} \Psi_F(\omega_1, R_d, P_d, B_d) - \frac{P_d}{2R_d\omega_1} \Psi_H(\omega_1, R_d, P_d, B_d), \\ \frac{d\vartheta_d}{dt} &= -\frac{1}{2R_d\omega_1} \Psi_H(\omega_1, R_d, P_d, B_d) \equiv \Delta\omega.\end{aligned}\quad (7.1.11)$$

$\Delta\omega$ — поправка на частоту.

Установившиеся значения детерминированных амплитуд R_0 , P_0 , B_0 и поправка на частоту $\Delta\omega_0$ находятся, как легко видеть, из уравнений:

$$\begin{aligned}\Phi_H(\omega_1, R_0, P_0, B_0) &= 0, \\ R_0\Phi_F(\omega_1, R_0, P_0, B_0) &= B_0\Psi_H(\omega_1, R_0, P_0, B_0), \\ R_0\Psi_F(\omega_1, R_0, P_0, B_0) &= P_0\Psi_H(\omega_1, R_0, P_0, B_0), \\ \Delta\omega_0 &= (\Delta\omega)_{R_0, P_0, B_0} = \left[-\frac{1}{2\omega_1 R} \Psi_H(\omega_1, R, P, B) \right]_{R_0, P_0, B_0}.\end{aligned}\quad (7.1.12)$$

Частота автоколебаний равна, следовательно, $\omega_0 = \omega_1 + \Delta\omega_0$. В этом случае $\vartheta = \Delta\omega_0 t + \varphi$, $\psi = \omega_0 t + \varphi$ и случайные функции $a(t)$ можно записать в виде

$$\begin{aligned}a_{1s} &= -e_{\perp 1} \cos \varphi + e_{\parallel 1} \sin \varphi, & a_{1c} &= e_{\parallel 1} \cos \varphi + e_{\perp 1} \sin \varphi, \\ a_{2s} &= -e_{\perp 2} \cos \varphi + e_{\parallel 2} \sin \varphi, & a_{2c} &= e_{\parallel 2} \cos \varphi + e_{\perp 2} \sin \varphi,\end{aligned}$$

где обозначено аналогично § 5.2

$$e_{\parallel 1, 2} = \frac{1}{T_0} \int_{t-T_0}^t 2E_{1, 2}(\xi) \cos \omega_0 \xi d\xi, \quad e_{\perp 1, 2} = -\frac{1}{T} \int_{t-T_0}^t 2E_{1, 2}(\xi) \sin \omega_0 \xi d\xi.$$

С учетом этих обозначений уравнения (7.1.9) примут вид

$$\begin{aligned}\frac{dR}{dt} &= -\frac{1}{2\omega_1} \Phi_H(\omega_1, R, P, B) + \frac{\omega_1}{2} (e_{\perp 2} \cos \varphi - e_{\parallel 2} \sin \varphi), \\ \frac{dP}{dt} &= -\frac{1}{2\omega_1} \Phi_F(\omega_1, R, P, B) + \frac{B}{2R\omega_1} \Psi_H(\omega_1, R, P, B) + \\ &\quad + \frac{\omega_1}{2} \left\{ \left(e_{\perp 1} + \frac{B}{R} e_{\parallel 2} \right) \cos \varphi - \left(e_{\parallel 1} - \frac{B}{R} e_{\perp 2} \right) \sin \varphi \right\}, \\ \frac{dB}{dt} &= \frac{1}{2\omega_1} \Psi_F(\omega_1, R, P, B) - \frac{P}{2R\omega_1} \Psi_H(\omega_1, R, P, B) + \\ &\quad + \frac{\omega_1}{2} \left\{ \left(e_{\parallel 1} - \frac{P}{R} e_{\parallel 2} \right) \cos \varphi + \left(e_{\perp 1} - \frac{P}{R} e_{\perp 2} \right) \sin \varphi \right\}, \\ \frac{d\varphi}{dt} + \Delta\omega &= -\frac{1}{2\omega_1 R} \Psi_H(\omega_1, R, P, B) - \frac{\omega_1}{2R} (e_{\parallel 2} \cos \varphi + e_{\perp 2} \sin \varphi).\end{aligned}\quad (7.1.13)$$

Уравнения (7.1.13) пригодны для исследования флуктуаций как в стационарном, так и в переходном режиме автогенератора. Ограничиваясь рассмотрением флуктуаций в установившемся режиме и случаем малых амплитудных флуктуаций, эти уравнения можно существенно упростить. Введем относительные амплитудные флуктуации $\alpha_1 = \rho_1/R_0$, $\alpha_2 = \rho_2/P_0$, $\alpha_3 = \rho_3/B_0$, ($\langle \alpha_1^2 \rangle$, $\langle \alpha_2^2 \rangle$, $\langle \alpha_3^2 \rangle \ll 1$). Учитывая малость поправки на частоту ($\Delta\omega \ll \omega_0$), заменим ω_1 на ω_0 . Тогда вместо (7.1.13) с учетом (7.1.12) можно получить:

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha_1}{dt} &= -p_{11}\alpha_1 - p_{12}\alpha_2 - p_{13}\alpha_3 + \frac{\omega_1}{2R_0}(e_{\perp 2} \cos \varphi - e_{\parallel 2} \sin \varphi), \\ \frac{d\alpha_2}{dt} &= -p_{21}\alpha_1 - p_{22}\alpha_2 - p_{23}\alpha_3 + \\ &\quad + \frac{\omega_1}{2P_0} \left\{ \left(e_{\perp 1} + \frac{B_0}{R_0} e_{\parallel 2} \right) \cos \varphi - \left(e_{\parallel 1} - \frac{B_0}{R_0} e_{\perp 2} \right) \sin \varphi \right\}, \quad (7.1.14) \\ \frac{d\alpha_3}{dt} &= -p_{31}\alpha_1 - p_{32}\alpha_2 - p_{33}\alpha_3 + \\ &\quad + \frac{\omega_1}{2B_0} \left\{ \left(e_{\parallel 1} - \frac{P_0}{R_0} e_{\parallel 2} \right) \cos \varphi + \left(e_{\perp 1} - \frac{P_0}{R_0} e_{\perp 2} \right) \sin \varphi \right\}, \\ \frac{d\varphi}{dt} &= -q_1\alpha_1 - q_2\alpha_2 - q_3\alpha_3 - \frac{\omega_1}{2R_0}(e_{\parallel 2} \cos \varphi + e_{\perp 2} \sin \varphi). \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} p_{11} &= \frac{1}{2\omega_1} \left(\frac{\partial \Phi_H}{\partial R} \right)_0, \quad p_{22} = \frac{1}{2\omega_1} \left(\frac{\partial \Phi_F}{\partial P} - \frac{B}{R} \frac{\partial \Psi_H}{\partial P} \right)_0, \\ p_{33} &= \frac{1}{2\omega_1} \left(\frac{P}{R} \frac{\partial \Psi_H}{\partial B} - \frac{\partial \Psi_F}{\partial B} \right)_0 \end{aligned}$$

— «прочности предельного цикла» по отношению к амплитудам R_0 , P_0 , B_0 . Коэффициенты

$$\begin{aligned} p_{12} &= \frac{P_0}{R_0} \frac{1}{2\omega_1} \left(\frac{\partial \Phi_H}{\partial P} \right)_0, \quad p_{13} = \frac{B_0}{R_0} \frac{1}{2\omega_1} \left(\frac{\partial \Phi_H}{\partial B} \right)_0, \\ p_{21} &= \frac{R_0}{P_0} \frac{1}{2\omega_1} \left[\frac{\partial \Phi_F}{\partial R} - \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{B\Psi_H}{R} \right) \right]_0, \\ p_{23} &= \frac{B_0}{P_0} \frac{1}{2\omega_1} \left[\frac{\partial \Phi_F}{\partial B} - \frac{\partial}{\partial B} \left(\frac{B\Psi_H}{P} \right) \right]_0, \quad (7.1.15) \\ p_{31} &= \frac{R_0}{B_0} \frac{1}{2\omega_1} \left[\frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{P\Psi_H}{R} \right) - \frac{\partial \Psi_F}{\partial R} \right]_0, \\ p_{32} &= \frac{P_0}{B_0} \frac{1}{2\omega_1} \left[\frac{\partial}{\partial P} \left(\frac{P\Psi_H}{R} \right) - \frac{\partial \Psi_F}{\partial P} \right]_0 \end{aligned}$$

показывают взаимосвязь амплитудных флуктуаций, а коэффициенты

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{R_0}{2\omega_1} \left[\frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{\Psi_H}{R} \right) \right]_0, & q_2 &= \frac{P_0}{2\omega_1} \left[\frac{\partial}{\partial P} \left(\frac{\Psi_H}{R} \right) \right]_0, \\ q_3 &= \frac{B_0}{2\omega_1} \left[\frac{\partial}{\partial B} \left(\frac{\Psi_H}{R} \right) \right]_0 \end{aligned} \quad (7.1.16)$$

аналогичны неизохронности автогенератора и показывают зависимость фазовых флуктуаций автоколебания от амплитудных. Нулик у скобки означает взятие производных в точках установившегося режима.

3. Рассмотрим условия устойчивости установившегося режима автоколебаний. Пусть случайные взаимодействия отсутствуют. Уравнения для флуктуаций принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha_1}{dt} &= -p_{11}\alpha_1 - p_{12}\alpha_2 - p_{13}\alpha_3, \\ \frac{d\alpha_2}{dt} &= -p_{21}\alpha_1 - p_{22}\alpha_2 - p_{23}\alpha_3, \\ \frac{d\alpha_3}{dt} &= -p_{31}\alpha_1 - p_{32}\alpha_2 - p_{33}\alpha_3, \\ \frac{d\varphi}{dt} &= -q_1\alpha_1 - q_2\alpha_2 - q_3\alpha_3. \end{aligned} \quad (7.1.17)$$

Рассмотрим сначала амплитудные отклонения. Рассматриваемое решение будет устойчиво по амплитудам, если решения первых трех уравнений (7.1.17) стремятся со временем к нулю. Это значит, что все корни характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} p_{11} + \lambda & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} + \lambda & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} + \lambda \end{vmatrix} = 0$$

должны иметь отрицательную вещественную часть. Раскрывая этот определитель, получим

$$\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0, \quad (7.1.18)$$

где

$$\begin{aligned} a_2 &= p_{11} + p_{22} + p_{33}, \\ a_1 &= \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p_{22} & p_{23} \\ p_{32} & p_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p_{11} & p_{13} \\ p_{31} & p_{33} \end{vmatrix} = P_{11} + P_{22} + P_{33}, \\ a_0 &= \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (7.1.19)$$

Здесь P_{ij} — алгебраическое дополнение элемента p_{ij} .

Согласно критерию Рауса — Гурвица все корни характеристического уравнения (7.1.18) имеют отрицательную вещественную часть в том и только в том случае, если

$$a_2 > 0, \quad a_1 > 0, \quad a_0 > 0, \quad a_2 a_1 - a_0 > 0. \quad (7.1.20)$$

Будем полагать, что для рассматриваемого установившегося режима это условие выполнено.

Что касается фазы, то со временем, согласно последнему уравнению (7.1.17), исчезает производная $d\varphi/dt$, а сама фаза может принимать, следовательно, любое постоянное значение. Как и в случае автогенератора с одной степенью свободы, мы опять имеем фазовую нечувствительность решения, которая и является причиной того, что флуктуационные силы могут увести фазу сколь угодно далеко и приводить к уширению спектральной линии автоколебания.

4. В нашем случае двухконтурного автогенератора имеется еще одно фазовое соотношение, которое представляет интерес. Это фазовый сдвиг между колебаниями первого и второго контура, между $y(t)$ и $x(t)$. Этот сдвиг в общем случае имеет регулярную постоянную часть и флуктуационную. Какими характеристиками обладает эта флуктуирующая часть разности фаз, которую мы обозначим ψ_1 ? Есть ли у нее возвращающая сила, своеобразная «прочность», которая не позволяет $\langle \psi_1^2 \rangle$ принимать сколь угодно большие значения?

Исходя из общих соображений, можно утверждать, что $\langle \psi_1^2 \rangle$ должна быть ограниченной величиной, причем достаточно малой. В самом деле, если P_0 и B_0 устойчивы, то должна быть устойчивой и разность фаз между $x(t)$ и $y(t)$. Обозначим эту разность фаз через θ . Тогда, как легко видеть, если $y = R \cos \psi$, то $x = Q \cos(\psi + \theta) = P \cos \psi + B \sin \psi$. Отсюда $\operatorname{tg} \theta = -B/P$. Устойчивым значениям B_0 , P_0 соответствует устойчивое значение θ_0 , определяемое равенством $\operatorname{tg} \theta_0 = -B_0/P_0$.

Флуктуациям амплитуд $B = B_0(1 + \alpha_3)$, $P = P_0(1 + \alpha_2)$ соответствует флуктуация фазы: $\theta = \theta_0 + \psi_1$. В силу конечности B_0 , P_0 и малости α_2 , α_3 флуктуации фазы также малы. Можно найти, что

$$\psi_1 = \frac{B_0 P_0}{P_0^2 + B_0^2} (a_2 - a_3). \quad (7.1.21)$$

Отсюда видно, что характеристики флуктуаций разности фаз между $x(t)$ и $y(t)$ совпадают с характеристиками амплитудных флуктуаций. Следовательно, для ψ_1 существует возвращающая сила и векторы \mathbf{x} , \mathbf{y} в процессе автоколебаний взаимно удерживаются (хаотически колеблясь) около сдвига фаз θ_0 , в то время как сама фаза $\varphi(t)$ может уходить под действием шумов

сколь угодно далеко (рис. 7.1). На основании (7.1.21) для ψ_1 можно вычислить все необходимые статистические характеристики.

5. Обратимся теперь к случаю, когда случайные силы, воздействующие на двухконтурный генератор, зависят от переменных x и y и их производных:

$$\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_1^2 x &= F(x, \dot{x}, y, \dot{y}) + \omega_1^2 \mathcal{G}_1(t, x, \dot{x}, y, \dot{y}), \\ \frac{d^2y}{dt^2} + \omega_1^2 y &= H(x, \dot{x}, y, \dot{y}) + \omega_1^2 \mathcal{G}_2(t, x, \dot{x}, y, \dot{y}).\end{aligned}\quad (7.1.22)$$

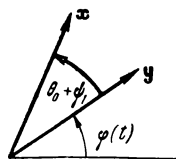


Рис. 7.1.

Такой вид правых частей может быть, например, при существовании в автогенераторе малых флуктуаций параметров.

Флуктуационные уравнения, соответствующие (7.1.22), можно получить методом, аналогичным методу, примененному в п. 4 § 5.2. Пренебрегая членами высших порядков малости, в \mathcal{G}_1 и \mathcal{G}_2 подставляем

$$\begin{aligned}\tilde{y} &= R_0 \cos(\omega_0 t + \varphi), & \tilde{x} &= P_0 \cos(\omega_0 t + \varphi) + B_0 \sin(\omega_0 t + \varphi), \\ \dot{\tilde{y}} &= -\omega_0 R_0 \sin(\omega_0 t + \varphi), & \dot{\tilde{x}} &= -\omega_0 P_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) + \omega_0 B_0 \cos(\omega_0 t + \varphi).\end{aligned}$$

Выделяя первую гармонику или спектральные компоненты, расположенные вблизи частоты ω_0 , имеем

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_1(t, \tilde{x}, \dot{\tilde{x}}, \tilde{y}, \dot{\tilde{y}}) &= g_{\parallel 1}(t) \cos(\omega_0 t + \varphi) - g_{\perp 1}(t) \sin(\omega_0 t + \varphi), \\ \mathcal{G}_2(t, \tilde{x}, \dot{\tilde{x}}, \tilde{y}, \dot{\tilde{y}}) &= g_{\parallel 2}(t) \cos(\omega_0 t + \varphi) - g_{\perp 2}(t) \sin(\omega_0 t + \varphi),\end{aligned}\quad (7.1.23)$$

где $g_{\parallel 1}(t)$, $g_{\perp 1}(t)$, $g_{\parallel 2}(t)$, $g_{\perp 2}(t)$ суть функции, медленные по сравнению с $\cos \omega_0 t$.

Подставляя (7.1.23) вместо функций $E_1(t)$, $E_2(t)$ в (7.1.10), нетрудно найти:

$$\begin{aligned}a_{1c}(t) &= g_{\parallel 1}(t), & a_{1s}(t) &= -g_{\perp 1}(t), \\ a_{2c}(t) &= g_{\parallel 2}(t), & a_{2s}(t) &= -g_{\perp 2}(t).\end{aligned}$$

Тем самым вместо (7.1.14) имеем следующие линейные флуктуационные уравнения, соответствующие (7.1.22):

$$\begin{aligned}\frac{d\alpha_1}{dt} &= -p_{11}\alpha_1 - p_{12}\alpha_2 - p_{13}\alpha_3 + \frac{\omega_1}{2R_0} g_{\perp 2}(t), \\ \frac{d\alpha_2}{dt} &= -p_{21}\alpha_1 - p_{22}\alpha_2 - p_{23}\alpha_3 + \frac{\omega_1}{2P_0} \left[g_{\perp 1}(t) + \frac{B_0}{R_0} g_{\parallel 2}(t) \right], \\ \frac{d\alpha_3}{dt} &= -p_{31}\alpha_1 - p_{32}\alpha_2 - p_{33}\alpha_3 + \frac{\omega_1}{2B_0} \left[g_{\parallel 1}(t) - \frac{P_0}{R_0} g_{\parallel 2}(t) \right], \\ \frac{d\varphi}{dt} &= -q_1\alpha_1 - q_2\alpha_2 - q_3\alpha_3 - \frac{\omega_1}{2R_0} g_{\parallel 2}(t).\end{aligned}\quad (7.1.24)$$

§ 7.2. Естественные флуктуации в кварцевом автогенераторе

1. Рассмотрим принципиальную схему кварцевого генератора, изображенную на рис. 7.2. Индуктивность L , емкость C и сопротивление r образуют анодный контур, а L_k , C_k , r_k — кварцевый. Источники тепловых шумов в контурах представлены случайными ЭДС \mathcal{E}_T и $\mathcal{E}_{T.k}$. Случайный ток $i_{др}$ представляет дробовой шум лампы. Остальные обозначения ясны из рисунка.

Обозначая через x и y напряжения на конденсаторах C и C_c , нетрудно записать следующие уравнения движения кварцевого генератора:

$$\begin{aligned} I_k + I_c &= I, \quad I + I_a + i_{др} + I_1 + I_2 = 0, \\ LI_2 + rI_2 - \frac{1}{C} \int I_1 dt &= -\mathcal{E}_T, \\ L_k I_k + \frac{1}{C_k} \int I_k dt + r_k I_k - \frac{1}{C_c} \int I_c dt &= -\mathcal{E}_{T.k}, \quad (7.2.1) \\ I_a &= Sy(1 - \beta_0 y^2), \quad I'_a = I_a + i_{др}, \\ y &= \frac{1}{C_c} \int I_c dt, \quad x = \frac{1}{C} \int I_1 dt, \quad x - y = \frac{1}{C_1} \int I dt. \end{aligned}$$

Из этих выражений после несложных преобразований получаем для x и y следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \frac{r}{L} \dot{x} + \frac{x}{L(C+C_1)} &= \\ = \frac{C_1}{C+C_1} \ddot{y} + \frac{rC_1}{L(C+C_1)} \dot{y} - \frac{r}{L(C+C_1)} I'_a - \frac{1}{(C+C_1)} \dot{I}'_a + \frac{\mathcal{E}_T}{L(C+C_1)}, \\ \ddot{y} + \frac{r}{L} \dot{y} + \frac{C_1+C_k+C_c}{(C_1+C_c)C_kL_k} y &= \\ = \frac{C_1}{C_1+C_c} \ddot{x} + \frac{r_kC_1}{L_k(C_c+C_1)} \dot{x} + \frac{C_1}{C_kL_k(C_1+C_c)} x + \frac{\mathcal{E}_{T.k}}{L_k(C_1+C_c)}. \end{aligned}$$

Введем далее следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \omega_1^2 &= \frac{1}{L_k} \left(\frac{1}{C_k} + \frac{1}{C_1+C_c} \right), \quad \omega_k^2 = \frac{1}{C_kL_k}, \quad \omega_a^2 = \frac{1}{L(C+C_1)}, \\ s_1 &= \frac{C_1}{C+C_1}, \quad s_2 = \frac{C_1}{C_c+C_1}, \quad h_k = \frac{C_k}{C_k+C_1+C_c}, \\ \frac{r_k}{L_k} &= \frac{\omega_1}{Q_k}, \quad \frac{r}{L} = \frac{\omega_1}{Q_a} = \Pi_a. \end{aligned}$$

Тогда уравнения принимают следующий вид:

$$\ddot{x} + \omega_a^2 x = -\Pi_a \dot{x} + s_1 \ddot{y} + s_1 \Pi_a \dot{y} - \frac{\dot{I}_a'}{C + C_1} - r \omega_a^2 I_a' + \omega_a^2 \mathcal{E}_T, \quad (7.2.2)$$

$$\ddot{y} + \omega_1^2 y = -\frac{\omega_1}{Q_K} \dot{y} + s_2 \ddot{x} + s_2 \frac{\omega_1}{Q_K} \dot{x} + s_2 \omega_K^2 x + \omega_1^2 h_K \mathcal{E}_{T, K}.$$

Рассмотрим порядки малостей членов, входящих в правые части полученных уравнений. Частоты ω_1 и ω_K есть частоты параллельного и последовательного резонанса кварцевого контура.

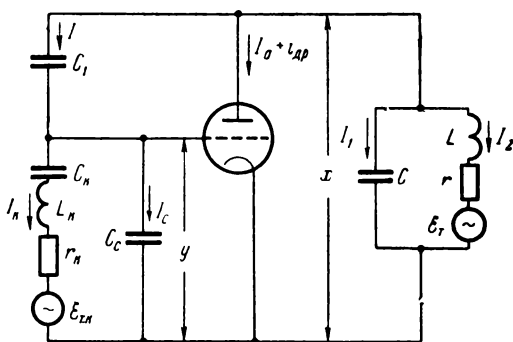


Рис. 7.2.

Частота ω_a — частота анодного контура. Все эти три частоты достаточно близки друг к другу, и разности между ними имеют порядок полосы анодного контура Π_a . Выберем за параметр малости $\mu = Q_a^{-1}$ и будем оценивать все члены правых частей по отношению к x (или, вернее, по отношению к R_0). Величина $h_K = (\omega_1^2 - \omega_K^2)/\omega_1^2$ есть по существу расстройка между ω_1 и ω_K и она, следовательно, имеет порядок малости μ . В кварцевом генераторе добротность кварцевого контура намного выше добротности вспомогательного контура ($Q_K \gg Q_a$), поэтому $1/Q_K \sim \mu^2$. Кроме того, для нормальной работы автогенератора связь высокодобротного контура с лампой должна быть тем меньше, чем выше добротность этого контура. Поэтому коэффициенты связи s_1 и s_2 должны иметь порядок μ . Анализируя теперь правую часть первого из уравнений (7.2.2), видим, что большинство членов (не рассматривая случайные силы) имеет порядок малости μ , и поэтому члены, обладающие высшим порядком малости, $s_1 \Pi_a \dot{y}$ и $r \omega_a^2 I_a'$ могут быть отброшены. Первое уравнение

принимает тогда вид

$$\ddot{x} + \omega_a^2 x = -\Pi_a \dot{x} + s_1 \ddot{y} - \frac{S}{C+C_1} \dot{y} + \\ + \frac{3S}{C+C_1} \beta_0 y^2 \dot{y} - \frac{1}{C+C_1} \frac{d}{dt} i_{\text{ап}} + \omega_a^2 \mathcal{E}_{\tau}.$$

Отбрасывая в правой части второго уравнения член $s_2 \frac{\omega_1}{Q_k} \dot{x}$ (имеющий порядок малости μ^3), видим, что она имеет порядок малости μ^2 (поскольку $\ddot{x} + \omega_k^2 x \sim \mu$). Поэтому второе уравнение принимает вид

$$\ddot{y} + \omega_1^2 y = -\frac{\omega_1}{Q_k} \dot{y} + s_2 (\ddot{x} + \omega_k^2 x) + \omega_1^2 h_k \mathcal{E}_{\tau, \kappa}.$$

Поскольку \ddot{y} отличается от $\omega_1^2 y$ на величину порядка μ^2 , то в первом уравнении вместо \ddot{y} можно взять $\omega_1^2 y$. Введя расстройку между кварцевым и анодным контуром h_a соотношением $h_a = (\omega_1^2 - \omega_a^2)/\omega_1^2$, первое уравнение запишем в следующем окончательном виде:

$$\ddot{x} + \omega_1^2 x = h_a \omega_1^2 x - \Pi_a \dot{x} - s_1 \omega_1^2 y - \frac{S}{C+C_1} \dot{y} (1 - 3\beta_0 y^2) - \\ - \frac{1}{C+C_1} \frac{d}{dt} i_{\text{ап}} + \omega_a^2 \mathcal{E}_{\tau}. \quad (7.2.3)$$

Уравнение для y с учетом (7.2.3) можно привести к следующему окончательному виду:

$$\ddot{y} + \omega_1^2 y = s_2 (h_a - h_k) \omega_1^2 x - \frac{\omega_1}{Q_k} \dot{y} - s_2 \Pi_a \dot{x} - s_1 s_2 \omega_1^2 y - \\ - \frac{S s_2}{C+C_1} \dot{y} (1 - 3\beta_0 y^2) + \omega_1^2 h_k \mathcal{E}_{\tau, \kappa} + s_2 \omega_a^2 \mathcal{E}_{\tau} - \frac{s_2}{C+C_1} \frac{d}{dt} i_{\text{ап}}. \quad (7.2.4)$$

Полученные два уравнения (7.2.3), (7.2.4) полностью совпадают с (7.1.1), если ввести обозначения

$$F(x, \dot{x}, y, \dot{y}) = h_a \omega_1^2 x - \Pi_a \dot{x} - s_1 \omega_1^2 y - \frac{S}{C+C_1} \dot{y} (1 - 3\beta_0 y^2), \quad (7.2.5)$$

$$H(x, \dot{x}, y, \dot{y}) = -\frac{\omega_1}{Q_k} \dot{y} + s_2 F(x, \dot{x}, y, \dot{y}) - s_2 \omega_1^2 h_k x$$

и

$$E_1(t) = -\frac{1}{\omega_1^2 (C+C_1)} \frac{\partial i_{\text{ап}}}{\partial t} + \frac{\omega_a^2}{\omega_1^2} \mathcal{E}_{\tau}, \quad (7.2.6)$$

$$E_2(t) = h_k^2 \mathcal{E}_{\tau, \kappa} + s_2 \frac{\omega_a^2}{\omega_1^2} \mathcal{E}_{\tau} - \frac{s_2}{\omega_1^2 (C+C_1)} \frac{\partial i_{\text{ап}}}{\partial t} = h_k \mathcal{E}_{\tau, \kappa} + s_2 E_1.$$

Таким образом, мы получили, что $F(x, \dot{x}, y, \dot{y})$ имеет порядок $\omega_1^2 \mu$, а $H(x, \dot{x}, y, \dot{y})$ — порядок $\omega_1^2 \mu^2$, что и отражает характерные особенности кварцевого автогенератора.

Малые случайные воздействия на автогенератор E_1 и E_2 являются по существу возмущениями, и поэтому их малость должна быть на порядок выше малости функций F и H (1955 [5], 1961 [15]). Поэтому если $E_1 \sim \mu^2$, то E_2 должна быть $\sim \mu^3$. Как видно из (7.2.6), это условие действительно выполняется.

2. В предыдущем параграфе мы получили флуктуационные уравнения для общего случая двухконтурного автогенератора с произвольным соотношением малости F и H . Распространим теперь эти результаты на случай кварцевого автогенератора, когда $F \sim \omega_1^2 \mu$, а $H \sim \omega_1^2 \mu^2$.

Предположим, что функции $\Phi_H, \Phi_F, \Psi_H, \Psi_F$ не равны тождественно нулю. Тогда установившиеся значения детерминированных амплитуд R_0, P_0, B_0 , согласно (7.1.12), найдутся в первом приближении из уравнений:

$$\begin{aligned}\Phi_H(\omega_1, R_0, P_0, B_0) &= 0, \\ \Phi_F(\omega_1, R_0, P_0, B_0) &= 0, \\ \Psi_F(\omega_1, R_0, P_0, B_0) &= 0.\end{aligned}\quad (7.2.7)$$

Поправка на частоту будет существовать во втором порядке малости:

$$\Delta\omega_0 = -\frac{1}{2\omega_1 R_0} \Psi_H(\omega_1, R_0, P_0, B_0), \quad (7.2.8)$$

что является характерной чертой кварцевого автогенератора [89].

Обращаясь к флуктуационным уравнениям (7.1.14), учитывая малость E_2 по сравнению с E_1 , будем иметь:

$$\begin{aligned}\frac{d\alpha_1}{dt} &= -p_{11}\alpha_1 - p_{12}\alpha_2 - p_{13}\alpha_3 + \frac{\omega_1}{2R_0}(e_{\perp 2} \cos \varphi - e_{\parallel 2} \sin \varphi), \\ \frac{d\alpha_2}{dt} &= -p_{21}\alpha_1 - p_{22}\alpha_2 - p_{23}\alpha_3 + \frac{\omega_1}{2P_0}(e_{\perp 1} \cos \varphi - e_{\parallel 1} \sin \varphi), \\ \frac{d\alpha_3}{dt} &= -p_{31}\alpha_1 - p_{32}\alpha_2 - p_{33}\alpha_3 + \frac{\omega_1}{2B_0}(e_{\parallel 1} \cos \varphi + e_{\perp 1} \sin \varphi), \\ \frac{d\varphi}{dt} &= -q_1\alpha_1 - q_2\alpha_2 - q_3\alpha_3 - \frac{\omega_1}{2R_0}(e_{\parallel 2} \cos \varphi + e_{\perp 2} \sin \varphi),\end{aligned}\quad (7.2.9)$$

где $p_{11}, p_{12}, p_{13}, q_1, q_2, q_3$ сохраняют прежние значения (7.1.15), (7.1.16), а остальные p_{ij} даются формулами:

$$\begin{aligned}p_{22} &= \frac{1}{2\omega_1} \left(\frac{\partial \Phi_F}{\partial P} \right)_0, & p_{33} &= -\frac{1}{2\omega_1} \left(\frac{\partial \Psi_F}{\partial B} \right)_0, \\ p_{21} &= \frac{R_0}{P_0} \frac{1}{2\omega_1} \left(\frac{\partial \Phi_F}{\partial R} \right)_0, & p_{23} &= \frac{B_0}{P_0} \frac{1}{2\omega_1} \left(\frac{\partial \Phi_F}{\partial B} \right)_0, \\ p_{31} &= -\frac{R_0}{B_0} \frac{1}{2\omega_1} \left(\frac{\partial \Psi_F}{\partial R} \right)_0, & p_{32} &= -\frac{P_0}{B_0} \frac{1}{2\omega_1} \left(\frac{\partial \Psi_F}{\partial P} \right)_0.\end{aligned}\quad (7.2.10)$$

Эти формулы, разумеется, верны только в том случае, если входящие в них производные в точках R_0 , P_0 , B_0 отличны от нуля. В противном случае следует учитывать другие члены согласно (7.1.15).

Нетрудно видеть, что сохранившие свое прежнее значение величины ρ_{11} , ρ_{12} , ρ_{13} , q_1 , q_2 , q_3 имеют порядок малости $\omega_1 \mu^2$, в то время как остальные $\rho_{ij} \sim \omega_1 \mu$. Это приводит к тому, что первое и последнее уравнения в (7.2.9) имеют более высокий порядок малости по сравнению со вторым и третьим. Это значит, в свою очередь, что фазовые флуктуации кварцевого автогенератора существуют лишь во втором приближении по сравнению с обычным автогенератором. Это уже сразу показывает, что ширина спектральной линии кварцевого автогенератора меньше, нежели для обычного автогенератора.

Амплитудные флуктуации кварцевого контура также существуют только во втором порядке малости и в силу малости ρ_{11} , ρ_{12} , ρ_{13} являются медленными (узкополосными) по сравнению с амплитудными флуктуациями анодного контура.

3. Проведем теперь конкретный расчет динамических характеристик и устойчивости автоколебаний применительно к рассматриваемой схеме кварцевого автогенератора (рис. 7.2).

На основании формул (7.2.5) и (7.1.10) нетрудно найти:

$$\begin{aligned}\Phi_F &= \omega_1^2 \left[h_a B + Q_a^{-1} P + l R \left(1 - \frac{3}{4} \beta_0 R^2 \right) \right], \\ \Psi_F &= \omega_1^2 \left[h_a P - Q_a^{-1} B - s_1 R \right], \\ \Phi_H &= s_2 \Phi_F + \omega_1^2 \left[-s_2 h_k B + Q_k^{-1} R \right], \\ \Psi_H &= s_2 \Psi_F + \omega_1^2 \left[-s_2 h_k P \right],\end{aligned}\tag{7.2.11}$$

где

$$l = S / \omega_1 (C + C_1).$$

Подставляя эти значения в (7.2.7) и (7.2.8), получим следующие уравнения для стационарных амплитуд:

$$\begin{aligned}h_a B_0 + Q_a^{-1} P_0 + l R_0 \left(1 - \frac{3}{4} \beta_0 R_0^2 \right) &= 0, \\ h_a P_0 - Q_a^{-1} B_0 - s_1 R_0 &= 0, \\ -s_2 h_k B_0 + Q_k^{-1} R_0 &= 0\end{aligned}\tag{7.2.12}$$

и выражение для поправки на частоту

$$\Delta \omega_0 = \omega_1 \frac{s_2 h_k}{2} \frac{P_0}{R_0}.$$

Из двух последних уравнений можно найти

$$B_0 = \frac{R_0}{s_2 h_k Q_k} \equiv \frac{R_0}{g_2}, \quad P_0 = \frac{\lambda_0}{s_2 h_a h_k Q_k} R_0 \equiv \frac{R_0}{g_1},$$

где

$$\lambda_0 = s_1 s_2 h_k Q_k + Q_a^{-1}.$$

Отсюда поправка на частоту равна

$$\Delta\omega_0 = \frac{\omega_1}{2} \frac{\lambda_0}{Q_k h_a} = \frac{\omega_1}{2} \left[s_1 s_2 \frac{h_k}{h_a} + \frac{1}{Q_k Q_a h_a} \right]. \quad (7.2.13)$$

Как легко видеть, она действительно имеет второй порядок малости.

Подставляя B_0 и P_0 в первое уравнение (7.1.12), для R_0^2 получаем

$$\frac{3l}{4} \beta_0 R_0^2 = l + \frac{h_a}{s_2 Q_k h_k} + \frac{\lambda_0}{s_2 h_a h_k Q_a Q_k}. \quad (7.2.14)$$

Рассмотрим условие устойчивости установившихся значений амплитуд. Для этого, согласно § 7.1, вычисляем коэффициенты p_{ij} :

$$\begin{aligned} p_{11} &= \frac{\omega_1}{2} \left[Q_k^{-1} + s_2 l \left(1 - \frac{9}{4} \beta_0 R_0^2 \right) \right] = \\ &= \frac{\omega_1}{2} \left[Q_k^{-1} - s_2 \left(2l + \frac{3h_a}{g_2} + \frac{3}{Q_a g_1} \right) \right], \\ p_{12} &= \frac{\omega_1}{2} \frac{s_2}{g_1 Q_a} = \frac{\omega_1}{2} \frac{\lambda_0}{h_a h_k Q_a Q_k}, \quad p_{13} = \frac{\omega_1}{2} \frac{h_a - h_k}{h_k Q_k} = \frac{\omega_1}{2} \frac{s_2 (h_a - h_k)}{g_2}, \\ &\quad (7.2.15) \end{aligned}$$

$$p_{22} = p_{33} = \frac{\omega_1}{2} \frac{1}{Q_a}, \quad p_{21} = \frac{\omega_1}{2} l \left(1 - \frac{9}{4} \beta_0 R_0^2 \right) g_1,$$

$$p_{23} = \frac{\omega_1}{2} \frac{h_a^2}{\lambda_0}, \quad p_{31} = \frac{\omega_1}{2} s_1 g_2, \quad p_{32} = -\frac{\omega_1}{2} \lambda_0.$$

С учетом порядка малости коэффициентов p_{ij} , отбрасывая члены высшего порядка малости, находим коэффициенты a_2 , a_1 , a_0 характеристического уравнения (7.1.18), выражаемые через p_{ij} формулами (7.1.19). Вводя частоты $\Omega_a = \frac{\omega_1}{2} h_a$ и $\Omega_0^2 = \Omega_a^2 + \frac{1}{4} \Pi_a^2$ получим

$$a_2 = \Pi_a, \quad a_1 = \Omega_0^2, \quad (7.2.16)$$

$$(a_0 = \frac{\omega_1^3}{8} \left\{ Q_k^{-1} [Q_a^{-2} + h_a^2] + s_1 s_2 h_k Q_a^{-1} + s_2 h_a h_k l \left(1 - \frac{9}{4} \beta_0 R_0^2 \right) \right\}).$$

Анализируя условия устойчивости (7.1.20), нетрудно видеть, что первое, второе и четвертое условия выполняются. Третье условие принимает вид

$$\{Q_{\kappa}^{-1} [Q_a^{-2} + h_a^2] + s_1 s_2 h_{\kappa} Q_a^{-1}\} + s_2 h_a h_{\kappa} l \left(1 - \frac{9}{4} \beta_0 R_0^2\right) > 0.$$

Из формулы (7.2.14) можно найти

$$\{Q_{\kappa}^{-1} [Q_a^{-2} + h_a^2] + s_1 s_2 h_{\kappa} Q_a^{-1}\} = s_2 h_a h_{\kappa} l \left(\frac{3}{4} \beta_0 R_0^2 - 1\right).$$

Подставляя полученное значение фигурной скобки в предыдущее неравенство, получим следующий вид третьего условия устойчивости:

$$\frac{3}{2} \beta_0 R_0^2 s_2 h_a h_{\kappa} l < 0.$$

Так как β_0 , s_2 , h_{κ} , l положительны, то условие устойчивости принимает вид

$$h_a = \frac{\omega_1^2 - \omega_a^2}{\omega_1^2} < 0.$$

Это значит, что устойчивые автоколебания кварцевого генератора возможны только в том случае, если собственная частота анодного контура выше собственной частоты сеточного контура — кварца.

С другой стороны, с помощью (7.2.14) легко определить тот интервал отрицательных значений h_a , где $R_0^2 > 0$, т. е. где существуют автоколебания.

На рис. 7.3 показана зависимость $\frac{3}{4} l \beta_0 R_0^2$ от h_a . Жирной линией показаны устойчивые значения амплитуды автоколебания кварцевого контура. Пунктирной линией показана асимптота $\frac{3}{4} l \beta_0 R_0^2 = l + \frac{h_a}{s_2 h_{\kappa} Q_{\kappa}}$. Устойчивость автоколебаний имеет место при $h_{a1} < h_a < h_{a2}$. Граничные значения h_{a1} , h_{a2} являются корнями уравнения

$$l + \frac{h_a}{s_2 Q_{\kappa} h_{\kappa}} + \frac{\lambda_0}{s_2 h_{\kappa} Q_a Q_{\kappa} h_a} = 0.$$

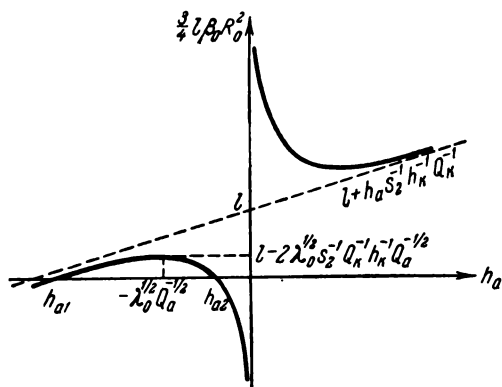


Рис. 7.3.

Для того чтобы это уравнение имело отрицательные вещественные корни, необходимо, чтобы

$$\frac{l^2 s_2^2 h_k^2 Q_k^2}{4} > \frac{s_1 s_2 h_k Q_k + Q_a^{-1}}{Q_a} \quad \text{или} \quad l > \frac{2\sqrt{\lambda_0}}{s_2 Q_k h_k \sqrt{Q_a}}.$$

Это условие, являясь условием существования не равного нулю интервала расстройек $[h_{a1}, h_{a2}]$, является по существу условием самовозбуждения кварцевого автогенератора.

На рис. 7.4 показана зависимость частоты автоколебаний генератора ω_0 от расстройки h_a :

$$\omega_0 = \omega_1 + \Delta\omega_0 = \omega_1 \left[1 + \frac{\lambda_0}{2Q_k h_a} \right].$$

Жирной кривой показана часть зависимости, соответствующая устойчивым автоколебаниям.

4. Мы рассмотрели динамические характеристики кварцевого автогенератора; перейдем теперь к флуктуационным уравнениям. Принимая во внимание, что

$$E_2 = h_k \mathcal{E}_{\tau, k} + s_2 E_1,$$

компоненты $e_{\parallel 2}(t)$ и $e_{\perp 2}(t)$ можно записать в следующем виде:

$$e_{\parallel 2} = h_k e_{\parallel k} + s_2 e_{\parallel 1}, \quad e_{\perp 2} = h_k e_{\perp k} + s_2 e_{\perp 1}.$$

Здесь функции $e_{\parallel k}(t)$, $e_{\perp k}(t)$ связаны с $\mathcal{E}_{\tau, k}(t)$ аналогично (5.2.15).

Поскольку $\mathcal{E}_{\tau}(t)$, $\mathcal{E}_{\tau, k}(t)$ и $i_{др}(t)$ являются дельта-коррелированными, взаимно независимыми случайными процессами, то, согласно § 5.3, случайные функции $e_{\parallel 1}(t)$, $e_{\perp 1}(t)$, $e_{\parallel k}(t)$, $e_{\perp k}(t)$, входящие в правую часть (7.2.9), также можно считать дельта-коррелированными и взаимно независимыми. Это обстоятельство дает основание применить для решения (7.2.9) метод уравнения ЭФП.

С другой стороны, методами, развитыми в § 1.9, можно показать, что в первом приближении нелинейные уравнения (7.2.9)

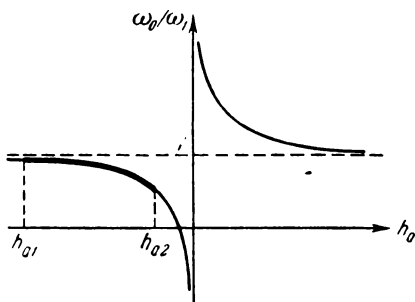


Рис. 7.4.

статистически эквивалентны следующим линейным уравнениям:

$$\begin{aligned}\frac{d\alpha_1}{dt} &= -p_{11}\alpha_1 - p_{12}\alpha_2 - p_{13}\alpha_3 + \dot{f}_1, \\ \frac{d\alpha_2}{dt} &= -p_{21}\alpha_1 - p_{22}\alpha_2 - p_{23}\alpha_3 + \dot{f}_2, \\ \frac{d\alpha_3}{dt} &= -p_{31}\alpha_1 - p_{32}\alpha_2 - p_{33}\alpha_3 + \dot{f}_3, \\ \frac{d\varphi}{dt} &= -q_1\alpha_1 - q_2\alpha_2 - q_3\alpha_3 + \dot{f}_4,\end{aligned}\tag{7.2.17}$$

где для краткости последующих формул введены обозначения:

$$\begin{aligned}\dot{f}_1 &= \dot{f}_1(t) = \frac{\omega_1}{2R_0} (h_{\kappa} e_{\perp\kappa} + s_2 e_{\perp 1}), \\ \dot{f}_2 &= \dot{f}_2(t) = \frac{\omega_1}{2P_0} e_{\perp 1}, \\ \dot{f}_3 &= \dot{f}_3(t) = \frac{\omega_1}{2B_0} e_{\parallel 1}, \\ \dot{f}_4 &= \dot{f}_4(t) = \frac{\omega_1}{2R_0} (h_{\kappa} e_{\parallel\kappa} + s_2 e_{\parallel 1}).\end{aligned}\tag{7.2.18}$$

Полученные уравнения позволяют теперь непосредственно, без обращения к методу уравнения ЭФП, получить интересные нас спектрально-корреляционные характеристики амплитудных и частотных флуктуаций кварцевого генератора.

На основании (2.4.1)–(2.4.5) разделенные дифференциальные уравнения для α_i имеют вид

$$\frac{d^3\alpha_i}{dt^3} + a_2 \frac{d^2\alpha_i}{dt^2} + a_1 \frac{d\alpha_i}{dt} + a_0\alpha_i = F_i, \quad i = 1, 2, 3, \tag{7.2.19}$$

где коэффициенты a_i даны формулами (7.2.16). Правые части этих уравнений равны:

$$\begin{aligned}F_1 &= \frac{d^2\dot{f}_1}{dt^2} + \frac{d}{dt} [(p_{22} + p_{33})\dot{f}_1 - p_{12}\dot{f}_2 - p_{13}\dot{f}_3] + P_{11}\dot{f}_1 + P_{21}\dot{f}_2 + P_{31}\dot{f}_3, \\ F_2 &= \frac{d^2\dot{f}_2}{dt^2} + \frac{d}{dt} [(p_{11} + p_{33})\dot{f}_2 - p_{21}\dot{f}_1 - p_{23}\dot{f}_3] + P_{12}\dot{f}_1 + P_{22}\dot{f}_2 + P_{32}\dot{f}_3, \\ F_3 &= \frac{d^2\dot{f}_3}{dt^2} + \frac{d}{dt} [(p_{11} + p_{22})\dot{f}_3 - p_{31}\dot{f}_1 - p_{32}\dot{f}_2] + P_{13}\dot{f}_1 + P_{23}\dot{f}_2 + P_{33}\dot{f}_3,\end{aligned}\tag{7.2.20}$$

где \dot{f}_i даются формулами (7.2.18).

Рассмотрим корни характеристического уравнения

$$\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0.$$

Введем безразмерную величину $\kappa = 2\lambda/\omega_1$; тогда характеристическое уравнение примет вид

$$\kappa^3 + b_2\kappa^2 + b_1\kappa + b_0 = 0, \quad (7.2.21)$$

где

$$b_2 = \frac{2}{Q_a} \sim \mu, \quad b_1 = \frac{1}{Q_a^2} + h_a^2 \sim \mu^2,$$

$$b_0 = \frac{1}{Q_\kappa} \left[\frac{1}{Q_a^2} + h_a^2 \right] + \frac{s_1 s_2 h_\kappa}{Q_a} + s_2 h_a h_\kappa l \left(1 - \frac{9}{4} \beta_0 R_0^2 \right) \sim \mu^4.$$

Разный порядок малости коэффициентов b_i позволяет легко найти приближенные значения корней характеристического уравнения.

Первый корень имеет порядок малости μ^2 и находится из уравнения (полученного из (7.2.21) при отбрасывании членов высшего порядка малости) $b_1\kappa + b_0 = 0$. Отсюда $\kappa_1 = -b_0/b_1$, $\lambda_1 = -\omega_1 b_0/2b_1 = -a_0/a_1 \equiv -\Omega_1$. Два других корня имеют порядок малости μ и находятся из уравнения

$$\kappa^2 + b_2\kappa + b_1 = 0.$$

Они равны $\kappa_{2,3} = -\frac{1}{Q_a} \pm j h_a$. Следовательно, $\lambda_{2,3} = -\frac{1}{2} \Pi_a \pm j \Omega_a$.

Для последующего удобно выразить коэффициенты, входящие в (7.2.19) и (7.2.20), через характерные частоты Π_a , Ω_1 , Ω_0 , Ω_a .

Поскольку из характеристического уравнения следует, что $-\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = a_0$, и поскольку $-\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = \Omega_1 \left(-\frac{1}{2} \Pi_a + j \Omega_a \right) \left(-\frac{1}{2} \Pi_a - j \Omega_a \right) = \Omega_1 \left(\frac{1}{4} \Pi_a^2 + \Omega_a^2 \right)$, то для коэффициентов характеристического уравнения получаем следующие окончательные значения и порядки малости:

$$a_2 = \Pi_a \sim \omega_1 \mu, \quad a_1 = \Omega_0^2 \sim \omega_1^2 \mu^2, \quad a_0 = \Omega_1 \Omega_0^2 \sim \omega_1^3 \mu^4.$$

Кроме этого, из (7.1.19), учитывая порядки малости p_{ij} , находим:

$$\begin{aligned} p_{22} + p_{33} &\approx a_2 = \Pi_a, & p_{11} &= a_1 = \Omega_0^2, & &\sim \omega_1^2 \mu^2, \\ p_{11} + p_{33} &\approx p_{33} = \frac{1}{2} \Pi_a, & p_{22} &= p_{11} p_{33} - p_{31} p_{13}, & &\sim \omega_1^2 \mu^3, \\ p_{11} + p_{22} &\approx p_{22} = \frac{1}{2} \Pi_a, & p_{33} &= p_{11} p_{22} - p_{21} p_{12}, & &\sim \omega_1^2 \mu^3. \end{aligned}$$

Обращаясь к формуле (2.4.12) и учитывая, что $\lambda_1 = -\Omega_1$, $m = -\frac{1}{2} \Pi_a$, $n = \Omega_a$, для спектральных плотностей мощности

амплитудных флуктуаций получаем следующее точное выражение:

$$S_{a1}(\Omega) = \frac{S_{F_1}(\Omega)}{(\Omega^2 + \Omega_1^2) \left[\frac{1}{4} \Pi_a^2 + (\Omega - \Omega_a)^2 \right] \left[\frac{1}{4} \Pi_a^2 + (\Omega + \Omega_a)^2 \right]}. \quad (7.2.22)$$

На основании (7.2.18) нетрудно найти следующие значения спектральных плотностей для функций f_1, f_2, f_3, f_4 :

$$S_{f_1}(\Omega) = S_{f_4}(\Omega) = \frac{D_1}{2\pi} \varepsilon^2, \quad S_{f_2}(\Omega) = \frac{D_1}{2\pi} g_1^2, \quad S_{f_3}(\Omega) = \frac{D_1}{2\pi} g_2^2, \quad (7.2.23)$$

$$S_{f_1 f_2}^0(\Omega) = \frac{D_1}{2\pi} s_2 g_1, \quad S_{f_3 f_4}^0(\Omega) = -\frac{D_1}{2\pi} s_2 g_2, \quad \text{остальные } S_{f_i f_j}(\Omega) \equiv 0.$$

Здесь $D_1 = \frac{\pi \omega_1^2 c_1}{R_0^2}$, $\varepsilon^2 = s_2^2 + h_k^2 m$, $m = c_k / c_1$.

Коэффициенты c_1 и c_k представляют собой значения спектральных плотностей случайных функций $E_1(t)$ и $\mathcal{E}_{т.к}(t)$ на частоте автоколебаний.

Поскольку спектральные плотности $S_{F_i}(\Omega)$, которые можно найти из (7.2.20), (7.2.23), имеют громоздкие выражения, постольку анализ спектра амплитудных флуктуаций с помощью точной формулы (7.2.22) является мало обозримым.

Различный порядок малости уравнений (7.2.17) и характерных частот Ω_1 и Ω_0 позволяет громоздкий расчет спектральных плотностей амплитудных (и частотных) флуктуаций во всем диапазоне частот заменить существенно более простым расчетом, выполняемым *отдельно* для частот $|\Omega| \ll \Omega_0$ (медленные компоненты) и *отдельно* для частот $|\Omega| \gg \Omega_1$ (быстрые компоненты). Отметим, что этот прием во многом подобен методу, введенному Р. В. Хохловым [90, 91] для приближенного анализа системы неравноценных уравнений.

5. Анализ начнем с амплитудных флуктуаций кварцевого контура. Имея в виду порядок малости коэффициентов уравнения (7.2.19), нетрудно видеть, что для $|\Omega| \ll \Omega_0$ первое уравнение принимает вид

$$a_1 \frac{d a_1}{d t} + a_0 a_1 = P_{11} f_1 + P_{21} f_2 + P_{31} f_3. \quad (7.2.24)$$

Отсюда, учитывая (7.2.23), без труда находим, что

$$S_{a1}(\Omega) = \frac{A_0 \Omega_1^2}{\Omega^2 + \Omega_1^2} \frac{D_1}{2\pi \Omega_0^2}, \quad (7.2.25)$$

где

$$A_0 = \frac{1}{\Omega_0^2 \Omega_1^2} [P_{11}^2 h_k^2 m + (P_{11} s_2 + P_{21} g_1)^2 + P_{31}^2 g_2^2] \sim \mu^0.$$

Таким образом, медленная компонента амплитудных флуктуаций кварцевого контура обладает полосой, равной Ω_1 , и имеет максимум на нулевой частоте. Поскольку быстрая компонента $\alpha_1(t)$ существенно меньше медленной, (7.2.25) может служить приближенным выражением для (7.2.22) (при $i=1$) для всех значений частот.

Вместе с тем исследование быстрой компоненты α_1 является необходимым, если рассматривать спектральную плотность амплитудных флуктуаций кварцевого контура в области $\Omega \approx \Omega_0$.

Поскольку быстрая компонента α_1 много меньше быстрых компонент α_2 и α_3 , постольку все эти быстрые компоненты определяются следующими уравнениями, получаемыми из первых трех уравнений (7.2.17) при отбрасывании в последних членов $p_{11}\alpha_1$, $p_{21}\alpha_1$, $p_{31}\alpha_1$:

$$\begin{aligned}\frac{d\alpha_1}{dt} &= -p_{12}\alpha_2 - p_{13}\alpha_3 + f_1, \\ \frac{d\alpha_2}{dt} &= -p_{22}\alpha_2 - p_{23}\alpha_3 + f_2, \\ \frac{d\alpha_3}{dt} &= -p_{32}\alpha_2 - p_{33}\alpha_3 + f_3.\end{aligned}\quad (7.2.26)$$

Разделяя эти уравнения по отношению к $\alpha_1(t)$, найдем

$$\begin{aligned}\frac{d^3\alpha_1}{dt^3} + \Pi_a \frac{d^2\alpha_1}{dt^2} + \Omega_0^2 \frac{d\alpha_1}{dt} = \\ = -p_{12} \frac{df_2}{dt} + p_{21}f_2 - p_{13} \frac{df_3}{dt} + p_{31}f_3 + \frac{d^2f_1}{dt^2} + \Pi_a \frac{df_1}{dt} + \Omega_0^2 f_1.\end{aligned}\quad (7.2.27)$$

Для быстрых компонент α_2 и α_3 получим

$$\begin{aligned}\frac{d^2\alpha_2}{dt^2} + \Pi_a \frac{d\alpha_2}{dt} + \Omega_0^2\alpha_2 &= \frac{df_2}{dt} + p_{33}f_2 - p_{23}f_3, \\ \frac{d^2\alpha_3}{dt^2} + \Pi_a \frac{d\alpha_3}{dt} + \Omega_0^2\alpha_3 &= \frac{df_3}{dt} + p_{22}f_3 - p_{32}f_2.\end{aligned}\quad (7.2.28)$$

Пользуясь формулами гл. 2, из (7.2.27) можно получить следующее значение спектральной плотности быстрой компоненты α_1 :

$$S_{\alpha_1}(\Omega) = \frac{\Omega_0^2}{\Omega^2} \left[\varepsilon^2 + \frac{A_2\Omega_1^2\Omega^2 + A_0\Omega_0^2\Omega_1^2 - \Omega_0^4\varepsilon^2}{(\Omega^2 - \Omega_0^2)^2 + \Pi_a^2\Omega^2} \right] \frac{D_1}{2\pi\Omega_0^2}, \quad (7.2.29)$$

где введено обозначение

$$A_2 = \frac{1}{\Omega_1^2} [p_{12}^2 g_1^2 + p_{13}^2 g_2^2 - 2s_2 g_1 (p_{21} + \Pi_a p_{12})] \sim \mu^0.$$

Объединяя формулы (7.2.25) и (7.2.29), для всего диапазона частот имеем

$$S_{a1}(\Omega) = A(\Omega) \frac{D_1}{2\pi\Omega_0^2},$$

$$A(\Omega) = \frac{A_0\Omega_1^2}{\Omega^2 + \Omega_1^2} + \Omega_0^2 \frac{(\varepsilon^2 - \xi^2)\Omega^2 + (\varepsilon^2 - \xi^2)[\Pi_a^2 - 2\Omega_0^2] + A_2\Omega_1^2}{(\Omega^2 - \Omega_0^2)^2 + \Pi_a^2\Omega^2}. \quad (7.2.30)$$

Здесь $\xi^2 = A_0 \frac{\Omega_1^2}{\Omega_0^2} \sim \mu^2$. График безразмерной функции $A(\Omega)$

приведен на рис. 7.5. Из этого графика хорошо видно, что основная мощность амплитудных флуктуаций действительно содержится в медленной компоненте, а спектральную плотность быстрой компоненты, которая имеет максимум вблизи Ω_0 , следует учитывать начиная с частот $\Omega \gg \Omega_1$.

6. Обратимся к флуктуациям амплитуды колебания анодного контура. Поскольку анодный контур может являться «выходным» контуром генератора, то окончательный ин-

терес представляют не флуктуации $\alpha_2(t)$ и $\alpha_3(t)$, а флуктуации амплитуды колебания $x(t)$. Другими словами, записывая $x(t)$ как

$$x(t) = P_0(1 + \alpha_2) \cos \psi + B_0(1 + \alpha_3) \sin \psi = Q_0(1 + \beta) \cos(\psi + \theta),$$

мы будем интересоваться флуктуациями $\beta(t)$. Нетрудно найти, что

$$\beta(t) = m_2\alpha_2(t) + m_3\alpha_3(t), \quad (7.2.31)$$

где

$$m_2 = g_2^2 / (g_1^2 + g_2^2), \quad m_3 = g_1^2 / (g_1^2 + g_2^2).$$

Рассмотрим сначала медленную компоненту $\beta(t)$. Для этого необходимо отыскать медленные компоненты α_2 и α_3 . Для частот $|\Omega| \ll \Omega_0$ второе и третье уравнения (7.2.17) принимают вид

$$0 = -p_{21}a_1 - p_{22}a_2 - p_{23}a_3 + f_2,$$

$$0 = -p_{31}a_1 - p_{32}a_2 - p_{33}a_3 + f_3.$$

Отсюда находим

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= \Omega_0^{-2} (P_{12}a_1 + P_{33}f_2 - P_{23}f_3), \\ \alpha_3 &= \Omega_0^{-2} (P_{13}a_1 + P_{22}f_3 - P_{32}f_2). \end{aligned} \quad (7.2.32)$$

Следовательно,

$$\beta = k_1 \alpha_1 + k_2 \Omega_0^{-1} f_2 + k_3 \Omega_0^{-1} f_3,$$

где

$$k_1 = \Omega_0^{-2} (m_2 P_{12} + m_3 P_{13}), \quad k_2 = \Omega_0^{-1} (m_2 p_{33} - m_3 p_{32}),$$

$$k_3 = \Omega_0^{-1} (m_3 p_{22} - m_2 p_{23}).$$

Таким образом, спектральная плотность флуктуаций $\beta(t)$ равна

$$S_\beta(\Omega) = k_1^2 S_{\alpha_1}(\Omega) + 2 \frac{k_1 k_2}{\Omega_0} S_{\alpha_1 f_2}(\Omega) + 2 \frac{k_1 k_3}{\Omega_0} S_{\alpha_1 f_3}(\Omega) + \\ + \frac{k_2^2}{\Omega_0^2} S_{f_2}(\Omega) + \frac{k_3^2}{\Omega_0^2} S_{f_3}(\Omega).$$

Принимая во внимание, что медленная компонента α_1 задана уравнением (7.2.24), с помощью формул гл. 2 нетрудно найти

$$S_{\alpha_1 f_2}(\Omega) = \frac{M_1 \Omega_1^2}{\Omega^2 + \Omega_1^2} \frac{D_1}{2\pi \Omega_0}, \quad (7.2.33)$$

$$S_{\alpha_1 f_3}(\Omega) = S_{\alpha_1 f_2}(\Omega) \frac{M_2}{M_1}, \quad S_{\alpha_1 f_4}(\Omega) = -S_{\alpha_1 f_2}(\Omega) \frac{M_2}{M_1} \frac{s_2}{g_2},$$

где

$$M_1 = \Omega_0^{-1} \Omega_1^{-1} (P_{11} s_2 g_1 + P_{21} g_1^2), \quad M_2 = \Omega_0^{-1} \Omega_1^{-1} P_{31} g_2^2 \sim \mu^0.$$

Учитывая (7.2.25) и (7.2.23), находим окончательно

$$S_\beta(\Omega) = \left[\frac{B_1 \Omega_1^2}{\Omega^2 + \Omega_1^2} + k_0^2 \right] \frac{D_1}{2\pi \Omega_0^2}, \quad (7.2.34)$$

где обозначено

$$B_1 = k_1^2 A_0 + 2k_1 k_2 M_1 + 2k_1 k_3 M_2 \sim \mu^0,$$

$$k_0^2 = k_2^2 g_1^2 + k_3^2 g_2^2 \sim \mu^0.$$

Для нахождения спектральной плотности быстрой компоненты $\beta(t)$ обратимся к (7.2.31) и (7.2.28). Из этих формул можно найти следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^2 \beta}{dt^2} + \Pi_a \frac{d\beta}{dt} + \Omega_0^2 \beta = m_2 \frac{df_2}{dt} + m_3 \frac{df_3}{dt} + k_2 \Omega_0 f_2 + k_3 \Omega_0 f_3.$$

Отсюда нетрудно найти спектральную плотность быстрой компоненты амплитудных флуктуаций анодного контура:

$$S_\beta(\Omega) = \Omega_0^2 \frac{2l_0^2 \Omega^2 + k_0^2 \Omega_0^2}{(\Omega^2 - \Omega_0^2)^2 + \Pi_a^2 \Omega^2} \frac{D_1}{2\pi \Omega_0^2}, \quad (7.2.35)$$

где

$$l_0^2 = \frac{1}{2} (m_2^2 g_1^2 + m_3^2 g_2^2) = R_0^2 / Q_0^2.$$

Объединяя (7.2.34) и (7.2.35), для всего диапазона частот получаем

$$S_\beta(\Omega) = B(\Omega) \frac{D_1}{2\pi\Omega_0^2},$$

$$B(\Omega) = \frac{B_1\Omega_1^2}{\Omega^2 + \Omega_1^2} + \Omega_0^2 \frac{2l_0^2\Omega^2 + k_0^2\Omega_0^2}{(\Omega^2 - \Omega_0^2)^2 + \Pi_a^2\Omega^2}. \quad (7.2.36)$$

График безразмерной функции $B(\Omega)$ представлен на рис. 7.5. Из сравнения $A(\Omega)$ и $B(\Omega)$ следует, во-первых, что медленные компоненты α_1 и β имеют одинаковый порядок малости и что, во-вторых, полуширина полосы амплитудных флуктуаций анодного контура равна Ω_0 . Кроме этого, очевидно наличие максимума $S_\beta(\Omega)$ при $\Omega \approx \Omega_0$, если $\Omega_0 > \Pi_a$.

7. Перейдем теперь к анализу флуктуаций частоты. Мы рассмотрим отдельно флуктуации частоты колебания кварцевого контура $\nu(t)$ и флуктуации частоты колебания анодного контура $\nu_a(t)$.

Вычисляя коэффициенты q_1 , q_2 , q_3 с помощью (7.1.16) и (7.2.11), найдем

$$q_1 = -\frac{\omega_1}{2} \left[s_1 s_2 \left(1 - \frac{h_k}{h_a} \right) - \frac{1}{h_a Q_k Q_a} \right], \quad q_2 = -\frac{\omega_1}{2} \frac{s_2}{g_1} (h_k - h_a),$$

$$q_3 = -\frac{\omega_1}{2} \frac{s_2}{g_2} \frac{1}{Q_a}.$$

Из (7.2.17) следует, что флуктуации частоты $\nu(t)$ определяются в общем случае уравнением

$$\nu(t) = -q_1 \alpha_1 - q_2 \alpha_2 - q_3 \alpha_3 + f_4. \quad (7.2.37)$$

Имея в виду уравнения (7.2.32), для медленной компоненты флуктуаций частоты $\nu(t)$ получаем

$$\nu(t) = -q \alpha_1 + \kappa_2 f_2 + \kappa_3 f_3 + f_4, \quad (7.2.38)$$

где

$$q = q_1 + q_2 \frac{P_{12}}{\Omega_0^2} + q_3 \frac{P_{13}}{\Omega_0^2} \sim \omega_1 \mu^2,$$

$$\kappa_2 = -q_2 \frac{P_{33}}{\Omega_0^2} + q_3 \frac{P_{32}}{\Omega_0^2} \sim \mu,$$

$$\kappa_3 = q_2 \frac{P_{23}}{\Omega_0^2} - q_3 \frac{P_{22}}{\Omega_0^2} \sim \mu.$$

Отсюда, принимая во внимание (7.2.33), находим следующее выражение для спектральной плотности медленной компоненты флуктуаций частоты $\nu(t)$:

$$S_\nu(\Omega) = \left[\frac{\Delta_1 \Omega_1^2}{\Omega^2 + \Omega_1^2} + \delta + \varepsilon^2 \right] \frac{D_1}{2\pi}, \quad (7.2.39)$$

где введены обозначения:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= q^2 \Omega_0^{-2} A_0 - 2q \Omega_0^{-1} (M_1 \kappa_2 + M_2 \kappa_3') \sim \mu^2, \\ \delta &= \kappa_2^2 g_1^2 + \kappa_3^2 g_2^2 - 2\kappa_3 s_2 g_2 \sim \mu^2, \quad \kappa_3' = \kappa_3 - s_2/g_2. \end{aligned}$$

Обращаясь к быстрой компоненте $\nu(t)$ (т. е. рассматривая частоты $|\Omega| \gg \Omega_1$), имеем из (7.2.37), пренебрегая членом $q_1 \alpha_1$:

$$\nu(t) = -q_2 \alpha_2 - q_3 \alpha_3 + f_4, \quad (7.2.40)$$

где теперь α_2 и α_3 заданы вторым и третьим уравнениями (7.2.26). Объединяя (7.2.40) и (7.2.26), для $\nu(t)$ получаем следующее уравнение:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \nu}{dt^2} + \Pi_a \frac{d\nu}{dt} + \Omega_0^2 \nu &= \\ &= -q_2 \frac{df_2}{dt} - q_3 \frac{df_3}{dt} + \kappa_2 \Omega_0^2 f_2 + \kappa_3 \Omega_0^2 f_3 + \frac{d^2 f_4}{dt^2} + \Pi_a \frac{df_4}{dt} + \Omega_0^2 f_4. \end{aligned}$$

Отсюда находим спектральную плотность

$$S_\nu(\Omega) = \left[\varepsilon^2 + \Omega_0^2 \frac{\eta^2 \Omega^2 + \Omega_0^2 \delta}{(\Omega^2 - \Omega_0^2)^2 + \Pi_a^2 \Omega^2} \right] \frac{D_1}{2\pi}, \quad (7.2.41)$$

где

$$\eta^2 = \Omega_0^{-2} (q_1^2 g_1^2 + q_3^2 g_2^2) + \left(\kappa_3 - q_3 \frac{\Pi_a}{\Omega_0^2} \right) 2s_2 g_2 \sim \mu^2.$$

Объединяя (7.2.39) и (7.2.41), получаем следующее окончательное выражение для спектральной плотности флуктуаций частоты $\nu(t)$:

$$\begin{aligned} S_\nu(\Omega) &= N_\kappa(\Omega) \frac{D_1}{2\pi}, \\ N_\kappa(\Omega) &= \varepsilon^2 + \frac{\Delta_1 \Omega_1^2}{\Omega^2 + \Omega_1^2} + \Omega_0^2 \frac{\eta^2 \Omega^2 + \Omega_0^2 \delta}{(\Omega^2 - \Omega_0^2)^2 + \Pi_a^2 \Omega^2}. \end{aligned} \quad (7.2.42)$$

Примерный график безразмерной функции $N_\kappa(\Omega)$ приведен на рис. 7.6. Эта функция мало изменяется с изменением Ω , оставаясь во всем диапазоне частот величиной второго порядка малости.

8. Рассмотрим флуктуации частоты колебания анодного контура генератора.

Согласно п. 4 § 7.1 разность фаз между колебаниями $y(t)$ и $x(t)$ равна θ , где

$$\theta = \theta_0 + \psi_1, \quad \langle \psi_1 \rangle = 0.$$

Флуктуации разности фаз равны

$$\psi_1 = m_0(\alpha_2 - \alpha_3),$$

где, согласно (7.1.21), $m_0 = B_0 P_0 / (B_0^2 + P_0^2) = B_0 P_0 / Q_0^2$. Тем самым флуктуации частоты колебания анодного контура равны

$$v_a(t) = v(t) + \frac{d\psi_1}{dt} = v(t) + m_0 \left[\frac{d\alpha_2}{dt} - \frac{d\alpha_3}{dt} \right]. \quad (7.2.43)$$

Отсюда следует, что в общем случае имеется существенная разница между $v(t)$ и $v_a(t)$. Поскольку $v(t)$ на порядок меньше, чем $d\alpha_2/dt$, $d\alpha_3/dt$ (см. уравнения (7.2.17), то интенсивность флуктуаций частоты колебания анодного контура существенно больше интенсивности флуктуаций частоты колебания кварцевого контура. С другой стороны, поскольку спектральные плотности производных $d\alpha_2/dt$ и $d\alpha_3/dt$ равны нулю при $\Omega = 0$, постольку $S_v(0) = S_{v_a}(0)$.

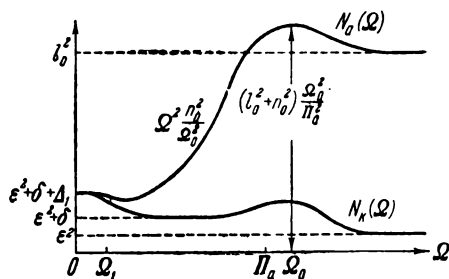


Рис. 7.6.

Таким образом, спектральные плотности $S_v(\Omega)$ и $S_{v_a}(\Omega)$, начинаясь из одной точки (при $\Omega = 0$), существенно расходятся при возрастании Ω ; для достаточно больших частот $S_{v_a}(\Omega)$ на два порядка больше, чем $S_v(\Omega)$.

Начнем анализ с медленной компоненты флуктуаций частоты v_a . Учитывая (7.2.43), (7.2.38), (7.2.32), легко получить

$$v_a = n_1 \frac{da_1}{dt} - qa_1 + \frac{n_2}{\Omega_0} \frac{df_2}{dt} + \kappa_2 f_2 - \frac{n_3}{\Omega_0} \frac{df_3}{dt} + \kappa_3 f_3 + f_4, \quad (7.2.44)$$

где введены обозначения:

$$n_1 = m_0 \Omega_0^{-2} (P_{12} - P_{13}) \sim \mu^0,$$

$$n_2 = m_0 \Omega_0^{-1} (p_{33} + p_{32}) \sim \mu^0,$$

$$n_3 = m_0 \Omega_0^{-1} (p_{23} + p_{22}) \sim \mu^0.$$

Совершая довольно громоздкие, но несложные преобразования, принимая во внимание (7.2.33), а также формулы

$$S_{a_{if_2}}^1(\Omega) = \frac{-\Omega M_1 \Omega_1}{\Omega^2 + \Omega_1^2} \frac{D_1}{2\pi \Omega_0},$$

$$S_{a_{if_3}}^1(\Omega) = S_{a_{if_2}}^1(\Omega) \frac{M_2}{M_1}, \quad S_{a_{if_4}}^1(\Omega) = -S_{a_{if_2}}^1(\Omega) \frac{M_2}{M_1} \frac{s_2}{g_2},$$

можно получить следующее выражение для спектральной плотности медленной компоненты флуктуаций частоты колебания анодного контура:

$$S_{v_a}(\Omega) = \left[\frac{\Delta_2 \Omega^2 + \Delta_1 \Omega_1^2}{\Omega^2 + \Omega_1^2} + \frac{n_0^2}{\Omega_0^2} \Omega^2 + \delta + \varepsilon^2 \right] \frac{D_1}{2\pi}, \quad (7.2.45)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta_2 = n_1^2 A_0 \frac{\Omega_1^2}{\Omega_0^2} + 2M_1 \frac{\Omega_1}{\Omega_0} \left(\frac{n_1 n_2}{\Omega_0} \Omega_1 + \kappa_2 n_1 + q \frac{n_2}{\Omega_0} \right) - \\ - 2M_2 \frac{\Omega_1}{\Omega_0} \left(\frac{n_1 n_3}{\Omega_0} \Omega_1 - \kappa'_3 n_1 + q \frac{n_3}{\Omega_0} \right) \sim \mu^2, \\ n_0^2 = n_2^2 g_1^2 + n_3^2 g_2^2 \sim \mu^0. \end{aligned}$$

Как видно из (7.2.45) и (7.2.39), при $|\Omega| \ll \Omega_1$ $S_v(\Omega) = S_{v_a}(\Omega)$, как и должно быть. При $\Omega \gg \Omega_1$ $S_{v_a}(\Omega) = n_0^2 \Omega_0^{-2} \Omega^2$ — сильно возрастает с ростом частоты. При $\Omega \approx \Omega_1$ спектральная плотность $S_{v_a}(\Omega)$ может иметь некоторую особенность (например, минимум).

Обращаясь к быстрым флуктуациям $v_a(t)$, нетрудно видеть, что

$$v_a(t) = m_0 \left[\frac{d\alpha_2}{dt} - \frac{d\alpha_3}{dt} \right] = m_0 [(p_{32} - p_{22})\alpha_2 + (p_{33} - p_{23})\alpha_3 + f_2 - f_3].$$

Принимая во внимание (7.2.28), для $v_a(t)$ получаем следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^2 v_a}{dt^2} + \Pi_a \frac{dv_a}{dt} + \Omega_0^2 v_a = m_0 \frac{d^2 f_2}{dt^2} + n_2 \Omega_0 \frac{df_2}{dt} - m_0 \frac{d^2 f_3}{dt^2} - n_3 \Omega_0 \frac{df_3}{dt},$$

из которого находим спектральную плотность быстрой компоненты $v_a(t)$

$$S_{v_a}(\Omega) = \Omega^2 \frac{l_0^2 \Omega^2 + n_0^2 \Omega_0^2}{(\Omega^2 - \Omega_0^2)^2 + \Pi_a^2 \Omega^2} \frac{D_1}{2\pi}. \quad (7.2.46)$$

Объединяя (7.2.45) и (7.2.46), для всего диапазона частот имеем

$$S_{v_a}(\Omega) = N_a(\Omega) \frac{D_1}{2\pi},$$

$$N_a(\Omega) = \frac{\Delta_2 \Omega^2 + \Delta_1 \Omega_1^2}{\Omega^2 + \Omega_1^2} + \delta + \varepsilon^2 + \Omega^2 \frac{l_0^2 \Omega^2 + n_0^2 \Omega_0^2}{(\Omega^2 - \Omega_0^2)^2 + \Pi_a^2 \Omega^2}. \quad (7.2.47)$$

График безразмерной функции $N_a(\Omega)$ приведен на рис. 7.6. Интересно сравнить значения $N_a(\Omega)$ и $N_k(\Omega)$ на разных частотах.

На частотах $|\Omega| \gg \Omega_0$ спектральные плотности флуктуаций частоты колебаний $x(t)$ и $y(t)$ отличаются на два порядка. Это связано с тем, что на этих частотах между флуктуациями частоты обоих контуров, вследствие инерционности последних, практически отсутствует всякое взаимодействие и эти флуктуации определяются независимо для обоих контуров. В этом случае можно считать, что имеются как бы два отдельных автогенератора, в одном из которых колебательный контур находится в аноде, а другой содержит кварцевый контур в сеточной цепи. Поскольку добротности этих контуров резко различны, постольку резко отличаются друг от друга и спектральные плотности $S_v(\infty)$ и $S_{v_a}(\infty)$.

Таким образом, можно считать, что значения $N_k(\infty) = \varepsilon^2$ и $N_a(\infty) = l_0^2$ принадлежат не связанным между собой отдельным автогенераторам. Отметим также то, что в нашем случае разница добротностей контуров проявляется в разном порядке связи контуров с лампой.

На частотах порядка Ω_0 начинают сказываться амплитудные флуктуации анодного контура. Особенности $N_k(\Omega)$ и $N_a(\Omega)$ при $\Omega \approx \Omega_0$ связаны с взаимодействием $\beta(t)$ с $v(t)$ и $v_a(t)$.

При дальнейшем уменьшении частоты начинает «вступать в игру» инерционный кварцевый контур, оказывающий свое стабилизирующее действие. Крутой спад $N_a(\Omega)$ при уменьшении Ω и является следствием этого влияния кварцевого контура. Особенности $N_k(\Omega)$ и $N_a(\Omega)$ при $\Omega \leq \Omega_1$ связаны с взаимодействием амплитудных флуктуаций кварцевого контура с $v(t)$ и с $v_a(t)$.

Наконец, при сколь угодно малых частотах вся система ведет себя так, как будто генератор содержит только один высокодобротный кварцевый контур (см. § 7.3).

9. Для определения формы спектра колебания кварцевого генератора необходимо знать совместные спектральные плотности $S_{\Delta_1 v}^0(\Omega)$ и $S_{\beta v_a}^0(\Omega)$, расчет которых можно провести аналогично предыдущему. Опуская этот расчет, приведем его результаты.

Пренебрегая быстрой компонентой амплитудных флуктуаций α_1 , будем иметь

$$S_{\alpha_1 v}^0(\Omega) = \frac{\gamma_1 \Omega_1^2}{\Omega^2 + \Omega_1^2} \frac{D_1}{2\pi\Omega_0}, \quad (7.2.48)$$

где

$$\gamma_1 = -q\Omega_0^{-1}A_0 + \kappa_2 M_1 + \kappa_3' M_2 \sim \mu.$$

Для $|\Omega| \ll \Omega_0$ совместная спектральная плотность амплитудных и частотных флуктуаций анодного контура равна

$$S_{\beta v_a}^0(\Omega) = \frac{\gamma_2 \Omega^2 + \gamma_3 \Omega_1^2}{\Omega^2 + \Omega_1^2} \frac{D_1}{2\pi\Omega_0}. \quad (7.2.49)$$

Для $|\Omega| \gg \Omega_1$ эта спектральная плотность равна

$$S_{\beta v_a}^0(\Omega) = \Omega_0^2 \frac{m_1 \Omega^2 + \gamma_2 \Omega_1^2}{(\Omega^2 - \Omega_0^2)^2 + \Pi_a^2 \Omega^2} \frac{D_1}{2\pi\Omega_0}. \quad (7.2.50)$$

Здесь обозначено:

$$\begin{aligned} \gamma_2 &= M_1 \Omega_1 \Omega_0^{-1} (k_2 n_1 - k_1 n_2) + M_2 \Omega_1 \Omega_0^{-1} (k_1 n_3 + k_3 n_1) + k_2 \kappa_2 g_1^2 + k_3 \kappa_3' g_2^2 \sim \mu, \\ \gamma_3 &= -k_1 q \Omega_0^{-1} A_0 + M_1 (k_1 \kappa_2 - k_2 q \Omega_0^{-1}) + M_2 (k_1 \kappa_3 - k_3 q \Omega_0^{-1}) - k_3 s_2 g_2 \sim \mu, \\ m_1 &= m_0 \Omega_0^{-1} (p_{32} g_1^2 - p_{23} g_2^2) \sim \mu^0. \end{aligned}$$

Объединяя формулы (7.2.49) и (7.2.50), для любых Ω находим

$$S_{\beta v_a}^0(\Omega) = \left[\frac{(\gamma_3 - \gamma_2) \Omega_1^2}{\Omega^2 + \Omega_1^2} + \Omega_0^2 \frac{m_1 \Omega^2 + \gamma_2 \Omega_1^2}{(\Omega^2 - \Omega_0^2)^2 + \Pi_a^2 \Omega^2} \right] \frac{D_1}{2\pi\Omega_0}. \quad (7.2.51)$$

Анализируя (7.2.48) и (7.2.51), можно видеть, что четная корреляция между флуктуациями амплитуды и частоты кварцевого контура существует только на малых частотах, сравнимых с полосой кварца, в то время как четная корреляция между амплитудными и частотными флуктуациями анодного контура принимает максимальное значение на частоте порядка полосы анодного контура.

10. Для вычисления формы спектральной линии колебания необходимо также знать функцию $\chi(\tau)$ — зависимость дисперсии набега фазы колебания от времени набега. Эта функция будет различной для колебания кварцевого контура и колебания анодного контура.

Для кварцевого контура, согласно (7.2.42), с помощью формул (III.32) — (III.36) можно найти ($\tau > 0$)

$$\chi_k(\tau) = \frac{D_1}{2\Omega_1} \left[(\varepsilon^2 + \delta + \Delta_1) \Omega_1 \tau - \Delta_1 - k_{1c} + \Delta_1 \exp(-\Omega_1 \tau) + \right. \\ \left. + \exp\left(-\frac{\Pi_a}{2} \tau\right) (k_{1c} \cos \Omega_a \tau - k_{1s} \sin \Omega_a \tau) \right]. \quad (7.2.52)$$

Здесь

$$k_{1c} = \Omega_1 \Pi_a^{-1} \Omega_0^{-2} \left[\frac{1}{4} \Pi_a^2 (3\delta - \eta^2) - \Omega_a^2 (\delta + \eta^2) \right] \sim \mu^3,$$

$$k_{1s} = \Omega_1 2^{-1} \Omega_a^{-1} \Omega_0^{-2} \left[\Omega_a^2 (3\delta + \eta^2) - \frac{1}{4} \Pi_a^2 (\delta - \eta^2) \right] \sim \mu^3.$$

Постоянные k_{1c} , k_{1s} связаны соотношением

$$\frac{1}{2} \Pi_a k_{1c} + \Omega_a k_{1s} = \delta \Omega_1.$$

Для анодного контура, согласно (7.2.47), находим ($\tau > 0$)

$$\chi_a(\tau) = \frac{D_1}{2\Omega_1} \left[(\varepsilon^2 + \delta + \Delta_1) \Omega_1 \tau + \Delta_2 - \Delta_1 + k_{2c} + (\Delta_1 - \Delta_2) \exp(-\Omega_1 \tau) - \right. \\ \left. - (k_{2c} \cos \Omega_a \tau + k_{2s} \sin \Omega_a \tau) \exp\left(-\frac{\Pi_a}{2} \tau\right) \right]. \quad (7.2.53)$$

Коэффициенты k_{2c} , k_{2s} равны

$$k_{2c} = \Omega_1 \Pi_a^{-1} \Omega_0^{-2} \left[\frac{1}{4} \Pi_a^2 (l_1^2 + 3l_0^2) + \Omega_a^2 (l_1^2 - l_0^2) \right] \sim \mu,$$

$$k_{2s} = \Omega_1 2^{-1} \Omega_a^{-1} \Omega_0^{-2} \left[\Omega_a^2 (l_1^2 - 3l_0^2) + \frac{1}{4} \Pi_a^2 (l_1^2 + l_0^2) \right] \sim \mu,$$

и связаны соотношением

$$k_{2s} \Omega_a - \frac{1}{2} \Pi_a k_{2c} = -l_0^2 \Omega_1.$$

Здесь обозначено

$$l_1^2 = \Omega_0^{-2} (\Omega_0^2 n_0^2 + 2l_0^2 \Omega_a^2 + l_0^2 \Pi_a^2) \sim \mu^0.$$

Сравним набег фаз колебаний $x(t)$ и $y(t)$ при разных τ . При $\tau \ll \Omega_0^{-1}$ из (7.2.52) и (7.2.53) следует:

$$\chi_k(\tau) = \frac{D_1}{2} \varepsilon^2 \tau, \quad \chi_a(\tau) = \frac{D_1}{2} l_0^2 \tau.$$

Таким образом, коэффициенты начальной диффузии фаз резко различны. При $\tau \gg \Omega_1^{-1}$

$$\chi_k(\tau) = \chi_a(\tau) = \frac{D_1}{2} (\varepsilon^2 + \delta + \Delta_1) \tau \equiv \frac{1}{2} D_\omega \tau$$

— коэффициенты установившейся диффузии фаз обоих колебаний равны. Нетрудно показать, что изменение коэффициентов диффузии фаз при возрастании τ полностью соответствует изменению спектральных плотностей $S_v(\Omega)$, $S_{v_a}(\Omega)$ при уменьшении Ω , которое обсуждалось в конце п. 8.

Равенство коэффициентов установившейся диффузии фаз для $x(t)$ и $y(t)$ означает равенство ширины спектральной линии обоих колебаний. Этого и следует ожидать, так как при диффузии фаз, как уже упоминалось, векторы x и y , хаотически «накручиваясь», все время взаимно удерживаются около среднего сдвига фаз, равного θ_0 . Поэтому характеристики долговременного набега фазы, определяющие ширину спектральной линии генератора, одинаковы для $x(t)$ и $y(t)$.

Оценим порядок естественной ширины спектральной линии кварцевого генератора. Поскольку $S_v(0) > 0$, $S_v(\infty) > 0$, $S_{v_a}(\infty) > 0$, ширина спектральной линии равна

$$\Delta\Omega = \pi^2 S_v(0) = \frac{\pi}{2} D_1 (\epsilon^2 + \delta + \Delta_1) = \frac{\pi^2 \omega_1^2 c_1}{2R_0^2} (\epsilon^2 + \delta + \Delta_1). \quad (7.2.54)$$

В качестве верхнего предела для c_1 можно взять величину $\langle E_1^2 \rangle / 2\omega_0$. Следовательно, $(D_1)_{\max} / \omega_0 \approx \pi \langle E_1^2 \rangle / 2R_0^2$. В начале настоящего параграфа мы указывали на то, что E_1 по отношению к R_0 имеет порядок малости μ^2 . Следовательно, $(D_1)_{\max} \sim \frac{\pi}{2} \omega_0 \mu^4$. Тем самым по порядку величины

$$\Delta\Omega_{\max} \sim \frac{\pi^2}{4} \omega_0 \mu^6.$$

Нетрудно теперь определить конкретное значение естественной ширины спектральной линии. Поскольку (см. (7.2.6))

$$E_1(t) = -\frac{1}{\omega_1^2 (C + C_1)} \frac{di_{\text{др}}}{dt} + \frac{\omega_a^2}{\omega_1^2} \mathcal{E}_T,$$

то можно найти (учитывая, что емкость C_1 много меньше емкости C и $\omega_a \approx \omega_1$) коэффициенты

$$c_1 = \frac{1}{2\pi} (eI_0 \Gamma^2 Q_a^2 r^2 + 2kTr), \quad c_k = \frac{1}{2\pi} 2kTr_k.$$

Следовательно (учитывая, что $\omega_0 \approx \omega_1$),

$$D_1 = \frac{\omega_0^2}{2R_0^2} (eI_0 \Gamma^2 Q_a^2 r^2 + 2kTr), \quad D_1 m = \frac{\omega_0^2}{2R_0^2} 2kTr_k.$$

Таким образом, естественная ширина спектральной линии кварцевого генератора равна

$$\Delta\Omega = \frac{\pi\omega_0^2}{4R_0^2} [(s_2^2 + \delta + \Delta_1)(2kTr + eI_0\Gamma^2 r^2 Q_a^2) + h_k^2 2kTr_k]. \quad (7.2.55)$$

11. Приступим, наконец, к рассмотрению формы спектральной линии кварцевого автогенератора. Поскольку характеристики флуктуаций амплитуды и частоты колебания различны для кварцевого и анодного контуров, то можно ожидать, что колебания $y(t)$ и $x(t)$ будут обладать различными формами спектральной линии.

Существование совместных спектральных плотностей $S_{\alpha,\nu}^{0,1}$ $S_{\beta,\alpha}^{0,1}$ приводит к несимметричности форм линий, поэтому необходимо обращаться к § 4.6. Можно, с другой стороны, показать, что в силу малости амплитудных флуктуаций формы спектральных линий обоих колебаний даются формулами (4.2.26); при этом спектральные линии состоят из симметричных пиков и несимметричных пьедесталов.

Имея в виду малость безразмерных коэффициентов, входящих в (7.2.52), с помощью (II. 15), (II. 16) после громоздких, но несложных вычислений для кварцевого контура находим

$$W_{yx}^0 = \frac{R_0^2}{2} \left\{ \frac{(\epsilon^2 + \delta + \Delta_1)\Omega_0^2}{\Omega^2 + \left(\frac{\Delta\Omega}{\pi}\right)^2} - \frac{\Delta_1\Omega_0^2}{\Omega^2 + \Omega_1^2} + \right. \\ \left. + \Omega_0^2 \frac{-\delta\Omega^2 + \Omega_0^2\eta^2 + \delta(2\Omega_0^2 - \Pi_a^2)}{(\Omega^2 - \Omega_0^2)^2 + \Pi_a^2\Omega^2} \right\} \frac{D_1}{2\pi\Omega_0^2}, \\ 2\pi S_{\alpha,\nu}^{0,1}(0) W_{yx}^1 = \frac{R_0^2}{2} \frac{2\gamma_1\Omega_0\Omega}{\Omega^2 + \left(\frac{\Delta\Omega}{\pi}\right)^2} \frac{D_1}{2\pi\Omega_0^2}.$$

Учитывая (7.2.30), (7.2.48), на основании (4.6.22) и (4.6.26) получаем следующее окончательное выражение для формы спектральной линии колебания $y(t)$:

$$W_y(\Omega) = \frac{R_0^2}{2} [W_\kappa^0(\Omega) + W_\kappa^1(\Omega)] \frac{D_1}{2\pi\Omega_0^2}$$

Безразмерные функции $W_\kappa^0(\Omega)$, $W_\kappa^1(\Omega)$, описывающие четную и нечетную компоненты спектра колебания кварцевого контура,

равны

$$W_{\kappa}^0(\Omega) = \Omega_0^2 \frac{(\epsilon^2 + \delta + \xi^2)\Omega^2 + (\epsilon^2 + \delta + \Delta_1)\Omega_1^2}{\left[\Omega^2 + \left(\frac{\Delta\Omega}{\pi}\right)^2\right][\Omega^2 + \Omega_1^2]} +$$

$$+ \Omega_0^2 \frac{(\epsilon^2 - \xi^2 - \delta)\Omega^2 - (\epsilon^2 - \xi^2 - \delta)[2\Omega_0^2 - \Pi_a^2] + A_2\Omega_1^2 + \eta^2\Omega_0^2}{(\Omega^2 - \Omega_0^2)^2 + \Pi_a^2\Omega^2}, \quad (7.2.56)$$

$$W_{\kappa}^1(\Omega) = \frac{2\gamma_1\Omega_0\Omega_1^2\Omega}{\left[\Omega^2 + \left(\frac{\Delta\Omega}{\pi}\right)^2\right][\Omega^2 + \Omega_1^2]}.$$

График четной компоненты $W_{\kappa}^0(\Omega)$ приведен на рис. 7.7. Пик спектральной линии симметричен. Несимметрия пьедестала, как следует из $W_{\kappa}^1(\Omega)$, имеет место только при $\Omega \approx \Omega_1$. При дальнейшем увеличении Ω симметрия $W_y(\Omega)$ вновь восстанавливается. Легко видеть, что крылья спектральной линии колебания $y(t)$ равны

$$W_y(\Omega) = \frac{R_0^2}{2} \frac{2\epsilon^2}{\Omega^2} \frac{D_1}{2\pi}.$$

Обращаясь к анодному контуру, для колебания $x(t)$ имеем

$$W_{x\chi}^0 = \frac{R_0^2}{2} \left\{ \frac{(\epsilon^2 + \delta + \Delta_1)\Omega_0^2}{\Omega^2 + \left(\frac{\Delta\Omega}{\pi}\right)^2} + \right.$$

$$+ \frac{(\Delta_2 - \Delta_1)\Omega_0^2}{\Omega^2 + \Omega_1^2} +$$

$$+ \Omega_0^2 \frac{l_0^2\Omega^2 + \Omega_0^2 n_0^2}{(\Omega^2 - \Omega_0^2)^2 + \Pi_a^2\Omega^2} \left. \right\} \frac{D_1}{2\pi\Omega_0^2},$$

$$2\pi S_{\beta\nu_a}(0) W_{x\chi}^1 =$$

$$= \frac{R_0^2}{2} \frac{2\gamma_3\Omega_0\Omega}{\Omega^2 + \left(\frac{\Delta\Omega}{\pi}\right)^2} \frac{D_1}{2\pi\Omega_0^2}.$$

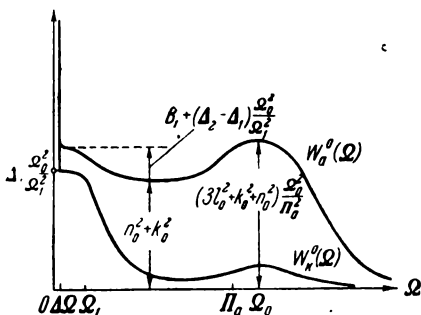


Рис. 7.7.

Принимая во внимание (7.2.36), (7.2.51), получаем на основании (4.6.26)

$$W_x(\Omega) = \frac{R_0^2}{2} [W_a^0(\Omega) + W_a^1(\Omega)] \frac{D_1}{2\pi\Omega_0^2},$$

где безразмерные функции $W_a^0(\Omega)$, $W_a^1(\Omega)$ равны

$$W_a^0(\Omega) = \Omega_0^2 \frac{\varepsilon^2 + \delta + \Delta_1}{\Omega^2 + \left(\frac{\Delta\Omega}{\pi}\right)^2} + \frac{B_1\Omega^2 + (\Delta_2 - \Delta_1)\Omega_0^2}{\Omega^2 + \Omega_1^2} + \Omega_0^2 \frac{3I_0^2\Omega^2 + \Omega_0^2(k_0^2 + n_0^2)}{(\Omega^2 - \Omega_0^2)^2 + \Pi_a^2\Omega^2},$$

$$W_a^1(\Omega) = \frac{2\gamma_3\Omega_0\Omega}{\Omega^2 + \left(\frac{\Delta\Omega}{\pi}\right)^2} - \frac{2(\gamma_3 - \gamma_2)\Omega_0\Omega}{\Omega^2 + \Omega_1^2} + 2 \frac{-\gamma_2\Omega_0\Omega^3 + \Delta_2\Omega_0^3\Omega}{(\Omega^2 - \Omega_0^2)^2 + \Pi_a^2\Omega^2}. \quad (7.2.57)$$

График $W_a^0(\Omega)$ изображен на рис. 7.7. Пик спектральной линии колебания $x(t)$ такой же, как и для $y(t)$, а пьедестал сильно несимметричен и намного превышает (вплоть до частот $\approx \Omega_0$) пьедестал спектральной линии колебания $y(t)$.

Крылья спектральной линии колебания анодного контура даются выражением

$$W_x(\Omega) = \frac{R_0^2}{2} \frac{3I_0^2}{\Omega^2} \frac{D_1}{2\pi}$$

и на два порядка превышают крылья спектральной линии кварцевого контура.

Таким образом, сравнивая (7.2.56) с (7.2.57), следует прежде всего подчеркнуть совпадение пиков спектральных линий для $x(t)$ и $y(t)$, а также большую величину и «богатство» формы пьедестала спектральной линии колебания $x(t)$ по сравнению с колебанием кварцевого контура.

Таким образом, если интересоваться только пиком спектральной линии кварцевого генератора, то безразлично, откуда «снимать» выходное колебание — с кварцевого контура или с анодного контура. Если же важным обстоятельством является малость пьедестала спектральной линии, следует отводить колебание с кварцевого контура.

Именно по этой причине в § 7.4 при анализе технических флуктуаций кварцевого генератора мы будем рассматривать только колебание кварцевого контура.

§ 7.3. Сравнение кварцевого генератора с LC-генераторами. Оценка естественной ширины спектральной линии кварцевого генератора

1. Проведем сравнительный анализ естественных флуктуаций в обычном LC- и в кварцевом автогенераторах. Для того чтобы этот анализ был полным, рассмотрим флуктуации еще

в одной схеме — схеме одноконтурного LC -генератора, в которой сеточным контуром служит кварц (рис. 7.8). Эта схема является как бы одноконтурным кварцевым генератором, хотя практически, разумеется, кварц по такой схеме не может быть включен в автогенератор.

Мы привели схему теоретического одноконтурного кварцевого автогенератора. Расчет флуктуаций в такой схеме и сравнение их с флуктуационными характеристиками кварцевого генератора, с одной стороны, и обычных LC -генераторов, с другой стороны, позволит полнее выявить специфику как присутствия кварца в автогенераторе, так и специфику собственно *двухконтурного* генератора. Уравнения схемы имеют вид

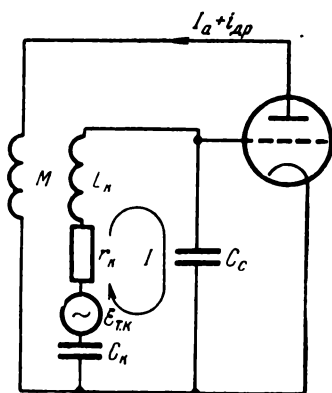


Рис. 7.8.

$$L_k \dot{I} + r_k I + \frac{1}{C_k} \int I dt + \frac{1}{C_c} \int I dt = \mathcal{E} - M \frac{dI'_a}{dt},$$

$$I'_a = Sv(1 - \beta_0 v^2) + i_{дp}, \quad v = -\frac{1}{C_c} \int I dt.$$

Отсюда нетрудно найти для $x = v$:

$$\ddot{x} + \omega_1^2 x = F(x, \dot{x}) + \omega_1^2 E(t),$$

$$F(x, \dot{x}) = (g\dot{x} - h\dot{x}x^2) h'_k, \quad (7.3.1)$$

$$E(t) = -h'_k \mathcal{E}_\tau(t) + M h'_k \frac{dI_{дp}}{dt}.$$

Здесь

$$\omega_1^2 = \frac{1}{L_k} \left(\frac{1}{C_c} + \frac{1}{C_k} \right), \quad h'_k = \frac{C_k}{C_k + C_c}, \quad g = \omega_1^2 (MS - r_k C_c),$$

$$h = 3MS\omega_1^2 \beta_0.$$

Условием самовозбуждения этого автогенератора является неравенство $MS > r_k C_c$. Вследствие малости g можно принять, что $MS \approx r_k C_c$, следовательно,

$$h'_k M \approx \frac{r_k C_c h'_k}{S} = \frac{1}{\omega_1^2 S Z_{оца} C_c}, \quad Z_{оца} = \frac{L_k}{r_k C_c}.$$

Уравнение (7.3.1) справедливо при любых C_K и C_c . Если зафиксировать величины ω_1^2 и C_c , то, изменяя C_K от малых величин (по сравнению с C_c) до больших, т. е. изменяя h'_K от величины, много меньшей единицы, до единицы, мы получим плавный переход схемы, показанной на рис. 7.8, от схемы одноконтурного кварцевого генератора до схемы LC -генератора с контуром в сеточной цепи.

Введем добротность $Q_a = 1/r_K \omega_1 C_c$ — предельную добротность контура при $h'_K \rightarrow 1$, совпадающую с добротностью контура LC -генератора. Тогда легко видеть, что $h'_K = Q_a/Q_K$, где $Q_K = L_K \omega_1 / r_K$.

Уравнение (7.3.1) с точностью до множителя h'_K полностью совпадает с уравнением для LC -генератора с контуром в сеточной цепи. Поэтому, воспользовавшись результатами § 5.5, можно сразу же записать выражение для ширины спектральной линии исследуемого одноконтурного кварцевого генератора:

$$\Delta\Omega_{K.T} = \frac{\omega_1^2 \pi}{4R_0^2} [h_K'^2 2kTr_K + s_{Ma}^2 h_K' e I_0 \Gamma^2 Q_a^2 r_K^2]. \quad (7.3.2)$$

Здесь $s_{Ma} = 1/SZ_{oea}$.

Приведем теперь выражения естественной ширины спектральной линии для LC -генераторов с контурами в анодной и сеточных цепях (см. (5.5.7) и (5.5.15)):

$$\Delta\Omega_{LCa} = \frac{\omega_0^2 \pi}{4R_0^2} [s_M^2 2kTr + s_M^2 e I_0 \Gamma_-^2 Q^2 r^2], \quad (7.3.3)$$

$$\Delta\Omega_{LCc} = \frac{\omega_0^2 \pi}{4R_0^2} [2kTr + s_M^2 e I_0 \Gamma^2 Q^2 r^2], \quad (7.3.4)$$

где $s_M = 1/Z_{oe} S$, $Z_{oe} = L/rC$. Нетрудно видеть, что (7.3.4) получается, как это и должно быть, из (7.3.2) при $h'_K \rightarrow 1$ (принимая во внимание, что $C = C_c$, $s_{Ma} = s_M$). И, наконец, для кварцевого двухконтурного генератора мы получили (см. (7.2.39))

$$\Delta\Omega_K = \frac{\omega_0^2 \pi}{4R_0^2} [(s_2^2 + s_q)(2kTr + e I_0 \Gamma^2 Q_a^2 r^2) + h_K'^2 2kTr_K], \quad (7.3.5)$$

где $s_q = \delta + \Delta_1$.

Встречающиеся в формулах (7.3.2) — (7.3.5) коэффициенты h_K , h_K' , s_M , s_{Ma} , s_2 , s_q представляют собой коэффициенты связи источников шума с лампой. Коэффициенты h_K и h_K' — суть по существу коэффициенты передачи ЭДС тепловых шумов сеточного

контура на сетку; s_2 , s_q , s_M , s_{Ma} — коэффициенты передачи напряжения дробовых шумов (падающего на анодном контуре) и ЭДС тепловых шумов анодного контура на сетку лампы.

Имея это в виду, нетрудно с физической точки зрения уяснить разницу между формулами (7.3.2) — (7.3.5). Для LC -генератора с контуром в сеточной цепи тепловые шумы контура непосредственно передаются на сетку лампы, поэтому в (7.3.4) коэффициент перед $2kT\tau$ равен единице. Для кварцевых генераторов (одноконтурного и двухконтурного) тепловые шумы кварцевого контура передаются на сетку через отношение $\frac{C_k}{C_c + C_k}$;

это и находит свое отражение в коэффициентах h'_k и h_k (у двухконтурного генератора с точки зрения кварца параллельно емкости C_c подключена емкость C_1 , поэтому для него $h_k = \frac{C_k}{C_c + C_k + C_1}$).

Для LC -генератора с контуром в анодной цепи, а также для анодного контура двухконтурного кварцевого генератора тепловые шумы наравне с дробовыми шумами пересчитываются на сетку лампы с коэффициентами s_M , s_2 , s_q , отражающими обратную связь с анодной цепи на сеточную. Наконец, для одноконтурного кварцевого генератора дробовые шумы попадают на сетку через две последовательные связи: через s_{Ma} — катушку обратной связи и через h'_k — сеточный контур.

В этой связи одноконтурный генератор по схеме рис. 7.8 и формула (7.3.2) особенно ясно дают понять разницу между кварцевым генератором и LC -генератором с контуром в сеточной цепи. Если добротность кварца намного больше добротности обычного контура $Q_a/Q_k \ll 1$, то $h'_k \approx h_k$ и по тепловым шумам $\Delta\Omega_{k, T}$ и $\Delta\Omega_k$ полностью совпадают. Если $h'_k \approx 1$, $Q_a \approx Q_k$, двухконтурный кварцевый генератор становится эквивалентным обычному LC -генератору с контуром в сеточной цепи. Таким образом, собственно *двухконтурность* кварцевого генератора совершенно не принципиальна.

Если полагать, с другой стороны, что сеточный (кварцевый) контур обладает такой же добротностью, что и анодный, то все четыре формулы дают одинаковые по порядку величины значения $\Delta\Omega$. При этом у двухконтурного генератора $\Delta\Omega$ даже несколько больше, чем у LC -генератора с контуром в аноде, из-за дополнительных тепловых шумов сеточного контура. Таким образом, двухконтурный LC -генератор при прочих равных условиях может быть не лучше, а даже несколько хуже одноконтурного.

Следует отметить также, что двухконтурность генератора, не влияя существенно на $\Delta\Omega$, влияет заметно, из-за повышения числа степеней свободы, только на форму спектральных плот-

ностей амплитудных и частотных флуктуаций (и, следовательно, на форму пьедестала спектральной линии), приводя к появлению в спектральных плотностях различных максимумов и минимумов.

Какую же основную особенность имеет кварцевый генератор с точки зрения естественных шумов? Только ту, которая объясняется большой добротности кварцевого контура — малому значению коэффициентов связи s_2 , s_q , h_k и, следовательно, малому значению $\Delta\Omega$ — по сравнению с обычными генераторами. Если и в одноконтурных LC -генераторах мы употребим столь же высокодобротный контур, то получим такие же малые значения s_M и $\Delta\Omega$, как и у кварцевого генератора.

Можно рассмотреть в самом общем случае влияние повышения добротности контура и, следовательно, уменьшение его связи с лампой на естественную ширину спектральной линии генератора.

Пусть какой-либо добротности и связи контура с лампой соответствует уравнение

$$\ddot{x} + \omega_1^2 x = F(x, \dot{x}) + \omega_1^2 \mathcal{E}(t),$$

где x — напряжение на сетке, а $\mathcal{E}(t)$ — шумы, пересчитанные на сетку. Пусть теперь связь контура с сеткой ослаблена в n раз, а добротность контура повышена в n раз. При этом будем считать, что регулярное напряжение, попадающее на сетку, и частота автоколебаний сохраняют прежние значения, следовательно, ω_1^2 и R_0 останутся прежними.

Потери при этом уменьшатся в n раз, а ЭДС шумов, пересчитанных на сетку, также уменьшится в n раз. Уравнение движения тогда будет иметь вид

$$\ddot{x} + \omega_1^2 x = \frac{1}{n} F(x, \dot{x}) + \omega_1^2 \frac{1}{n} \mathcal{E}(t).$$

Уменьшение $F(x, \dot{x})$ в n раз приведет к такому же уменьшению прочности предельного цикла и неизохронности, а уменьшение ЭДС шумов в n раз приведет к уменьшению ширины спектральной линии по крайней мере в n^2 раз. Вместо $\Delta\Omega$ будет $\Delta\Omega/n^2$. Заметим, что мы получим также величину $\Delta\Omega/n^2$, если вместо увеличения добротности (при уменьшении связи) увеличим крутизну лампы в n раз.

Таким образом, именно уменьшение связи контура с лампой и является основной причиной уменьшения $\Delta\Omega$. Это является определяющим и для кварцевого автогенератора.

2. Перейдем теперь к численной оценке $\Delta\Omega_k$. Пусть анодный контур обладает параметрами $r=1$ ом, $Q=10^2$. Кроме того, как

и ранее, положим, что $I_0 = 10$ ма, $S = 3$ ма/в, $\Gamma^2 = 0,2$, $T = 300^\circ \text{ К}$. Тогда

$$2kTr = 8 \cdot 10^{-21} \text{ в}^2/\text{гц}, \quad eI_0\Gamma^2Q^2r^2 = 3,2 \cdot 10^{-18} \text{ в}^2/\text{гц},$$

и тепловыми шумами анодного контура, как и для LC -генератора с контуром в аноде, можно пренебречь по сравнению с дробовыми.

Для избежания громоздких расчетов примем, завышая значение $\Delta\Omega$, что $s_q = s_2^2$, что безусловно можно сделать, ибо s_2^2 и s имеют одинаковый порядок малости.

Оценим величины s_2 и h_k . Считая, что генератор работает вблизи порога самовозбуждения, будем иметь

$$l \approx \frac{2V\bar{\lambda}_0}{s_2Q_k h_k \sqrt{Q_a}}, \quad l = \frac{S}{\omega_1 C}, \quad \lambda_0 = s_1 s_2 h_k Q_k + \frac{1}{Q_a}.$$

Поскольку первое слагаемое λ_0 обычно меньше второго, можем считать, что $\lambda_0 = 1/Q_a$. В этом случае имеем

$$s_2 h_k = \frac{2}{Q_k Q_a l}.$$

Обычно C_1 на два порядка больше C_k . Поэтому можем считать, что $h_k = s_2 \cdot 10^{-2}$. Таким образом, для s_2 имеем следующую оценку:

$$s_2^2 = \frac{2 \cdot 10^2}{Q_k Q_a l}.$$

Пусть $C = 2,4 \cdot 10^{-9}$ ф, $f = 10^5$ гц, $Q_k = 10^5$. Тогда $l = 2$, $s_2^2 = 10^{-5}$, $h_k^2 = 10^{-9}$. Пусть также $r_k = 10^3$ ом, $R_0 = 1$ в. В этом случае естественная ширина спектральной линии кварцевого генератора определяется дробовыми шумами лампы и равна

$$\Delta F = \frac{\Delta\Omega}{2\pi} = 3,5 \cdot 10^{-12} \text{ гц},$$

что примерно в 100 раз меньше, чем для LC -генераторов.

Относительная естественная стабильность кварцевого генератора равна, следовательно,

$$\delta f = 3,5 \cdot 10^{-17}.$$

§ 7.4. Технические флуктуации в кварцевом генераторе

Аналогично тому, как это было сделано для томсоновских LC -генераторов в гл. 6, для кварцевого автогенератора также можно провести подробный анализ влияния флуктуаций его параметров на стабильность амплитуды и частоты.

Однако можно показать, что не только в отношении естественных флуктуаций, но и в отношении технических флуктуаций кварцевый автогенератор во многом подобен LC -генераторам. Поэтому мы ограничимся рассмотрением лишь частного случая, когда имеются флуктуации емкости анодного контура и крутизны лампы.

1. Рассмотрим кварцевый автогенератор (рис. 7.2), в котором емкость анодного контура C и крутизна лампы S испытывают флуктуации. Естественными шумами будем пренебрегать. В этом случае выражения (7.2.1) остаются справедливыми и из них для x и y можно получить следующие уравнения:

$$\ddot{x} + \omega_a^2(1 + r\dot{C} + L\ddot{C})x = -\Pi_a\dot{x}\left[1 + \frac{L}{r}\frac{2\dot{C}}{C+C_1}\right] + s_1\ddot{y} - \frac{\dot{I}_a}{C+C_1},$$

$$\ddot{y} + \omega_1^2 y = -\frac{\omega_1}{Q_K}\dot{y} + s_2(\ddot{x} + \omega_K^2 x).$$

Рассматривая малые относительные флуктуации δC и δS , эти уравнения можно привести к виду (7.1.22), где случайные функции, стоящие в правых частях, равны

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_1(t, x, \dot{x}, y, \dot{y}) &= \omega_1^{-2}(\omega_1^2 x - \Pi_a \dot{x})\delta C - \omega_1^{-2}(2\dot{x} + \Pi_a x)\frac{d}{dt}\delta C - \\ &- \omega_1^{-2}x\frac{d^2}{dt^2}\delta C - \omega_1^{-2}\frac{S}{C+C_1}\dot{y}(1 - 3\beta y^2)\delta S - \\ &- \omega_1^{-2}\frac{S}{C+C_1}y(1 - \beta y^2)\frac{d}{dt}\delta S, \\ \mathcal{F}_2(t, x, \dot{x}, y, \dot{y}) &= s_2\mathcal{F}_1(t, x, \dot{x}, y, \dot{y}).\end{aligned}$$

Действуя в соответствии с п. 5 § 7.1 и полагая, что флуктуации емкости и крутизны являются медленными по сравнению с частотой автоколебаний ω_0 , можно отыскать случайные функции $g_{\parallel 1}(t)$, $g_{\parallel 2}(t)$, $g_{\perp 1}(t)$, $g_{\perp 2}(t)$. Подставляя их в (7.1.24), получим следующие флуктуационные уравнения для технических флуктуаций амплитуды и частоты кварцевого автогенератора:

$$\begin{aligned}\frac{d\alpha_1}{dt} &= -p_{11}\alpha_1 - p_{12}\alpha_2 - p_{13}\alpha_3 + \frac{\omega_1}{2}s_2[g_2^{-1}\delta C + n\delta S], \\ \frac{d\alpha_2}{dt} &= -p_{21}\alpha_1 - p_{22}\alpha_2 - p_{23}\alpha_3 + \frac{\omega_1}{2}g_1[g_2^{-1}\delta C + n\delta S], \\ \frac{d\alpha_3}{dt} &= -p_{31}\alpha_1 - p_{32}\alpha_2 - p_{33}\alpha_3 + \frac{\omega_1}{2}g_2[g_1^{-1}\delta C - n\omega_1^{-1}\frac{d}{dt}\delta S], \\ v &= -q_1\alpha_1 - q_2\alpha_2 - q_3\alpha_3 - \frac{\omega_1}{2}s_2[g_1^{-1}\delta C - n\omega_1^{-1}\frac{d}{dt}\delta S],\end{aligned}\tag{7.4.1}$$

где обозначено $n = l\left[1 - \frac{3}{4}\beta_0 R_0^2\right]$.

Поскольку $s_2 \sim \mu \ll 1$, а g_1 и g_2 имеют порядок единицы, то правые части первого и четвертого уравнений на порядок (по отношению к μ) меньше правых частей второго и третьего уравнений. Это приводит, прежде всего, к тому, что интенсивность амплитудных флуктуаций кварца на порядок меньше интенсивности амплитудных флуктуаций анодного контура. Это значит, что, как и для естественных флуктуаций, малая связь кварцевого контура с анодным контуром и, следовательно, с лампой (мы полагаем, что сеточных токов нет), определяемая коэффициентом s_2 , как бы «предохраняет» кварц от флуктуаций параметров других элементов схемы. По этой же причине и частота кварцевого генератора слабо зависит от флуктуаций параметров анодного контура и лампы.

Из четвертого уравнения следует, что флуктуации частоты кварцевого генератора порождаются не только флуктуациями емкости анодного контура (что естественно, так как от C зависит поправка на частоту $\Delta\omega_0$), но и флуктуациями крутизны лампы, что не тривиально, поскольку ω_0 от S не зависит. И именно поэтому флуктуации частоты зависят от производной флуктуаций крутизны.

Таким образом, хотя сколь угодно медленные флуктуации крутизны и не влияют на частоту генератора, быстрые флуктуации крутизны (а они всегда есть) оказывают на нее определенное воздействие.

2. Общий анализ технических флуктуаций амплитуды и частоты кварцевого генератора, как это следует из вида уравнения (7.4.1), является громоздким вследствие коррелированности случайных функций, входящих в правую часть. Поэтому для дальнейшего рассмотрения ограничимся еще более частным случаем, когда имеются только флуктуации емкости.

Для амплитудных флуктуаций получаем уравнения (7.2.19), где

$$F_i = \frac{\omega_1}{2} \left[D_{i2} \frac{d^2}{dt^2} \delta C + D_{i1} \frac{d}{dt} \delta C + D_{i0} \delta C \right],$$

$$D_{i0} = P_{1i} \frac{s_2}{g_2} + P_{2i} \frac{g_1}{g_2} + P_{3i} \frac{g_2}{g_1}, \quad i = 1, 2, 3,$$

$$D_{11} = \Pi_a \frac{s_2}{g_2} - p_{12} \frac{g_1}{g_2} - p_{13} \frac{g_2}{g_1}, \quad D_{21} = \frac{1}{2} \Pi_a \frac{g_1}{g_2} - p_{23} \frac{g_2}{g_1},$$

$$D_{31} = \frac{1}{2} \Pi_a \frac{g_2}{g_1} - p_{32} \frac{g_1}{g_2}, \quad D_{12} = \frac{s_2}{g_2}, \quad D_{22} = \frac{g_1}{g_2}, \quad D_{32} = \frac{g_2}{g_1}.$$

Спектральные плотности технических амплитудных флуктуаций равны

$$S_{\text{ак}}(\Omega) = \frac{\omega_1^2}{4} \frac{D_{\kappa 2}^2 \Omega^4 + (D_{\kappa 1}^2 - 2D_{\kappa 2} D_{\kappa 0}) \Omega^2 + D_{\kappa 0}^2}{(\Omega^2 + \Omega_1^2) [(\Omega^2 - \Omega_0^2)^2 + \Pi_a^2 \Omega^2]} S_{\delta c}(\Omega). \quad (7.4.2)$$

Если спектральная плотность флуктуаций емкости $S_{\delta C}(\Omega)$ является постоянной в интервале частот $(0, \Omega^*)$, где $\Pi_a \ll \Omega^* \ll \omega_0$, то спектр технических амплитудных флуктуаций по форме почти полностью совпадает со спектром естественных амплитудных флуктуаций. Если флуктуации емкости являются фликкерными, то вид спектральной зависимости существенно отличается от спектра естественных амплитудных флуктуаций. Тем не менее в обоих случаях характерно наличие экстремумов в спектре амплитудных флуктуаций.

Для технических флуктуаций частоты из (7.4.1) можно получить следующее уравнение:

$$\ddot{v} + a_2 \ddot{v} + a_1 \dot{v} + a_0 v = -\frac{\omega_0}{2} \left[\frac{s_2}{g_1} \frac{d^3}{dt^3} \delta C + \left(D_{42} + \Pi_a \frac{s_2}{g_1} \right) \frac{d^2}{dt^2} \delta C + \left(D_{41} + \Omega_0^2 \frac{s_2}{g_1} \right) \frac{d}{dt} \delta C + \left(D_{40} + \Omega_0^2 \Omega_1 \frac{s_2}{g_1} \right) \delta C \right],$$

где $D_{4k} = -q_1 D_{1k} - q_2 D_{2k} - q_3 D_{3k}$.

Отсюда находим спектральную плотность технических флуктуаций частоты кварцевого генератора

$$S_v(\Omega) = \frac{\omega_0^2}{4} \left\{ \frac{N_4 \Omega^4 + N_2 \Omega^2 + N_0}{(\Omega^2 + \Omega_1^2) [(\Omega^2 - \Omega_0^2)^2 + \Pi_a^2 \Omega^2]} + \left(\frac{s_2}{g_1} \right)^2 \right\} S_{\delta C}(\Omega). \quad (7.4.3)$$

Здесь введены следующие обозначения для коэффициентов числителя дроби:

$$N_4 = D_{42}^2 + 2 \frac{s_2}{g_1} (D_{42} \Pi_a - D_{41}),$$

$$N_2 = D_{41}^2 + 2 \frac{s_2}{g_1} D_{41} \Omega_0^2, \quad N_0 = D_{40}^2 + 2 \frac{s_2}{g_1} D_{40} \Omega_0^2 \Omega_1.$$

Сравнивая спектральную плотность (7.4.3) с (7.2.42), видим опять очень много общего. Если в указанном интервале $S_{\delta C}(\Omega) = \text{const}$, то формы спектров частоты почти полностью совпадают для естественных и технических флуктуаций частоты. Это значит, прежде всего, что наличие или отсутствие корреляций между правыми частями флуктуационных уравнений (7.4.1) или (7.2.17) в общем мало сказывается на форме спектральных плотностей и влияет в основном на величину коэффициентов числителя (но не на их порядки малости). Первое слагаемое в (7.4.3) отражает влияние на частоту генератора флуктуаций амплитуды и непосредственно зависит от неизохронности q_1, q_2, q_3 . Второе слагаемое в (7.4.3) отражает непосредственное влияние флуктуаций емкости анодного контура на частоту автоколебаний. Это влияние становится тем меньше, чем меньше ко-

эффицент связи s_2 и чем больше отношение $g_1^2 = R_0^2/P_0^2$, соответствующее отношению мощности колебаний кварца к части мощности колебаний анодного контура.

Если флуктуации частоты порождаются фликкерным шумом и пропорциональны $\Omega^{-\gamma}$, то для $\Omega \ll \Omega_1$, согласно (7.4.3), спектральная плотность флуктуаций частоты также будет пропорциональна $\Omega^{-\gamma}$. Поэтому поведение $S_v(\Omega)$ на малых Ω и определит техническую ширину спектральной линии кварцевого генератора.

Пусть

$$S_{\delta c}(\Omega) = \frac{A_c}{2\pi |\Omega|^\gamma}, \quad 0 < \gamma < 3.$$

Тогда для $\Omega \ll \Omega_1$

$$S_v(\Omega) = \frac{\omega_0^2}{4} \frac{N_0}{\Omega_1^2 \Omega_0^4} \frac{A_c}{2\pi |\Omega|^\gamma}.$$

На основании § 4.5 этой спектральной плотности флуктуаций частоты соответствуют следующие значения относительной ширины спектральной линии:

$$\delta f = 7 \frac{\sqrt{N_0}}{\Omega_1 \Omega_0^2} \sqrt{A_c}, \quad \gamma = 0.99,$$

$$\delta f = \frac{\sqrt{N_0}}{\Omega_1 \Omega_0^2} \sqrt{\frac{A_c}{\Omega_b}} \sqrt{\ln \Omega_b \Omega_0}, \quad \gamma = 1,$$

$$\delta f = \frac{\sqrt{N_0}}{\Omega_1 \Omega_0^2} \sqrt{\frac{\pi A_c t_0^{\gamma-1}}{2\Gamma(\gamma) \sin \frac{\pi}{2} (\gamma-1)}}, \quad 1 < \gamma < 3.$$

По сравнению с LC -генераторами (см. (6.4.32)) эти значения уменьшены в $(\sqrt{N_0}/\Omega_1 \Omega_0^2)^{-1}$ раз. Величина $N_0/\Omega_1^2 \Omega_0^4$ имеет порядок малости μ^2 . Следовательно, *техническая* ширина спектральной линии у кварцевого генератора уменьшилась по сравнению с LC -генераторами (при прочих равных условиях) в μ^{-1} раз, в то время как естественная — в μ^{-2} раз.

Эта разница связана с тем, что естественная ширина линии пропорциональна $S_v(0)$, а техническая — $\sqrt{\langle v^2 \rangle}$. При умножении спектральной плотности $S_v(\Omega)$, например, на множитель B^2 , естественная ширина умножается на B^2 , а техническая — на B .

Глава 8

ФЛУКТУАЦИИ В АВТОГЕНЕРАТОРАХ СО МНОГИМИ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

Рассмотрение флуктуаций в двухконтурных генераторах, проведенное в предыдущей главе, показало, что даже для генератора с двумя степенями свободы более или менее точный анализ флуктуаций является довольно громоздким. Если брать генераторы со многими степенями свободы, то флуктуационные уравнения будут для них настолько громоздкими, что сколь-нибудь точный анализ последних будет практически невозможен. По этой причине представляется, несомненно, ценным проведение хотя бы приближенного исследования флуктуаций в таких системах. Одно из приближений может, например, основываться на отбрасывании высших производных во флуктуационных уравнениях, что по существу означает рассмотрение сравнительно медленных флуктуаций амплитуд и фаз. Такое рассмотрение не позволит получить точные выражения для спектров флуктуаций и тем самым для формы спектральной линии, но все же дает возможность оценить ширину спектральной линии генератора со многими степенями свободы, которая определяется медленными флуктуациями частоты.

В настоящее время известны всего три работы (1958 [19], 1960 [3], 1961 [4]), в которых проводится анализ (приближенный) флуктуаций в автогенераторах со многими степенями свободы. На двух первых из них и основывается изложение настоящей главы.

§ 8.1. Естественные флуктуации в автогенераторах со многими степенями свободы

1. Пусть автоколебательная система, имеющая $N/2$ степеней свободы, дающая автоколебания, близкие к синусоидальным, и находящаяся под воздействием случайных шумов, описывается следующим дифференциальным уравнением N -го

порядка:

$$a_N \frac{d^N x}{dt^N} + \dots + a_k \frac{d^k x}{dt^k} + \dots + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = \\ = F\left(x, \dots, \frac{d^l x}{dx^l}, \dots\right) + E(t). \quad (8.1.1)$$

Здесь $l=1, 2, \dots, m, m \leq N$ ($a_N \neq 0$). Функция $F(x, \dots, d^l x/dt^l, \dots)$, являясь малой величиной, содержит все нелинейные комбинации аргументов, которые мы полагаем малыми, и те x и $d^k x/dt^k$, у которых имеется малый множитель. Функция $E(t)$ по-прежнему представляет малые случайные воздействия. Тем самым правая часть (8.1.1) является малой величиной.

Для нахождения флуктуаций амплитуды и фазы колебания у системы (8.1.1) мы применим несколько иной метод по сравнению с § 5.2, что связано, во-первых, с тем, что в (8.1.1) имеются высшие производные, и, во-вторых, с тем, что член $a_1 dx/dt$ может и не быть малым.

Будем полагать, что в отсутствие флуктуационного воздействия, когда $E(t) \equiv 0$, приближенное стационарное решение уравнения (8.1.1) имеет вид (рассматриваем только устойчивые решения)

$$x = R_0 \cos \omega_0 t. \quad (8.1.2)$$

Пусть $F(x, \dots, d^l x/dt^l, \dots)$ при подстановке $x = R \cos \omega t$ дает следующее разложение Фурье (при этом R считается постоянной величиной):

$$F(R \cos \omega t, -\omega R \sin \omega t, \dots) = \\ = \Psi(\omega, R) \cos \omega t + \Phi(\omega, R) \sin \omega t + \text{высшие гармоники}. \quad (8.1.3)$$

Очевидно, что функции $\Psi(\omega, R)$ и $\Phi(\omega, R)$, входящие в (8.1.3), совпадают с теми, которые были введены в § 5.2 для случая, когда все a_k , кроме a_2 и a_0 , равны нулю. Нетрудно видеть, что стационарные значения амплитуды R_0 и частоты ω_0 автоколебания являются корнями уравнений

$$R(a_0 - a_2 \omega^2 + a_4 \omega^4 - a_6 \omega^6 + \dots) = \Psi(\omega, R), \\ R(-a_1 \omega + a_3 \omega^3 - a_5 \omega^5 + \dots) = \Phi(\omega, R). \quad (8.1.4)$$

Пусть теперь случайные воздействия $E(t)$ не являются тождественным нулем. Приближенное решение уравнения (8.1.1) ищем в виде

$$x = (R_0 + \rho) \cos \vartheta, \quad \vartheta = \omega_0 t + \varphi, \quad (8.1.5)$$

где $\rho = \rho(t)$ и $\varphi = \varphi(t)$ — флуктуации амплитуды и фазы, функции медленные по сравнению с $\cos \omega_0 t$. Кроме этого, считаем, что $|\rho| \ll R_0$, $|\dot{\varphi}| \ll \omega_0$.

Чтобы получить уравнения для ρ и φ , вычислим производные, входящие в левую ($d^k x/dt^k$) и правую ($d^l x/dt^l$) части уравнения (8.1.1). Из (8.1.5), сохраняя в силу медленности ρ и φ лишь первые производные $\dot{\rho}$ и $\dot{\varphi}$ (в этом и заключается основное приближение настоящего метода), получим

$$\frac{d^k x}{dt^k} = \begin{cases} (-1)^{\frac{k}{2}} \left[(R_0 + \rho) \omega_0^k \cos \vartheta + \frac{d\varphi}{dt} R_0 k \omega_0^{k-1} \cos \vartheta + \right. \\ \qquad \qquad \qquad \left. + \frac{d\rho}{dt} k \omega_0^{k-1} \sin \vartheta \right], & k - \text{четное}, \\ (-1)^{\frac{k-1}{2}} \left[-(R_0 + \rho) \omega_0^k \sin \vartheta - \frac{d\varphi}{dt} R_0 k \omega_0^{k-1} \sin \vartheta + \right. \\ \qquad \qquad \qquad \left. + \frac{d\rho}{dt} k \omega_0^{k-1} \cos \vartheta \right], & k - \text{нечетное}. \end{cases} \quad (8.1.6)$$

Поскольку функция $F(x, \dots, d^l x/dt^l, \dots)$ мала, то при подстановке в нее производных в последних следует положить $\rho \equiv 0$, $\varphi \equiv 0$ (пренебрежение высшим порядком малости). Это приводит к

$$\frac{d^l x}{dt^l} = \begin{cases} (-1)^{\frac{l}{2}} (R_0 + \rho) \omega_0^l \cos \vartheta, & l - \text{четные}, \\ -(-1)^{\frac{l-1}{2}} (R_0 + \rho) \omega_0^l \sin \vartheta, & l - \text{нечетные}. \end{cases} \quad (8.1.7)$$

Подставляя (8.1.7) в функцию F , получим

$$F\left(x, \dots, \frac{d^l x}{dt^l}, \dots\right) = \Psi(\omega_0, R_0 + \rho) \cos \vartheta + \\ + \Phi(\omega_0, R_0 + \rho) \sin \vartheta + \text{высшие гармоники}.$$

Отсюда находим

$$F\left(x, \dots, \frac{d^l x}{dt^l}, \dots\right) = \left[\Psi(\omega_0, R_0) + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial R} \right)_{R_0} \rho \right] \cos \vartheta + \\ + \left[\Phi(\omega_0, R_0) + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial R} \right)_{R_0} \rho \right] \sin \vartheta + \text{высшие гармоники}. \quad (8.1.8)$$

Случайное воздействие $E(t)$, согласно § 5.2, может быть представлено в виде

$$E(t) = e_{\parallel}(t) \cos \omega_0 t - e_{\perp}(t) \sin \omega_0 t,$$

где $e_{\parallel}(t)$ и $e_{\perp}(t)$ даются формулами (5.2.15). Прибавляя и отнимая φ от аргументов косинуса и синуса, можно получить

$$E(t) = (e_{\parallel} \cos \varphi + e_{\perp} \sin \varphi) \cos \vartheta - (e_{\perp} \cos \varphi - e_{\parallel} \sin \varphi) \sin \vartheta. \quad (8.1.9)$$

Подставляя теперь (8.1.6), (8.1.8) и (8.1.9) в (8.1.1), учитывая (8.1.4) приравнявая коэффициенты при $\cos \vartheta$ и $\sin \vartheta$, получаем следующие уравнения для $\varphi(t)$ и $\rho(t)$:

$$\begin{aligned} -a_{\parallel} R_0 \frac{d\varphi}{dt} + a_{\perp} \frac{d\rho}{dt} + b_{\parallel} \rho &= e_{\parallel} \cos \varphi + e_{\perp} \sin \varphi, \\ -a_{\perp} R_0 \frac{d\varphi}{dt} - a_{\parallel} \frac{d\rho}{dt} + b_{\perp} \rho &= e_{\parallel} \sin \varphi - e_{\perp} \cos \varphi. \end{aligned} \quad (8.1.10)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$a_{\parallel} = 2a_2\omega_0 - 4a_4\omega_0^3 + 6a_6\omega_0^5 - 8a_8\omega_0^7 + \dots, \quad (8.1.11)$$

$$a_{\perp} = a_1 - 3a_3\omega_0^2 + 5a_5\omega_0^4 - 7a_7\omega_0^6 + \dots, \quad (8.1.12)$$

$$b_{\parallel} = \left[\frac{\Psi}{R} - \frac{\partial \Psi}{\partial R} \right]_{\omega_0, R_0} = -R_0 \left[\frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{\Psi}{R} \right) \right]_{\omega_0, R_0}, \quad (8.1.13)$$

$$b_{\perp} = \left[\frac{\Phi}{R} - \frac{\partial \Phi}{\partial R} \right]_{\omega_0, R_0} = -R_0 \left[\frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{\Phi}{R} \right) \right]_{\omega_0, R_0}. \quad (8.1.14)$$

Последние формулы видоизменяются, если или $a_2 = a_4 = a_6 = \dots = 0$, или $a_1 = a_3 = a_5 = \dots = 0$. В первом случае b_{\perp} выражается формулой (8.1.14), а $b_{\parallel} = -[\partial \Psi / \partial R]_{\omega_0, R_0}$, во втором случае b_{\parallel} выражается формулой (8.1.13), а $b_{\perp} = -[\partial \Phi / \partial R]_{\omega_0, R_0}$.

Разрешая уравнения (8.1.10) относительно $d\alpha/dt$ (по-прежнему $\alpha = \rho/R_0$) и $d\varphi/dt$, нетрудно найти

$$\frac{d\alpha}{dt} = -p\alpha + \frac{1}{\delta R_0} [a_{\perp} (e_{\parallel} \cos \varphi + e_{\perp} \sin \varphi) - a_{\parallel} (e_{\parallel} \sin \varphi - e_{\perp} \cos \varphi)], \quad (8.1.15)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = -q\alpha - \frac{1}{\delta R_0} [a_{\parallel} (e_{\parallel} \cos \varphi + e_{\perp} \sin \varphi) + a_{\perp} (e_{\parallel} \sin \varphi - e_{\perp} \cos \varphi)],$$

где обозначено

$$p = (b_{\parallel} a_{\perp} - b_{\perp} a_{\parallel}) / \delta, \quad q = -(a_{\parallel} b_{\parallel} + a_{\perp} b_{\perp}) / \delta, \quad \delta = a_{\parallel}^2 + a_{\perp}^2. \quad (8.1.16)$$

Нетрудно видеть, что p и в этом случае имеет смысл прочности предельного цикла, а q — неизохронность автогенератора. Для рассматриваемых устойчивых автоколебаний $p > 0$.

Рассматриваемая автоколебательная система является изохронной, если выполняется одно из условий: $a_{\parallel} = b_{\perp} = 0$ или $a_{\perp} = b_{\parallel} = 0$. Первому условию соответствует отсутствие в левой части (8.1.1) четных производных и $\Phi(\omega, R) \equiv 0$, или $\Phi(\omega, R) \equiv R\Psi_1(\omega)$. Второму условию (которое выполняется, в частности, для рассмотренных в гл. 5 LC-генераторов) соответствует отсутствие нечетных производных в левой части (8.1.1), и $\Psi(\omega, R) \equiv 0$ или $\Psi(\omega, R) \equiv R\Psi_2(\omega)$. Полученные уравнения являются

линейными для малых амплитудных флуктуаций и нелинейными относительно фазовых флуктуаций.

Легко видеть, что уравнения (8.1.15) являются более общими уравнениями (в рамках указанных приближений), чем (5.2.16); последние легко могут быть получены из первых. В самом деле, пусть уравнение (8.1.1) сводится к уравнению

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_1^2 x = F(x, \dot{x}) + \omega_1^2 E(t).$$

При этом

$$a_0 = \omega_1^2, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = 1, \quad a_3 = a_4 = \dots = 0.$$

Тогда, очевидно,

$$a_{\parallel} = 2\omega_0, \quad a_{\perp} = 0, \quad \delta = a_{\parallel}^2, \quad p = -\frac{b_{\perp}}{a_{\parallel}}, \quad q = -\frac{b_{\parallel}}{a_{\parallel}},$$

и (8.1.15) переходит в (5.2.16).

Таким образом, как для генератора с одной степенью свободы, так и для генератора с большим числом степеней свободы (при принятом пренебрежении членами с высшими производными флуктуаций $\alpha(t)$ и $\varphi(t)$) структура уравнений для флуктуаций амплитуды и фазы подобна и вся разница сводится к различным коэффициентам правой части.

Как следует из § 5.3, для случая естественных флуктуаций $E(t)$ функции корреляции для $e_{\parallel}(t)$ и $e_{\perp}(t)$ равны

$$\Phi_{\parallel}(\tau) = \Phi_{\perp}(\tau) = 4\pi c_0 \delta(\tau), \quad \Phi_{\parallel\perp}(\tau) = 0, \quad c_0 = S_E(\omega_0).$$

Применяя метод уравнения ЭФП, нелинейные уравнения (8.1.15) можно заменить статистически эквивалентными линейными уравнениями

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{dt} &= -p\alpha + \frac{1}{\delta R_0} [a_{\parallel} e_{\perp}(t) + a_{\perp} e_{\parallel}(t)], \\ \frac{d\varphi}{dt} &= -q\alpha - \frac{1}{\delta R_0} [a_{\parallel} e_{\parallel}(t) - a_{\perp} e_{\perp}(t)], \end{aligned} \quad (8.1.17)$$

полученными из (8.1.15) при подстановке $\varphi \equiv 0$ в правую часть.

2. Исследуем полученные флуктуационные уравнения. Разрешим первое уравнение (8.1.17) относительно $\alpha(t)$, положив $\alpha(0) = 0$ и рассматривая установившиеся процессы ($pt \gg 1$); второе уравнение запишем для флуктуаций частоты $\nu(t) = d\varphi/dt$.

$$\alpha(t) = \frac{1}{\delta R_0} \int_0^{\infty} e^{-\nu x} [a_{\parallel} e_{\perp}(t-x) + a_{\perp} e_{\parallel}(t-x)] dx, \quad (8.1.18)$$

$$\nu(t) = -q\alpha(t) - \frac{1}{\delta R_0} [a_{\parallel} e_{\parallel}(t) - a_{\perp} e_{\perp}(t)].$$

Отсюда нетрудно найти функции корреляции:

$$\begin{aligned}\Phi_a(\tau) &= \frac{2\pi c_0}{\delta p R_0^2} e^{-p|\tau|}, \\ \Phi_v(\tau) &= \frac{4\pi c_0}{\delta R_0^2} \left[\frac{q^2}{2p} e^{-p|\tau|} + \delta(\tau) \right], \\ \Phi_{av}(\tau) &= -q \frac{2\pi c_0}{\delta p R_0^2} e^{-p|\tau|},\end{aligned}\quad (8.1.19)$$

и спектральные плотности

$$\begin{aligned}S_a(\Omega) &= \frac{2c_0}{\delta R_0^2} \frac{1}{\Omega^2 + p^2}, \quad S_v(\Omega) = \frac{2c_0}{\delta R_0^2} \left[\frac{q^2}{\Omega^2 + p^2} + 1 \right], \\ S_{av}^0(\Omega) &= -q \frac{2c_0}{\delta R_0^2} \frac{1}{\Omega^2 + p^2}, \quad S_{av}^1(\Omega) \equiv 0.\end{aligned}\quad (8.1.20)$$

Используя вторую формулу (8.1.19), найдем средний квадрат набега фазы ($\tau > 0$):

$$\chi(\tau) = \frac{4\pi c_0}{\delta p R_0^2} \left\{ \left(1 + \frac{q^2}{p^2} \right) p\tau - \frac{q^2}{p^2} (1 - e^{-p\tau}) \right\}. \quad (8.1.21)$$

Сравнивая полученные формулы (8.1.19), (8.1.20) с формулами (5.4.2), (5.4.3), видим, что они полностью совпадают, если принять, что $D = 4\pi c_0 / \delta R_0^2$.

Таким образом, в условиях одночастотного устойчивого автоколебания автогенераторы с $N/2$ степенями свободы в принятом приближении имеют тот же вид спектра флуктуаций амплитуды и частоты и, следовательно, ту же самую форму и ширину естественной спектральной линии, что и томсоновский автогенератор с одной степенью свободы (см. (5.4.8)). Поскольку приближение заключалось в отбрасывании сравнительно высокочастотных флуктуаций амплитуды и частоты, то упомянутое совпадение спектров флуктуаций и формы линии является точным только для достаточно малых Ω . При увеличении Ω и в спектрах $S_a(\Omega)$, $S_v(\Omega)$, $S_{av}(\Omega)$, и в форме спектральной линии $W_x(\Omega)$ автогенератора с $N/2$ степенями свободы появляются различные экстремумы. Их состав тем богаче, чем больше N .

Единственная характеристика, которая остается точной, — это ширина пика спектральной линии, ибо она определяется сколь угодно медленными флуктуациями частоты. Используя (5.4.4), найдем следующее значение ширины естественной спектральной линии одночастотного автогенератора с $N/2$ степенями свободы

$$\Delta\Omega = \frac{2\pi^2 c_0}{\delta R_0^2} \left(1 + \frac{q^2}{p^2} \right). \quad (8.1.22)$$

3. Рассмотрим теперь некоторые примеры автогенераторов со многими степенями свободы. В качестве первого примера возьмем емкостную трехточку (рис. 8.1), уравнения движения которой равны

$$L \frac{dI}{dt} + rI + \frac{1}{C_2} \int I dt - \frac{1}{C_1} \int [I_a + i_{др} - I] dt = \mathcal{E}_T,$$

$$v = -\frac{1}{C_2} \int I dt, \quad I_a = Sv(1 - \beta_0 v^2).$$

Здесь I — ток через индуктивность, v — напряжение на сетке лампы, $i_{др}$ — дробовые шумы лампы, \mathcal{E}_T — ЭДС тепловых шумов контура.

Разрешая уравнения относительно напряжения v , получим для него дифференциальное уравнение третьего порядка

$$\begin{aligned} \frac{d^3 v}{dt^3} + \frac{r}{L} \frac{d^2 v}{dt^2} + \omega_1^2 \frac{dv}{dt} = \\ = -\frac{S\omega_1^2}{C_1 + C_2} v(1 - \beta_0 v^2) + \\ + \frac{\omega_1^2}{C_1 + C_2} \left(i_{др} + C_1 \frac{d\mathcal{E}_T}{dt} \right). \end{aligned}$$

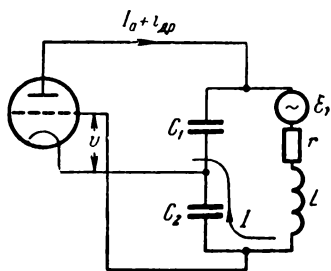


Рис. 8.1.

Переносим малый член с потерями $\frac{r}{L} \frac{d^2 v}{dt^2}$ в правую часть уравнения и обозначая $v = x$, получим окончательно

$$\frac{d^3 x}{dt^3} + \omega_1^2 \frac{dx}{dt} = F\left(x, \frac{d^2 x}{dt^2}\right) + E(t), \quad (8.1.23)$$

где

$$F\left(x, \frac{d^2 x}{dt^2}\right) = -\frac{r}{L} \frac{d^2 x}{dt^2} - \frac{S\omega_1^2}{C_1 + C_2} x(1 - \beta_0 x^2), \quad (8.1.24)$$

$$E(t) = \frac{\omega_1^2}{C_1 + C_2} \left(i_{др} + C_1 \frac{d\mathcal{E}_T}{dt} \right). \quad (8.1.25)$$

Сравнивая (8.1.23) с (8.1.1), имеем

$$a_0 = 0, \quad a_1 = \omega_1^2, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = 1, \quad a_4 = a_5 = \dots = 0, \quad N = 3, \quad l = 2.$$

Найдем параметры стационарного режима автоколебаний. Подставляя $x = R \cos \omega t$ в (8.1.24), находим

$$\Psi(\omega, R) = R \left[\frac{r}{L} \omega^2 - \frac{S\omega_1^2}{C_1 + C_2} \left(1 - \frac{3}{4} \beta_0 R^2 \right) \right], \quad \Phi(\omega, R) \equiv 0.$$

Уравнения для R_0 и ω_0 принимают, согласно (8.1.4), вид

$$\Psi(\omega, R) = 0, \quad -\omega_1^2 \omega + \omega^3 = 0.$$

Частота установившихся автоколебаний равна $\omega_0 = \omega_1$, амплитуда определяется условием

$$R_0^2 = \frac{4}{3\beta_0} \frac{SL - (C_1 + C_2)r}{SL}.$$

Коэффициенты флуктуационного уравнения равны

$$a_{\parallel} = 0, \quad a_{\perp} = -2\omega_0^2, \quad b_{\perp} = 0, \quad b_{\parallel} = -\frac{3\beta_0}{2} \frac{S\omega_0^2}{C_1 + C_2} R_0^2, \\ \delta = 4\omega_0^4, \quad p = \frac{3\beta_0}{4} \frac{S}{C_1 + C_2} R_0^2 = \frac{1}{L(C_1 + C_2)} [SL - (C_1 + C_2)r], \quad q = 0.$$

Из (8.1.25) находим спектральную плотность шума $E(t)$

$$c_0 = S_E(\omega_0) = \frac{\omega_0^4}{(C_1 + C_2)^2 2\pi} [C_1^2 \omega_0^2 2kTr + eI_0 \Gamma^2].$$

Учитывая, что для трехточки обычно $C_1 \ll C_2$, а также что $SL \approx (C_1 + C_2)r$, последнее выражение легко привести к виду

$$c_0 = \frac{\omega_0^6}{2\pi (SZ_{oe})^2} (2kTr + eI_0 \Gamma^2 r Z_{oe}).$$

На основании (8.1.22) естественная ширина спектральной линии емкостной трехточки равна

$$\Delta\Omega = \frac{\pi\omega_0^2}{4R_0^2 (SZ_{oe})^2} (2kTr + eI_0 \Gamma^2 r Z_{oe}).$$

Это значение ширины линии полностью совпадает с тем, которое мы имели для LC -генератора с контуром в анодной цепи.

Учитывая, что левая часть (8.1.23) содержит только два слагаемых и что это уравнение в определенной мере подобно (5.2.1), можно считать, по-видимому, что емкостная трехточка и LC -генератор с контуром в анодной цепи обладают практически сходными флуктуациями амплитуды, фазы и частоты и, следовательно, дают близкие формы спектральных линий, тем более, что эти генераторы отличаются только видом обратной связи.

4. Рассмотрим естественные флуктуации в трехзвенном RC -генераторе, обладающем полутора степенями свободы

(рис. 8.2). Уравнения движения имеют вид

$$(r_0 + r) I_1 + \frac{1}{C} \int I_1 dt - I_2 r = r_0 (I_a + i_{\text{дп}}) + \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_0,$$

$$-r I_1 + 2r I_2 + \frac{1}{C} \int I_2 dt - r I_3 = \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1,$$

$$r I_2 + 2r I_3 + \frac{1}{C} \int I_3 dt = \mathcal{E}_3 - \mathcal{E}_2,$$

$$v = r I_3 - \mathcal{E}_3, \quad I_a = S v (1 - \beta_0 v^2).$$

Здесь $\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3$ — ЭДС тепловых шумов сопротивления r и одинаковых сопротивлений трехзвенной RC -цепочки — r ; I_1, I_2, I_3 — контурные токи, v — напряжение на сетке лампы.

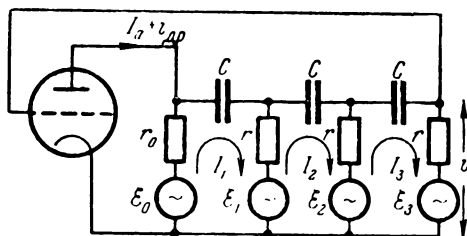


Рис. 8.2.

Вводя обозначения $\tau = rC$, $K = r_0 S$ — усиление каскада, $v = x$, получим (полагая $r_0 \ll r$)

$$(1 + K) \tau^3 \frac{d^3 x}{dt^3} + 6 \tau^2 \frac{d^2 x}{dt^2} + 5 \tau \frac{dx}{dt} + x = F \left(x, \frac{dx}{dt}, \frac{d^2 x}{dt^2}, \frac{d^3 x}{dt^3} \right) + E(t), \quad (8.1.26)$$

где

$$F \left(x, \frac{dx}{dt}, \frac{d^2 x}{dt^2}, \frac{d^3 x}{dt^3} \right) = K \beta \tau^3 (6 \dot{x}^3 + 18 x \dot{x} \ddot{x} + 3 x^2 \ddot{\ddot{x}}), \quad (8.1.27)$$

$$E(t) = \mathcal{E}_3 + \tau \frac{d}{dt} (4 \mathcal{E}_3 + \mathcal{E}_2) + \tau^2 \frac{d^2}{dt^2} (3 \mathcal{E}_3 + 2 \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_1) + \tau^3 \frac{d^3}{dt^3} (\mathcal{E}_0 + r i_{\text{дп}}).$$

Сравнивая (8.1.26) с (8.1.1), находим

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 5\tau, \quad a_2 = 6\tau^2, \quad a_3 = (1 + K)\tau^3, \quad a_4 = a_5 = \dots = 0, \quad N = 3, \quad l = 3.$$

Кроме этого, можно показать, что

$$\Psi(\omega, R) = 0, \quad \Phi(\omega, R) = \frac{3}{4} K \beta \tau^3 R^3 \omega^3.$$

Уравнения для R_0 и ω_0 принимают вид

$$R(1 - 6\tau^2\omega^2) = 0, \quad R[-5\tau\omega + (1 + K)\tau^3\omega^3] = \frac{3}{4} K\beta\tau^3 R^3\omega^3.$$

Отсюда получаем

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{6}\tau}, \quad R_0^2 = \frac{4}{3\beta_0} \frac{K-29}{K}.$$

Далее, нетрудно найти

$$a_{\parallel} = 2\sqrt{6}\tau, \quad a_{\perp} = 5\tau - \frac{(1+K)}{2}\tau, \quad b_{\parallel} = 0, \quad b_{\perp} = -\frac{K-29}{6\sqrt{6}},$$

$$\delta = \left[49 + \frac{1}{4}(1+K)^2 - 5(1+K)\right]\tau^2,$$

$$p = \frac{1}{3\tau} \frac{K-29}{49 + \frac{(1+K)^2}{4} - 5(1+K)}, \quad q = \frac{1}{6\sqrt{6}\tau} \frac{(K-29)\left[5 - \frac{1}{2}(1+K)\right]}{49 + \frac{(1+K)^2}{4} - 5(1+K)}.$$

Предполагая, что все сопротивления RC -генератора имеют одинаковую температуру T , из (8.1.27) с помощью (5.3.1) — (5.3.5) можно получить, что

$$c_0 = \frac{1}{9\pi} \left(29kTr + \frac{r_0^2}{48} eI_0\Gamma^2\right).$$

Теперь легко находится ширина спектральной линии

$$\Delta\Omega = \frac{2\pi}{9\delta R_0^2} \left(1 + \frac{q^2}{p^2}\right) \left(29kTr + \frac{r_0^2}{48} eI_0\Gamma^2\right).$$

Пусть $I_0 = 10$ ма, $T = 300^\circ\text{K}$, $\Gamma^2 = 0,2$; тогда отношение дробовых шумов к тепловым равно

$$\frac{\text{дроб.}}{\text{тепл.}} = \frac{eI_0\Gamma^2}{2kT} \frac{r_0^2}{24 \cdot 29 \cdot r} = \frac{r_0/r}{17,4} r_0 \text{ (ком)}.$$

Если, например, $r_0/r = 1/10$, то

$$\frac{\text{дроб.}}{\text{тепл.}} = \frac{r_0 \text{ (ком)}}{174}.$$

Это отношение показывает, что для $r_0 \ll 174$ ком влиянием дробовых шумов на естественные флуктуации частоты RC -генератора можно пренебречь по сравнению с тепловыми. Дело здесь в том, что при малом r_0 лампой в фазосдвигающую цепочку вносятся сравнительно мало дробовых шумов и только при r_0 , сравнимом с 174 ком, доля дробовых шумов становится сравнимой с тепловыми шумами сопротивлений цепочки.

Оценим числовое значение ширины спектральной линии. Пусть $I_0=10$ ма, $T=300^\circ$ К, $\Gamma^2=0,2$, $f=10^5$ гц, $R_0=1$ в, $K=31$, $r=10$ ком, $r_0=1$ ком. Тогда легко найти $p=2\pi f_0 \cdot 0,023=$
 $=0,14 \cdot 10^5$ рад/сек, $q=-2\pi f_0 \cdot 0,05=-0,3 \cdot 10^5$ рад/сек, и ширина спектральной линии, определяемая тепловыми шумами фазосдвигающей цепочки, равна

$$\Delta f=5 \cdot 10^{-6} \text{ гц.}$$

Ширина спектральной линии RC-генератора примерно на четыре порядка больше, чем для LC-генераторов. Это в основном связано с тем, что сопротивления цепочки RC-генератора также на четыре порядка больше, чем то сопротивление потерь, которое мы брали для LC-контуров.

5. Этот результат, а также сравнение между собой значений $\Delta\Omega$ для рассмотренных в гл. 5 LC-генераторов для емкостной трехточки, для кварцевого генератора и, наконец, для автогенераторов общего вида с $N/2$ степенями свободы позволяет сделать вывод о том, что естественная ширина спектральной линии генераторов зависит главным образом только от потерь (добротностей) контуров, а не от их числа и способов их включения в схему автогенератора.

§ 8.2. Технические флуктуации в автогенераторах со многими степенями свободы

1. Рассмотрим автоколебательную систему с $N/2$ степенями свободы, описываемую в отсутствие каких-либо случайных воздействий уравнением (8.1.1), где $E(t)\equiv 0$. Полагаем, что приближенное решение (8.1.1), его амплитуда и частота по-прежнему определяются выражениями (8.1.2), (8.1.4). Пусть имеются M параметров σ_j ($j=1, 2, \dots, M$), равных $\sigma_j=\langle\sigma_j\rangle+\Delta\sigma_j$, где $\Delta\sigma_j=\Delta\sigma_j(t)$ — флуктуации параметров, являющиеся достаточно малыми функциями времени (при изменении σ_j во времени бифуркационные точки не пересекаются). Уравнение автоколебательной системы, обладающей переменными во времени параметрами, включает в общем случае, кроме самих параметров, и их производные $\sigma_j^{(i)}$ ($i=0, 1, 2, \dots, n$; $n\leq N$). При этом σ_j будем записывать как $\sigma_j^{(0)}$. Очевидно, что

$$\sigma_j^{(i)}=\Delta\sigma_j^{(i)}(t)$$

для $i>0$.

Пусть коэффициенты и правая часть уравнения (8.1.1) зависят теперь от $\sigma_j^{(i)}$ (что будем отмечать штрихом сверху)

$$a'_k=a'_k(\sigma_j^{(i)}), \quad F'=F'(\sigma_j^{(i)}).$$

Учитывая малость $\Delta\sigma_j^{(l)}$, получим, ограничиваясь членами первого порядка малости,

$$a'_k = a_k + \sum_i \sum_j a_{kji} \Delta\sigma_j^{(l)}, \quad F' = F + \sum_i \sum_j F_{ji} \Delta\sigma_j^{(l)},$$

где

$$a_{kji} = \left(\frac{\partial a'_k}{\partial \sigma_j^{(l)}} \right)_0, \quad F_{ji} = \left(\frac{\partial F'}{\partial \sigma_j^{(l)}} \right)_0, \quad a_k = (a'_k)_0, \quad F = (F')_0.$$

Здесь нулик означает, что значения функций и производных берутся при $\Delta\sigma_j^{(l)} \equiv 0$. Тем самым вместо (8.1.1) будем иметь

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k x}{dt^k} = F\left(x, \dots, \frac{d^l x}{dt^l}, \dots\right) + \mathcal{G}\left(t, x, \dots, \frac{d^k x}{dt^k}, \dots\right), \quad (8.2.1)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{G}\left(t, x, \dots, \frac{d^k x}{dt^k}, \dots\right) = \\ = - \sum_k \sum_j \sum_i a_{kji} \frac{d^k x}{dt^k} \Delta\sigma_j^{(l)} + \sum_j \sum_l F_{jl} \Delta\sigma_j^{(l)} \end{aligned} \quad (8.2.2)$$

и играет роль $E(t)$. Из-за малости $\Delta\sigma_j^{(l)}$ малой величиной будет и \mathcal{G} .

Решение полученного уравнения (8.2.1) ищем в виде

$$x = R_0(1 + \alpha) \cos \psi, \quad \psi = \omega_0 t + \varphi,$$

где, как всегда, флуктуации амплитуды и частоты полагаем достаточно малыми. При подстановке x в функцию \mathcal{G} вследствие малости последней полагаем

$$x = \tilde{x} = R_0 \cos \psi.$$

Тогда, отбрасывая высшие гармоники, как величины более высокого порядка малости, получим

$$\mathcal{G}\left(t, \tilde{x}, \dots, \frac{d^k \tilde{x}}{dt^k}, \dots\right) = R_0 g_c(t) \cos \psi - R_0 g_s(t) \sin \psi, \quad (8.2.3)$$

где $g_c(t)$, $g_s(t)$ являются функциями, медленными по сравнению с $\cos \omega_0 t$. Эти функции, умноженные на R_0 , играют роль слагаемых $(e_{\parallel} \cos \varphi + e_{\perp} \sin \varphi)$, $(e_{\perp} \cos \varphi - e_{\parallel} \sin \varphi)$ в представлении $E(t)$ в виде (8.1.9). Поэтому для технических флуктуаций амплитуды и частоты автогенератора с $N/2$ степенями свободы имеем на основании (8.1.15) следующие флуктуационные уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{dt} &= -p\alpha + \frac{1}{\delta} [a_{\perp} g_c(t) + a_{\parallel} g_s(t)], \\ \nu &= -q\alpha - \frac{1}{\delta} [a_{\parallel} g_c(t) - a_{\perp} g_s(t)]. \end{aligned} \quad (8.2.4)$$

Эти уравнения похожи на (8.1.17), но $g_c(t)$ и $g_s(t)$, в отличие от $e_{\parallel}(t)$, $e_{\perp}(t)$, не являются в общем случае дельта-коррелированными. Функции $g_c(t)$, $g_s(t)$ взаимно зависимы, поскольку они порождаются флуктуациями одних и тех же параметров.

2. Для дальнейшего необходимо найти спектрально-корреляционные свойства медленных случайных функций $g_c(t)$, $g_s(t)$. Предположим, что флуктуации параметров $\Delta\sigma_j(t)$ являются медленными по сравнению с $\cos \omega_0 t$. Тогда, подставляя \tilde{x} во второе слагаемое (8.2.2), найдем

$$F_{ji} = R_0 [R_{ji} \cos \theta - T_{ji} \sin \theta].$$

Подставляя эти значения в (8.2.2) и сравнивая результат с (8.2.3), будем иметь

$$\begin{aligned} g_c(t) &= - \sum_j \sum_l (b_{jl}^+ - R_{jl}) \Delta\sigma_j^{(l)}(t), \\ g_s(t) &= - \sum_j \sum_l (b_{jl}^- - T_{jl}) \Delta\sigma_j^{(l)}(t). \end{aligned} \quad (8.2.5)$$

Здесь введены обозначения:

$$b_{jl}^+ = \sum_{k \text{ четн.}} a_{kjl} (-1)^{\frac{k}{2}} \omega_0^k, \quad b_{jl}^- = \sum_{k \text{ нечетн.}} a_{kjl} (-1)^{\frac{k-1}{2}} \omega_0^k.$$

Полученные выражения для g_c и g_s представляют собой суммы по флуктуациям различных параметров и их производным. На основании § 2.1 нетрудно найти функции корреляции, структурные функции и спектральные плотности мощности для $g_c(t)$ и $g_s(t)$, выразив их через те же характеристики для $\Delta\sigma_j(t)$. В общем случае формулы получаются чрезвычайно громоздкими и поэтому нецелесообразно их здесь приводить полностью.

Ограничимся случаем одного параметра $\Delta\sigma(j=1)$, для которого в (8.2.2) входят производные не выше второго порядка. Предположим также, что среднее значение параметра $\langle\sigma\rangle \neq 0$, и будем рассматривать относительные флуктуации параметра $\delta\sigma = \Delta\sigma/\langle\sigma\rangle$. В этом случае с помощью формул (2.1.7), (2.1.11), (2.1.12) можно получить следующие значения спектральных плотностей мощности для $g_c(t)$ и $g_s(t)$:

$$\begin{aligned} S_c(\Omega) &= [g_{0c}^2 - (2g_{0c}g_{2c} - g_{1c}^2)\Omega^2 + g_{2c}^2\Omega^4] S_{\delta\sigma}(\Omega), \\ S_s(\Omega) &= [g_{0s}^2 - (2g_{0s}g_{2s} - g_{1s}^2)\Omega^2 + g_{2s}^2\Omega^4] S_{\delta\sigma}(\Omega), \\ S_{cs}^0(\Omega) &= [g_{0c}g_{0s} - (g_{0c}g_{2s} - g_{1c}g_{1s} + g_{0s}g_{2c})\Omega^2 + \\ &\quad + g_{2c}g_{2s}\Omega^4] S_{\delta\sigma}(\Omega), \\ S_{cs}^1(\Omega) &= [(g_{0s}g_{1c} - g_{0c}g_{1s})\Omega + (g_{1s}g_{2c} - g_{1c}g_{2s})\Omega^3] S_{\delta\sigma}(\Omega). \end{aligned} \quad (8.2.6)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} g_{0c} &= -\langle \sigma \rangle (b_{10}^+ - R_{10}), & g_{0s} &= -\langle \sigma \rangle (b_{10}^- - T_{10}), \\ g_{1c} &= -\langle \sigma \rangle (b_{11}^+ - R_{11}), & g_{1s} &= -\langle \sigma \rangle (b_{11}^- - T_{11}), \\ g_{2c} &= -\langle \sigma \rangle (b_{12}^+ - R_{12}), & g_{2s} &= -\langle \sigma \rangle (b_{12}^- - T_{12}). \end{aligned}$$

3. Решение флуктуационных уравнений (8.2.4) может быть представлено в виде (8.1.18), где следует заменить e_{\parallel} и e_{\perp} соответственно на g_c и g_s . Спектральные плотности мощности флуктуаций амплитуды и частоты автоколебаний находятся с помощью (2.3.20), (2.3.21), (8.1.16):

$$\begin{aligned} S_{\alpha}(\Omega) &= \frac{1}{\delta^2(\Omega^2 + p^2)} [a_{\perp}^2 S_c(\Omega) + 2a_{\perp} a_{\parallel} S_{cs}^0(\Omega) + a_{\parallel}^2 S_s(\Omega)], \\ S_{\nu}(\Omega) &= \frac{1}{\delta^2(\Omega^2 + p^2)} \{ (a_{\parallel}^2 \Omega^2 + b_{\perp}^2) S_c(\Omega) + (a_{\perp}^2 \Omega^2 + b_{\parallel}^2) S_s(\Omega) - \\ &\quad - 2(a_{\parallel} a_{\perp} \Omega^2 - b_{\parallel} b_{\perp}) S_{cs}^0(\Omega) - 2q \delta \Omega S_{cs}^1(\Omega) \}, \\ S_{\alpha\nu}^0(\Omega) &= \frac{1}{\delta^2(\Omega^2 + p^2)} \{ a_{\perp} b_{\perp} S_c(\Omega) + a_{\parallel} b_{\parallel} S_s(\Omega) + \\ &\quad + (b_{\parallel} a_{\perp} + b_{\perp} a_{\parallel}) S_{cs}^0(\Omega) + \delta \Omega S_{cs}^1(\Omega) \}, \\ S_{\alpha\nu}^1(\Omega) &= \frac{1}{\delta^2(\Omega^2 + p^2)} \{ \Omega a_{\perp} a_{\parallel} [S_c(\Omega) - S_s(\Omega)] + \\ &\quad + \Omega (a_{\parallel}^2 - a_{\perp}^2) S_{cs}^0(\Omega) + p \delta S_{cs}^1(\Omega) \}. \end{aligned} \quad (8.2.7)$$

Как видно отсюда, даже для одного флуктуирующего параметра спектры амплитудно-частотных флуктуаций генератора общего типа практически необозримы. Тем не менее некоторые выводы могут быть отсюда получены. Поставим следующий вопрос. Какие условия должны быть наложены на характеристики автогенератора, чтобы флуктуации параметра уширяли спектральную линию?

Для немонахроматичности автоколебания достаточно, чтобы $S_{\nu}(0) \neq 0$. Из (8.2.6) и (8.2.7) нетрудно получить

$$\begin{aligned} S_{\nu}(0) &= \frac{1}{\delta^2 p^2} (b_{\perp} g_{0c} + b_{\parallel} g_{0s})^2 S_{\delta\sigma}(0) = \\ &= \frac{1}{\delta^2 p^2} [b_{\perp} (b_{10}^+ - R_{10}) + b_{\parallel} (b_{10}^- - T_{10})]^2 S_{\Delta\sigma}(0). \end{aligned}$$

Следовательно, будет иметь место уширение спектральной линии, если, во-первых, $S_{\Delta\sigma}(0) \neq 0$ и, во-вторых, выполняется хотя бы одно из условий

$$b_{\perp} (b_{10}^+ - R_{10}) \neq 0, \quad b_{\parallel} (b_{10}^- - T_{10}) \neq 0.$$

Если флуктуации параметра имеют характер белого шума (для всех $\Omega \ll \omega_0$) и $S_{\Delta\sigma}(0) < \infty$, то техническая ширина спектральной линии рассматриваемого автогенератора равна

$$\Delta\Omega = \frac{\pi^2}{\delta^2 p^2} [b_{\perp} (b_{10}^+ - R_{10}) + b_{\parallel} (b_{10}^- - T_{10})]^2 S_{\Delta\sigma}(0). \quad (8.2.8)$$

Если же флуктуации параметра носят фликкерный характер и $S_{\Delta\sigma}(\Omega) = \frac{A_{\sigma}}{2\pi |\Omega|^{\gamma}}$, то величина и характер зависимости $\Delta\Omega$ от t определяются величиной γ . Если, например, $\gamma = 0,99$, то на основании § 4.5 и значений $S_{\nu}(\Omega)$ при сколь угодно малых Ω

$$\Delta\Omega = \frac{14}{\delta p} |b_{\perp} (b_{10}^+ - R_{10}) + b_{\parallel} (b_{10}^- - T_{10})| \sqrt{A_{\sigma}}. \quad (8.2.9)$$

Если, например, для всех $\Omega \ll \Omega_b$

$$S_{\Delta\sigma}(\Omega) = \frac{A_{\sigma}}{2\pi |\Omega|},$$

то на основании (4.5.54) для достаточно больших t_0

$$\Delta\Omega(t_0) = \frac{2}{\delta p} |b_{\perp} (b_{10}^+ - R_{10}) + b_{\parallel} (b_{10}^- - T_{10})| \sqrt{A_{\sigma} \ln \Omega_b t_0}. \quad (8.2.10)$$

Форма пика спектральной линии будет в первом случае резонансной, во втором и третьем — доплеровской. Пьедестал спектральной линии даже для малых Ω в общем случае исследовать практически невозможно. Крылья спектральной линии не могут быть найдены из полученных формул *в принципе*, поскольку весь анализ, проведенный в настоящей главе, является приближенным и справедлив для не слишком больших Ω .

4. Заметим, наконец, что и для автогенератора с $N/2$ степенями свободы может быть проведен расчет эффекта *параметрического уширения* спектральной линии, когда флуктуации параметров обладают достаточно широким (по отношению к ω_0) спектром и в нелинейной функции $F(x, \dots, d^l x/dt^l, \dots)$ необходимо учитывать высшие гармоники (1960 [3]).

Глава 9

ФЛУКТУАЦИИ В ГЕНЕРАТОРАХ ПРИ ИХ СИНХРОНИЗАЦИИ

Различные устройства синхронизации (например, обычная синхронизация, фазовая автоподстройка и т. п.) успешно решают вопрос о привязке фазы (или частоты) мощного генератора к другому генератору, обычно маломощному, обладающему высокой стабильностью, малыми флуктуациями.

Простейшим случаем является синхронизация автогенератора монохроматическим сигналом. В отсутствие шумов генератора его фаза жестко привязывается к фазе синхронизирующего синусоидального сигнала и синхронизованный генератор обладает, следовательно, монохроматическим колебанием. Наличие шумов в генераторе (естественных и технических) приводит в общем случае к неполной привязке фазы генератора к фазе сигнала синхронизации. Таким образом, возникает важная задача учета влияния собственных шумов генератора на процессы его синхронизации.

Эффект синхронизации — захватывание колебаний генератора слабой внешней силой — есть по существу нелинейный эффект. Это значит, в частности, что картина спектров флуктуаций амплитуды, частоты да и спектр самого колебания захваченного генератора не является в общем случае суперпозицией спектров свободного генератора и сигнала синхронизации.

Захваченный автогенератор представляет собой особую, самостоятельную систему, и флуктуации амплитуды и фазы колебания такой системы в общем случае существенно отличаются от флуктуаций в свободном генераторе. Здесь могут быть даже новые эффекты. Например, как будет ниже показано, в синхронизованном генераторе для фазы может иметь место диффузионный закон и в то же время в спектре колебания будет монохроматическая линия.

Однако монохроматический сигнал синхронизации — это идеализация весьма ограниченного применения. Еще в 1955 г.

С. М. Рытовым (1955 [5]) была поставлена задача исследования синхронизации генератора квазимонохроматическим сигналом. Здесь уже необходимо принимать во внимание существование флуктуаций фазы (и амплитуды) сигнала синхронизации и рассматривать характеристики их «преобразования» во флуктуации сигнала генератора.

Если при этом учитывать и собственные шумы генератора, то нетрудно прийти к еще более общей постановке задачи — исследованию взаимной синхронизации двух генераторов с шумами.

Исследованию флуктуаций в генераторах при синхронизации последних посвящено значительное количество работ. Отметим здесь лишь некоторые, отослав читателя к подробной библиографии, помещенной в конце книги.

Первой работой, с которой начались систематические исследования влияния шумов на процессы синхронизации, является уже упомянутая выше работа С. М. Рытова, в которой методом малого параметра рассмотрено поведение автогенератора при воздействии на него синусоидального сигнала.

Представление синхронизованного генератора как некоторого узкополосного фильтра по отношению к флуктуационным шумам проведено в работе С. Я. Раевского и Р. В. Хохлова (1958 [13]).

Работой, способствовавшей дальнейшему интенсивному рассмотрению флуктуационных явлений при синхронизации, явилась работа Р. Л. Стратоновича (1958 [14]), в которой автор, применяя метод уравнения Эйнштейна — Фоккер — Планка, нашел различные нелинейные характеристики фазовых флуктуаций синхронизованного генератора и, в частности, эффект смещения средней частоты генератора при ненулевой расстройке.

Синхронизация генератора квазимонохроматическим сигналом исследована в работах (1961 [15], 1963 [4]).

Рассмотрение взаимной синхронизации двух генераторов с шумами проведено в работе (1965 [8]).

Поведение синхронизованного генератора при существовании в нем флуктуаций параметров изучалось в работах (1965 [7], 1966 [3, 16]).

Целый цикл работ В. И. Тихонова и др. посвящен исследованию флуктуационных явлений в системах автоматической подстройки фазы и частоты (см. обзорную работу (1964 [5])).

Первые четыре параграфа настоящей главы посвящены анализу синхронизации генератора монохроматическим сигналом при учете естественных шумов генератора. В последующих двух параграфах учитываются флуктуации параметров генератора.

Последние параграфы содержат анализ синхронизации генератора квазимонохроматическим сигналом и рассмотрение влияния естественных шумов на взаимную синхронизацию двух автогенераторов.

§ 9.1. Влияние естественных шумов автогенератора на его синхронизацию синусоидальным сигналом. Сильная синхронизация

1. Рассмотрим томсоновский автогенератор, описываемый уравнением

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_1^2 x = F(x, \dot{x}),$$

приближенное решение которого имеет вид

$$x = R_0 \cos \omega_0 t,$$

где R_0 и ω_0 определяются, согласно § 5.2, уравнениями

$$R_0(\omega_1^2 - \omega_0^2) = \Psi(\omega_0, R_0), \quad 0 = \Phi(\omega_0, R_0).$$

Пусть на автогенератор действует внешний синусоидальный сигнал $E_0 \cos \omega_c t$ с частотой ω_c , мало отличающейся от частоты свободных автоколебаний

$$\Delta = \omega_c - \omega_0 \ll \omega_0.$$

Пусть также автогенератор подвержен случайным воздействиям, представленным случайной функцией времени $E(t)$.

Уравнение движения принимает вид

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_1^2 x = F(x, \dot{x}) + \omega_1^2 E_0 \cos \omega_c t + \omega_1^2 E(t). \quad (9.1.1)$$

Наиболее простым для рассмотрения и в то же время достаточно интересным является случай сравнительно слабого сигнала и малых шумов. В этом случае правую часть (9.1.1) можно считать достаточно малой величиной и пользоваться вышеизложенными методами.

Будем искать решение уравнения (9.1.1) в виде

$$x = (R_0 + \rho') \cos(\omega_c t + \varphi'), \quad (9.1.2)$$

где ρ' и φ' полагаем медленно меняющимися функциями по сравнению с $\cos \omega_0 t$. Действуя аналогично § 5.2, получим следующие уравнения для φ' и малых $\alpha' = \rho'/R_0$ (учитывая, что $\omega_1 \approx \omega_0 \approx \omega_c$):

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi'}{dt} &= -\Delta - q\alpha' - \frac{\omega_0 E_0}{2R_0} \cos \varphi' - \frac{\omega_0}{2R_0} (e_{\parallel} \cos \varphi' + e_{\perp} \sin \varphi'), \\ \frac{d\alpha'}{dt} &= -p\alpha' - \frac{\omega_0 E_0}{2R_0} \sin \varphi' + \frac{\omega_0}{2R_0} (e_{\perp} \cos \varphi' - e_{\parallel} \sin \varphi'). \end{aligned} \quad (9.1.3)$$

Уравнение (9.1.3) полностью описывает поведение автогенератора под действием малого синусоидального сигнала и малых шумов. Для функций $e_{\parallel}(t)$ и $e_{\perp}(t)$ мы получаем все свойства, описанные в §§ 5.2 и 5.3, где только следует ω_0 заменить на ω_c . Если, например, $E(t)$ — белый шум, описываемый формулой (5.3.1), то e и e_{\perp} — взаимно независимые дельта-коррелированные процессы с функциями корреляции, равными

$$\Phi_{\parallel}(\tau) = \Phi_{\perp}(\tau) = \Phi^0(\tau) = 4\pi c_0 \delta(\tau), \quad c_0 = S_E(\omega_c). \quad (9.1.4)$$

Для определения динамических характеристик синхронизации положим $E(t) \equiv 0$. Тогда уравнение (9.1.3) определяет амплитуду и фазу синхронизованного колебания. Отвлекаясь от переходных процессов при синхронизации, для установившихся значений φ_0 , α_0 синхронизованного колебания

$$x = R_0(1 + \alpha_0) \cos(\omega_c t + \varphi_0) \quad (9.1.5)$$

из (9.1.3) нетрудно получить

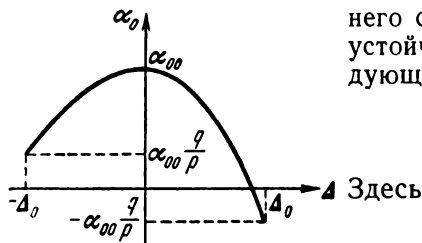
$$q\alpha_0 + \Delta = -\frac{\omega_0 E_0}{2R_0} \cos \varphi_0, \quad p\alpha_0 = -\frac{\omega_0 E_0}{2R_0} \sin \varphi_0. \quad (9.1.6)$$

Отсюда нетрудно найти следующее уравнение для α_0 :

$$(p^2 + q^2)\alpha_0^2 + 2q\Delta\alpha_0 + \Delta^2 = \frac{E_0^2\omega_0^2}{4R_0^2}. \quad (9.1.7)$$

Задавая значение расстройки Δ , из этого уравнения находим α_0 — приращение амплитуды для синхронизованного колебания, зависящее от амплитуды внешнего синусоидального сигнала E_0 . Для устойчивого значения α_0 имеем следующее значение:

$$\alpha_0 = \frac{-q\Delta + p\sqrt{\Delta_0^2 - \Delta^2}}{p^2 + q^2}. \quad (9.1.8)$$



$$\Delta_0 = \frac{E_0\omega_0}{2R_0} \sqrt{1 + q^2/p^2} \quad (9.1.9)$$

Рис. 9.1.

— критическое значение расстройки.

При $\Delta^2 > \Delta_0^2$ вещественного значения α_0 не существует. Следовательно, синхронизация автогенератора возможна лишь при $-\Delta_0 < \Delta < +\Delta_0$ и полоса синхронизации равна $2\Delta_0$. Зависимость α_0 от Δ показана на рис. 9.1. Кривая $\alpha_0 = \alpha_0(\Delta)$ является в общем случае неизохронного автогенератора несимметричной. Лишь при $q=0$ она становится симметричной.

При $\Delta = 0$

$$\alpha_0 = \alpha_{00} \equiv \frac{E_0 \omega_0}{2R_0 \sqrt{p^2 + q^2}} = \frac{p \Delta_0}{p^2 + q^2}. \quad (9.1.10)$$

При $\Delta = \pm \Delta_0$ $\alpha_0 = \pm \alpha_{00} \frac{q}{p}$. Так зависит приращение амплитуды синхронизованного автогенератора от расстройки Δ .

Установившееся значение фазы синхронизованного колебания определяется выражением

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{p \alpha_0}{q \alpha_0 + \Delta}.$$

Пусть теперь существует случайное воздействие на автогенератор $E(t) \neq 0$. В этом случае амплитуду и фазу решения уравнения (9.1.3) ищем в виде $\varphi' = \varphi_0 + \varphi$, $\alpha' = \alpha_0 + \alpha$. Для флуктуаций амплитуды α и фазы синхронизованного колебания φ получаем уравнения

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{dt} = & -p\alpha - \frac{E_0 \omega_0}{2R_0} [\sin(\varphi_0 + \varphi) - \sin \varphi_0] + \\ & + \frac{\omega_0}{2R_0} [e_{\perp} \cos(\varphi_0 + \varphi) - e_{\parallel} \sin(\varphi_0 + \varphi)], \\ \frac{d\varphi}{dt} = & -q\alpha - \frac{E_0 \omega_0}{2R_0} [\cos(\varphi_0 + \varphi) - \cos \varphi_0] - \\ & - \frac{\omega_0}{2R_0} [e_{\parallel} \cos(\varphi_0 + \varphi) + e_{\perp} \sin(\varphi_0 + \varphi)]. \end{aligned} \quad (9.1.11)$$

Эти уравнения являются по отношению к φ нелинейными и к тому же довольно сложными — их решать мы будем только приближенно.

2. Пусть случайная функция $E(t)$ представляет воздействие естественных шумов на автогенератор. Тогда имеют место формулы (9.1.4).

Вследствие дельта-коррелированности $e_{\parallel}(t)$ и $e_{\perp}(t)$ флуктуационные уравнения (9.1.11) можно решать методом уравнения Эйнштейна — Фоккера — Планка. Однако, прежде чем решать уравнения (9.1.11), упростим их, для чего воспользуемся методом статистической эквивалентности.

Согласно § 1.9 для (9.1.11) нетрудно найти следующие коэффициенты K_{ij} уравнения ЭФП для вероятности переходов $W(\alpha, \varphi, t | \alpha', \varphi', t')$:

$$\begin{aligned} K_{10} = & -p\alpha - \frac{E_0 \omega_0}{2R_0} [\sin(\varphi_0 + \varphi) - \sin \varphi_0], \\ K_{01} = & -q\alpha - \frac{E_0 \omega_0}{2R_0} [\cos(\varphi_0 + \varphi) - \cos \varphi_0], \\ K_{20} = K_{02} = & \frac{\pi c_0 \omega_0^2}{R_0^2} \equiv D, \quad K_{11} = 0, \end{aligned} \quad (9.1.12)$$

Рассмотрим уравнения

$$\begin{aligned}\frac{d\alpha}{dt} &= -p\alpha - \frac{E_0\omega_0}{2R_0} [\sin(\varphi_0 + \varphi) - \sin \varphi_0] + \frac{\omega}{2R_0} e_{\perp}, \\ \frac{d\varphi}{dt} &= -q\alpha - \frac{E_0\omega_0}{2R_0} [\cos(\varphi_0 + \varphi) - \cos \varphi_0] - \frac{\omega_0}{2R_0} e_{\parallel}.\end{aligned}\quad (9.1.13)$$

Для этих уравнений, как нетрудно проверить, коэффициенты K_{ij} также даются формулами (9.1.12). Это значит, согласно § 1.9, что уравнения (9.1.11) и (9.1.13) являются статистически эквивалентными уравнениями. Следовательно, для случая, когда $E(t)$ представляет естественные шумы, вместо уравнений (9.1.11) можно рассматривать уравнения (9.1.13).

3. Перейдем теперь к анализу уравнений (9.1.13). С помощью (9.1.6) эти уравнения можно записать в несколько ином виде, более удобном для дальнейшего:

$$\begin{aligned}\frac{d\alpha}{dt} &= -p\alpha - p\alpha_0 [1 - \cos \varphi] + (q\alpha_0 + \Delta) \sin \varphi + \frac{\omega_0}{2R_0} e_{\perp}, \\ \frac{d\varphi}{dt} &= -q\alpha - (q\alpha_0 + \Delta) [1 - \cos \varphi] - p\alpha_0 \sin \varphi - \frac{\omega_0}{2R_0} e_{\parallel}.\end{aligned}\quad (9.1.14)$$

Нашей основной задачей является изучение характеристик амплитудных и фазовых флуктуаций синхронизованного колебания в зависимости от амплитуды синхронизирующего сигнала, интенсивности естественных шумов, характеристик автогенератора и величины расстройки. Уравнения (9.1.14) показывают, что существование естественных шумов приводит к флуктуациям амплитуды и фазы синхронизованного колебания. Возникает вопрос, какую роль играют эти флуктуации, как они видоизменяют спектр синхронизованного генератора, который в отсутствие шумов состоит из монохроматической линии. Приводят ли они к уширению линии или только создают шумовой фон около нее? С другой стороны, рассматривая свободный генератор с шумами, спектр которого состоит из размытой спектральной линии, можно задаться вопросом, как изменяется его спектр при появлении синхронизирующего сигнала, малого по сравнению с шумами или достаточно большого.

Наконец, может быть поставлен вопрос о самом понятии синхронизации. Если имеются флуктуации амплитуды, фазы (и, следовательно, частоты) у синхронизованного генератора, то спрашивается, что же собственно синхронизованно у генератора. Если, например, фаза флуктуирует так, что интенсивность флуктуаций фазы является конечной величиной и может быть даже небольшой, то еще в какой-то мере можно считать (интуитивно) такое колебание синхронизованным. Если же интенсивность флуктуаций фазы генератора неограниченно возрастает со вре-

менем, то фаза генератора уходит сколь угодно далеко от фазы синхронизирующего колебания и о какой-либо синхронизации фазы говорить уже трудно.

Однако и в первом случае, когда у синхронизованного колебания имеются ограниченные по интенсивности флуктуации фазы, все же следует более точно определить само понятие синхронизации, ибо так, как это понятие вообще было введено, оно означало жесткую привязку частоты генератора к частоте синхронизирующего сигнала, с точностью до постоянной фазы.

Смысл синхронной работы генератора с шумами следует выбирать, по-видимому, различным — в зависимости от требований, предъявляемых к генератору, ибо реальный генератор всегда работает в каких-то системах, предъявляющих генератору свои (вообще различные) цели. Так, для многих практических задач, показателем эффективности работы синхронизованного генератора является величина $\langle \Delta\varphi^2 \rangle$ — интенсивность уходов фазы генератора от фазы сигнала за определенное время τ_0 , определяемое спецификой конкретной задачи. С другой стороны, в целом ряде задач адекватной характеристикой является $\langle \nu^2 \rangle$ — интенсивность отклонений частоты синхронизованного колебания от частоты сигнала. В некоторых случаях количественной характеристикой эффективности работы системы синхронизации может служить отношение мощности пьедестала шумового фона к мощности монохроматической линии спектра синхронизованного генератора. С этих позиций следует оценивать и полосу синхронизации — область расстроек, внутри которой выполнены определенные требования.

В отличие от понятия синхронизации — четкого и ясного для «бесшумного» генератора и расплывчатого для генератора с шумами, введем для последнего понятие *эффективной синхронизации*. Будем рассматривать три следующих определения эффективной синхронизации генератора с шумами. Генератор считается эффективно синхронизованным внешним монохроматическим сигналом, если

1) $\chi(\tau_0) = \frac{1}{2} \langle \Delta\varphi^2 \rangle = \frac{1}{2} \langle [\varphi(t + \tau_0) - \varphi(t)]^2 \rangle$ не превосходит некоторого значения χ_0 ;

2) интенсивность флуктуаций частоты $\langle \nu^2 \rangle$, взятая для определенной полосы, не превосходит некоторого значения ν_0^2 ;

3) отношение мощность пьедестала/мощность монохроматической линии не превосходит некоторой величины n .

Соответственно этим трем определениям эффективной синхронизации имеем три *полосы эффективной синхронизации* Δ_1 , Δ_2 , Δ_3 , определенных как области расстроек, внутри которых выполняются условия соответственно 1); 2); 3).

Предположим далее, что средний квадрат флуктуаций фазы $\langle \varphi^2 \rangle$ при $t \rightarrow \infty$ стремится к некоторой конечной величине $\langle \varphi^2 \rangle_\infty$. Поскольку при $e_{\parallel}(t) \equiv 0$, $e_{\perp}(t) \equiv 0$ установившиеся значения равны $\varphi = 0$, $\alpha = 0$, то легко видеть, что $\langle \varphi^2 \rangle_\infty$ зависит от спектральной плотности $e_{\parallel}(t)$, $e_{\perp}(t)$ и будет тем меньше, чем меньше интенсивность шума $E(t)$. Следовательно, при достаточно малом шуме величина $\langle \varphi^2 \rangle_\infty$ будет достаточно малой. Рассмотрим в этом параграфе такой малый шум, что $\langle \varphi^2 \rangle_\infty \ll 1$. В этом случае можно считать, что для всех t $|\varphi(t)| \ll 1$ и $\cos \varphi \sim 1$, $\sin \varphi \sim \varphi$. Этот случай означает, что фаза синхронизованного колебания мало отличается от установившегося значения фазы. Будем говорить, что в этом случае имеется сильная синхронизация. Уравнения (9.1.14) примут в этом приближении следующий вид (для изохронного генератора):

$$\frac{d\alpha}{dt} = -p\alpha + \varphi\Delta + \frac{\omega_0}{2R_0} e_{\perp}(t), \quad (9.1.15)$$

$$\nu = \frac{d\varphi}{dt} = -p\alpha_0\varphi - \frac{\omega_0}{2R_0} e_{\parallel}(t). \quad (9.1.16)$$

Эти уравнения являются уже линейными и могут быть легко решены.

4. Поскольку уравнение (9.1.16) зависит только от φ , его можно рассматривать отдельно.

Из вида этого уравнения легко сделать следующий вывод: для флуктуаций фазы существует возвращающая сила, не позволяющая флуктуациям фазы принимать сколь угодно большие значения, — своего рода «прочность предельного цикла» для флуктуаций фазы, равная

$$p\alpha_0 = \sqrt{\Delta_0^2 - \Delta^2} = \Delta_0 \sqrt{1 - \left(\frac{\Delta}{\Delta_0}\right)^2} = \frac{E_0\omega_0}{2R_0} \sqrt{1 - \left(\frac{\Delta}{\Delta_0}\right)^2}.$$

Отсюда видно, что возвращающая сила пропорциональна E_0 — амплитуде синхронизирующего сигнала. Тем самым любое малое $E_0 > 0$ в пределах зоны синхронизации вводит ограничения на рост флуктуаций фазы ($\lim_{\tau \rightarrow \infty} \chi(\tau) < \infty$) и это приводит,

в частности, к тому, что в рассмотренном линейном приближении спектр синхронизованного колебания состоит из монохроматической линии и пьедестала, обязанного амплитудным и фазовым флуктуациям.

Рассмотрим последние подробнее. Поскольку $p\alpha_0$ зависит от положения в зоне синхронизации, уменьшаясь до нуля на краях зоны, то и интенсивность фазовых флуктуаций сильно меняется по зоне. Из (9.1.16) нетрудно найти спектральную плотность флуктуаций фазы, равную для установившегося режима

(при $p\alpha_0 l \gg 1$):

$$S_\varphi(\Omega) = \frac{D}{2\pi(\Omega^2 + p^2\alpha_0^2)} = \frac{D}{2\pi(\Omega^2 + \Delta_0^2 - \Delta^2)}. \quad (9.1.17)$$

На рис. 9.2 приведены графики $S_\varphi(\Omega)$ для различных значений расстройки Δ в пределах полосы синхронизации.

Независимо от расстройки $S_\varphi(\Omega)$ принимает максимальное значение при $\Omega=0$, которое неограниченно возрастает при приближении к границам зоны синхронизации.

Интенсивность фазовых флуктуаций равна

$$\begin{aligned} \langle \varphi^2 \rangle &= \frac{D}{2p\alpha_0} = \frac{D}{2\Delta_0 \sqrt{1 - \left(\frac{\Delta}{\Delta_0}\right)^2}} = \\ &= \frac{\pi\omega_0 c_0}{R_0 E_0} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\Delta}{\Delta_0}\right)^2}}. \end{aligned}$$

При приближении к краям зоны синхронизации $\langle \varphi^2 \rangle \rightarrow \infty$.

Теперь можно оценить условия справедливости линейного приближения. Выше мы полагали, что $\langle \varphi^2 \rangle \ll 1$. Это будет иметь место при таких естественных шумах, действующих на автогенератор, спектральная плотность которых

$$\begin{aligned} S_E(\omega_c) &\approx S_E(\omega_0) = \\ &= c_0 \ll \frac{R_0 E_0}{\pi\omega_0} \sqrt{1 - \left(\frac{\Delta}{\Delta_0}\right)^2}. \end{aligned} \quad (9.1.18)$$

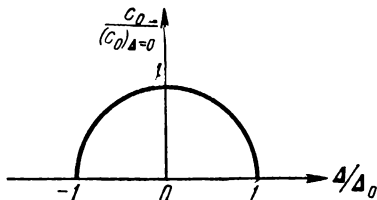


Рис. 9.3.

Таким образом, допустимый уровень естественных шумов зависит от амплитуды и частоты автогенератора, от амплитуды синхронизирующего сигнала и, наконец, от расстройки, причем по мере приближения последней к краям зоны синхронизации, требование к малости воздействующего шума становится более жестким. В пределе при $\Delta \rightarrow \pm\Delta_0$ линейаризация уравнений (9.1.14) по фазе становится невозможной даже при любых сколь угодно малых шумах, действующих на генератор. При $\Delta=0$ допустима наибольшая спектральная плотность шумов, при которой возможна линейаризация. На рис. 9.3 изображена

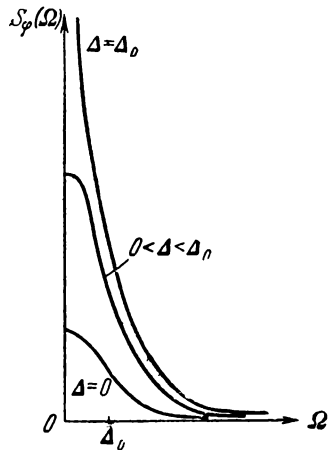


Рис. 9.2.

зависимость предельно допустимых относительных значений спектральной плотности шумов от расстройки.

Таким образом, условие малости шумов для выполнения неравенства $\langle \varphi^2 \rangle \ll 1$ является относительным. Интенсивность шумов должна быть мала по сравнению с $2p\alpha_0$. Тем самым за степень синхронизации можно принять отношение

$$\frac{p\alpha_0}{D} = \mu = \frac{E_0\omega_0}{2DR_0} \sqrt{1 - \left(\frac{\Delta}{\Delta_0}\right)^2}.$$

Синхронизация считается сильной, когда $\mu \gg 1$, и слабой, если $\mu \ll 1$.

Не представляет труда записать выражение для спектральной плотности флуктуаций частоты

$$S_v(\Omega) = \Omega^2 S_\varphi(\Omega) = \frac{D\Omega^2}{2\pi(\Omega^2 + \Delta_0^2 - \Delta^2)}. \quad (9.1.19)$$

График этой спектральной плотности показан на рис. 9.4. Для всех $0 < \Delta < \Delta_0$ значение спектральной плотности $S_v(\Omega)$ при $\Omega = 0$

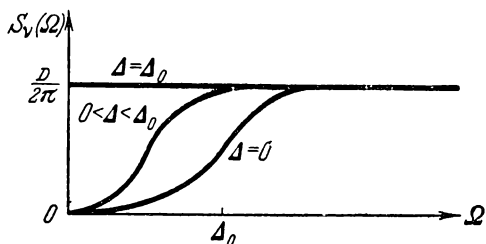


Рис. 9.4.

равно нулю, причем стремление $S_v(\Omega)$ к нулю при $\Omega \rightarrow 0$ идет как Ω^2 . Как показано в гл. 4, это обстоятельство означает, что ширина спектральной линии синхронизованного генератора равна нулю. В этом случае мы имеем монохроматическую линию и пьедестал — фазо-

вый шум. При $\Delta \geq \Delta_0$ синхронизация нарушается и $S_v(0) = D/2\pi$ — генератор выпал из синхронизации и имеет обычную ширину спектральной линии $\Delta\Omega = \pi D/2$.

5. Рассмотрим теперь амплитудные и амплитудно-фазовые флуктуации. На основании результатов § 2.3, примененных к уравнениям (9.1.15), (9.1.16), имеем:

$$\begin{aligned} \Phi_a(\tau) &= \frac{D}{2p} e^{-p\tau} + \frac{D\Delta^2}{2pp\alpha_0} \frac{pe^{-p\alpha_0\tau} - p\alpha_0 e^{-p\tau}}{p^2 - p^2\alpha_0^2}, \\ S_a(\Omega) &= \frac{D}{2\pi(\Omega^2 + p^2)} \left[1 + \frac{\Delta^2}{\Omega^2 + \Delta_0^2 - \Delta^2} \right], \\ S_{a\varphi}^0(\Omega) &= \frac{Dp\Delta}{2\pi(\Omega^2 + p^2)(\Omega^2 + p^2\alpha_0^2)}, \\ S_{a\varphi}^1(\Omega) &= - \frac{D\Omega\Delta}{2\pi(\Omega^2 + p^2)(\Omega^2 + p^2\alpha_0^2)}. \end{aligned} \quad (9.1.20)$$

Интенсивность амплитудных флуктуаций равна

$$\langle \alpha^2 \rangle = \frac{D}{2p} \left[1 + \frac{\Delta^2}{p\alpha_0(p + p\alpha_0)} \right] \approx \frac{D}{2p} \left[1 + \frac{\Delta^2}{p\sqrt{\Delta_0^2 - \Delta^2}} \right],$$

поскольку выполняется условие $\alpha_0 \ll 1$. Условие малости амплитудных флуктуаций

$$\langle \alpha^2 \rangle = \frac{1}{\mu} \left(\alpha_0 + \frac{\Delta^2}{p^2} \right) \ll 1$$

заведомо выполнено, поскольку условие линеаризации (9.1.18) означает, что $\mu \gg 1$, а, кроме того, $\Delta \leq \Delta_0 \ll p$.

Интересно сравнить спектральные плотности амплитудных флуктуаций синхронизованного генератора с амплитудными флуктуациями обычного генератора (см. (5.4.2)). Для центра зоны синхронизации разницы нет. На границах зоны синхронизация увеличивает спектральную плотность $S_\alpha(\Omega)$, которая при $\Omega \rightarrow 0$ неограниченно возрастает. Это влияние синхронизации на амплитудные флуктуации связано с членом $\Delta\varphi$, входящим в уравнение амплитудных флуктуаций. Так как $\Delta_0 \ll p$, то эти отличия касаются лишь области вблизи нуля, где $\Omega \leq \Delta_0$. Вид спектра амплитудных флуктуаций показан на рис. 9.5.

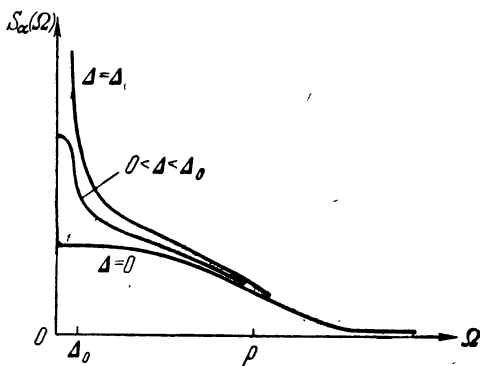


Рис. 9.5.

6. Обратимся к форме спектра синхронизованного генератора. Поскольку у нас $\varphi(t)$ стационарно, то

$$\chi(\tau) = \Phi_\varphi(0) - \Phi_\varphi(\tau), \quad \chi_\infty = \Phi_\varphi(0) = \langle \varphi^2 \rangle \ll 1.$$

В этом случае мы можем воспользоваться формулами (4.4.8) и получить следующее выражение для спектра синхронизованного колебания:

$$W_x(\Omega) = \frac{R_0^2}{2} [\delta(\Omega) + S_\alpha(\Omega) + 2S_{\alpha\varphi}^1(\Omega) + S_\varphi(\Omega)].$$

Этот спектр состоит из монохроматической линии и пьедестала фазово-амплитудного шума.

Используя формулы (9.1.17), (9.1.20), найдем, отбрасывая малые члены,

$$W_x(\Omega) = \frac{\omega_0^2 c_0}{4} \frac{2\Omega^2 + p^2}{(\Omega^2 + p^2)(\Omega^2 + \Delta_0^2 - \Delta^2)} + \frac{R_0^2}{2} \delta(\Omega). \quad (9.1.21)$$

Пьедестал является с большой степенью точности симметричным и не зависит от амплитуды автогенератора. Его вид для разных расстроек показан на рис. 9.6. Ширина пьедестала равна $\sqrt{\Delta_0^2 - \Delta^2}$.

7. Перейдем теперь к рассмотрению эффективности синхронизации генератора, обладающего естественными шумами.

Рассмотрим первое определение синхронизации: генератор считается эффективно синхронизованным внешним монохроматическим сигналом, если

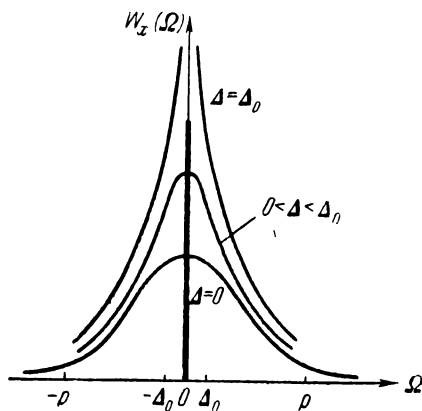


Рис. 9.6.

$$\chi(\tau_0) = \frac{1}{2} \langle \Delta \Phi^2 \rangle$$

не превосходит некоторого значения χ_0 . Нетрудно видеть, что

$$\chi(\tau) = \Phi_\varphi(0) - \Phi_\varphi(\tau) =$$

$$= \frac{D}{2\Delta_0 \sqrt{1 - \left(\frac{\Delta}{\Delta_0}\right)^2}} \left\{ 1 - \exp \left[-\Delta_0 \tau \sqrt{1 - \left(\frac{\Delta}{\Delta_0}\right)^2} \right] \right\}.$$

Таким образом, при заданной величине τ_0 и χ_0 неравенство

$$\chi(\tau_0) \leq \chi_0$$

определяет те возможные расстройки Δ , при которых выполняются условия синхронизации. При $\chi(\tau_0) = \chi_0$ мы получим значения для максимально возможной расстройки Δ_{\max} , значение которой и определит $\Delta_1 = \Delta_{\max}$ — полосу эффективной синхронизации генератора с шумами. Рассмотрим $\eta_1 = \Delta_1 / \Delta_0$ — отношение полосы эффективной синхронизации к полосе синхронизации «бесшумного» генератора. Введем также величину $\xi_1 = D / 2\Delta_0 \chi_0 = [\chi(\infty)]_{\Delta=0} / \chi_0$, характеризующую наши требования к величине χ_0 . Тогда для η_1 нетрудно получить следующее уравнение:

$$\eta_1 = 1 - \xi_1^2 \left\{ 1 - \exp \left[-\Delta_0 \tau_0 \sqrt{1 - \eta_1^2} \right] \right\}^2.$$

График $\eta_1 = \eta_1(\xi_1, \tau_0)$ приведен на рис. 9.7. Из этого рисунка видно, что для любого $\tau_0 > 0$ и $\xi_1 > 0$ есть такая область ξ_1 , где относительная полоса синхронизации $\eta_1 < 1$. Это значит, что присутствие шумов всегда уменьшает полосу эффективной синхронизации и $\Delta_1 < \Delta_0$.

При требовании достаточно малой величины χ_0 (так, что $\xi_1 > 1$) могут быть такие большие τ_0 , что $\eta_1 = 0$, т. е. при таких

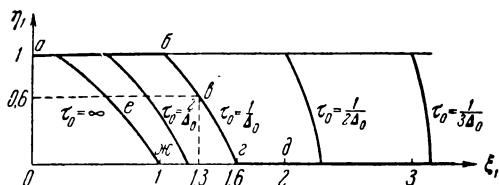


Рис. 9.7.

«жестких» требованиях генератор может оказаться всегда не синхронизованным эффективно. Если, например, мы потребуем, чтобы за время $\tau_0 = 1/\Delta_0$ средний квадрат приращений фазы был меньше или равен $\frac{1}{2} \frac{D}{\Delta_0}$ ($\xi_1 = 2$), то это условие не будет выполнено ни при каком сколь угодно малом Δ . Это значит, что с точки зрения этого требования генератор эффективно не синхронизуется и полоса эффективной синхронизации равна нулю (точка $д$ на рис. 9.7).

Если же потребовать, чтобы за то же время $\tau_0 = 1/\Delta_0$ интенсивность приращения фазы была меньше или равна $D/1,3\Delta_0$ ($\xi_1 = 1,3$), то это условие выполняется для всех расстройок $\eta_1 \leq 0,6$, следовательно, полоса эффективной синхронизации при таких требованиях равна $\eta_1 = 0,6$; $\Delta_1 = 2 \cdot 0,6 \cdot \Delta_0$ (точка $в$ на рис. 9.7).

Кривая $абвгд$ показывает зависимость (для $\tau_0 = 1/\Delta_0$) относительной полосы синхронизации η_1 от ξ_1 . Если же требование малости на $\langle \Delta\varphi^2 \rangle$ накладывать при $\tau_0 \rightarrow \infty$, то зависимость η_1 от ξ_1 дается кривой $аежгд$. Из нее следует, что относительная полоса эффективной синхронизации плавно уменьшается от единицы до нуля при изменении χ_0 от ∞ до $D/2\Delta_0$ (ξ_1 при этом меняется от 0 до 1), а затем остается равной нулю для всех $\chi_0 < \Delta/2\Delta_0$. Это легко объяснимо тем, что при $\tau_0 \rightarrow \infty$ $\chi_\infty = \frac{D}{2\Delta_0 \sqrt{1 - (\Delta/\Delta_0)^2}}$ и не может быть меньше чем $D/2\Delta_0$ ни при каких Δ . Другими словами, ни при каких расстройках при $\tau_0 \rightarrow \infty$ интенсивность фазовых флуктуаций не может быть меньше D/Δ_0 .

Обратимся теперь ко второму определению эффективности синхронизации — по интенсивности флуктуаций частоты: генератор считается эффективно синхронизованным внешним монохроматическим сигналом, если $\langle v^2 \rangle$, взятая для определенной полосы, не превосходит заданной величины v_0^2 . При этом полосой эффективной синхронизации назовем $\Delta_2 = \Delta_{\max}$, где Δ_{\max} — максимальная расстройка, при которой еще выполняется неравенство $\langle v^2 \rangle \leq v_0^2$.

Поскольку, согласно (9.1.19), $S_v(\infty) = D/2\pi$, то интенсивность флуктуаций частоты $\langle v^2 \rangle$, взятая для бесконечной полосы, обращается в бесконечность независимо от значения Δ . Этот результат, вообще говоря, неверен, ибо (9.1.19), так же как и все формулы для остальных спектральных плотностей, справедливо только для $\Omega \ll \omega_0$; это связано с используемым методом расчета. Таким образом, как будет себя вести $S_v(\Omega)$ при Ω , сравнимых с ω_0 или больших ω_0 , неизвестно, — пока не существуют методов, позволяющих определить спектральные плотности

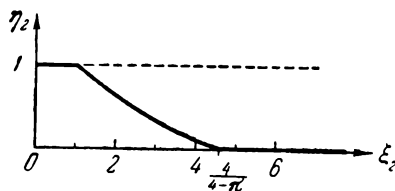


Рис. 9.8.

флуктуации амплитуды, фазы и частоты на таких высоких частотах. Возможно, что дисперсия флуктуаций частоты $\langle v^2 \rangle$, взятая для бесконечной полосы, и не будет бесконечно большой. В силу этого эффективность синхронизации по $\langle v^2 \rangle$ необходимо оценивать в полосе, существенно меньшей ω_0 . Наиболее естественно взять полосу синхронизации.

Таким образом, рассматривая

$$\langle v^2 \rangle = \int_{-\Delta_0}^{+\Delta_0} S_v(\Omega) d\Omega = \frac{D\Delta_0}{\pi} \left[1 - \sqrt{1 - \left(\frac{\Delta}{\Delta_0}\right)^2} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\Delta}{\Delta_0}\right)^2}} \right],$$

имеем следующую зависимость относительной полосы эффективной синхронизации $\eta_2 = \Delta_2/\Delta_0$ от $\xi_2 = D\Delta_0/\pi v_0^2$:

$$\xi_2 \left[1 - \sqrt{1 - \eta_2^2} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{1 - \eta_2^2}} \right] = 1.$$

График этой зависимости показан на рис. 9.8. Из него следует, что относительная полоса эффективной синхронизации уменьшается до нуля, если $\xi_2 \geq 4/(4 - \pi)$. Это связано с тем, что ни при каких расстройках интенсивность флуктуаций частоты $\langle v^2 \rangle$ не может быть меньше чем $\frac{D\Delta_0}{\pi} \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$.

Нахождение полосы синхронизации, согласно третьему определению эффективной синхронизации, не имеет смысла, так как можно показать, что на основании (9.1.21)

$$\frac{\text{мощность пьедестала}}{\text{мощность монохр. линии}} = \frac{2}{\mu},$$

а по условию должно быть $\mu \gg 1$ независимо от значения расстройки Δ .

8. В заключение рассмотрения случая сильной синхронизации отметим (для $\Delta=0$) следующее: во-первых, на основании (9.1.17), (9.1.20) синхронизованный автогенератор с точки зрения амплитудных флуктуаций ведет себя как узкополосный фильтр с шириной полосы, равной p — прочности предельного цикла (т. е. ведет себя как обычный незасинхронизованный автогенератор), а с точки зрения фазовых флуктуаций он ведет себя как фильтр с полосой, равной полосе синхронизации Δ_0 . Во-вторых, условие (9.1.18) есть условие синхронизации автогенератора при малой дисперсии флуктуаций фазы. Оно накладывает ограничение только на величину спектральной плотности шума $S_E(\omega_c)$ на частоте сигнала, не оговаривая значения полной мощности широкополосного шума

$$S_E = \int_{-\infty}^{+\infty} S_E(\omega) d\omega,$$

которая, вообще говоря, может быть гораздо больше мощности синхронизирующего сигнала E_0^2 . Это обстоятельство отнюдь не является удивительным, так как раньше мы уже видели, что на автогенератор активно действует лишь «укороченный» шум — шум, сосредоточенный в полосе p . Обозначим мощность этого «укороченного» шума через S_{Ep} ; тогда

$$S_{Ep} = S_E(\omega_0) p.$$

Посмотрим, означает ли малость $\langle \varphi^2 \rangle$ малость S_{Ep} по сравнению с E_0^2 . Из (9.1.18) для $\Delta=0$ легко получим

$$S_{Ep} \ll \frac{R_0 E_0 p}{\pi \omega_0}.$$

Полагая, что $R_0 = n E_0$, где $n \gg 1$, так как мы рассматриваем действие слабого сигнала на автогенератор, видим, что условие синхронизации при малом $\langle \varphi^2 \rangle$ будет

$$S_{Ep} \ll E_0^2 \frac{np}{\pi \omega_0}.$$

Пусть для определенности

$$S_{Ep} = E_0^2 \frac{np}{10\pi\omega_0}.$$

Если теперь допустить, что $np \geq 10\pi\omega_0$, то

$$S_{Ep} \geq E_0^2.$$

Таким образом, синхронизация (при $\langle \varphi^2 \rangle \ll 1$) может быть и для $S_{Ep} > E_0^2$. Это обстоятельство было отмечено в работе С. Я. Равевского и Р. В. Хохлова (1958 [13]).

Таким образом, складывается впечатление, что сильная синхронизация может быть и для случая, когда синхронизирующий сигнал сравним или даже меньше собственного активного шума автогенератора.

Однако нетрудно видеть на основании (9.1.17), что с точки зрения фазовых флуктуаций, которые именно и важны для процесса синхронизации, действительно активным шумом является не шум в полосе p , а шум, существующий в полосе $p\alpha_0 \leq \Delta_0$. Обозначая мощность этого фазоактивного шума через $S_{E\Delta}$, видим, что

$$S_{E\Delta} = S_E(\omega_0)\Delta_0.$$

Тогда условие синхронизации (9.1.18) принимает вид

$$S_{E\Delta} \ll \frac{E_0^2}{2\pi}. \quad (9.1.22)$$

Это означает, что для выполнения неравенства $\langle \varphi^2 \rangle \ll 1$ мощность шума, порождающая фазовые флуктуации, безусловно должна быть много меньше мощности синхронизиющего сигнала.

§ 9.2. Влияние естественных шумов на синхронизацию генератора. Слабая синхронизация

Не ограничиваясь теперь случаем малых фазовых флуктуаций, рассмотрим уравнения (9.1.14) для изохронного генератора:

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -pa - p\alpha_0[1 - \cos \varphi] + \Delta \sin \varphi + \frac{\omega_0}{2R_0} e_{\perp}, \\ \frac{d\varphi}{dt} &= -\Delta[1 - \cos \varphi] - p\alpha_0 \sin \varphi - \frac{\omega_0}{2R_0} e_{\parallel}. \end{aligned} \quad (9.2.1)$$

1. Положим $\Delta = 0$ и исследуем поведение фазовых флуктуаций в центре зоны синхронизации. Поскольку при $\Delta = 0$ $p\alpha_0 = \Delta_0$, имеем

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\Delta_0 \sin \varphi - \frac{\omega_0}{2R_0} e_{\parallel}(t). \quad (9.2.2)$$

Случайная функция $e_{\parallel}(t)$ является дельта-коррелированной. Это дает возможность применить к (9.2.2) метод уравнения ЭФП.

Нетрудно найти коэффициенты этого уравнения:

$$K_1 = -\Delta_0 \sin \varphi, \quad K_2 = \frac{\pi c_0 \omega_0^2}{R_0^2} = D.$$

Таким образом, уравнение ЭФП для вероятности переходов имеет вид

$$\frac{\partial W}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \varphi} [\Delta_0 \sin \varphi W] + \frac{D}{2} \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2}. \quad (9.2.3)$$

Нетрудно убедиться в том, что такое же в точности уравнение описывает случайное блуждание броуновской частицы по оси φ в поле потенциальных сил, имеющих потенциал (рис. 9.9)

$$U(\varphi) = \Delta_0 - \Delta_0 \cos \varphi.$$

Предыдущему рассмотренному случаю $\langle \varphi^2 \rangle \ll 1$ соответствует потенциальная функция, изображенная на рис. 9.9 пунктиром.

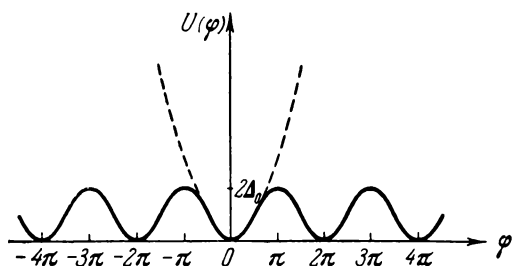


Рис. 9.9.

Функция $W(\varphi_0, \tau, \varphi)$ есть плотность вероятности того, что если при $\tau=0$ фаза колебания φ (координата броуновской частицы) была равна φ_0 , то в момент τ она будет равна φ . Без потери общности можно положить $\varphi_0=0$. В этом случае $W(0, \tau, \varphi)$ есть функция диффузии броуновских частиц, имевших в $\tau=0$ положение $\varphi=0$. Следовательно, $W(0, 0, \varphi) = \delta(\varphi)$. Из симметричности $U(\varphi)$, а также из (9.2.3) следует, что

$$W(0, \tau, -\varphi) = W(0, \tau, +\varphi),$$

т. е. броуновские частицы должны «расползтись» симметрично по отношению к $\varphi=0$. Из общих соображений видно, что при любых конечных Δ_0 и D должно произойти *рано или поздно* полное расползание *по всем* потенциальным ямам; при этом вид $W(0, \tau, \varphi)$ должен изменяться так, как это показано на рис. 9.10, где примерный вид функций $W_1 = W(0, \tau_1, \varphi)$, $W_2 = W(0, \tau_2, \varphi)$ дан для $\tau_1 < \tau_2$.

Заметим, что при большом Δ_0 (по сравнению с D), т. е. при достаточно малом шуме указанное расползание будет идти *чрезвычайно медленно*, чему будет соответствовать очень медленное возрастание $\langle \varphi_\tau^2 \rangle$ со временем τ — очень малый коэффициент диффузии фазы. В пределе, при $D/\Delta_0 \rightarrow 0$, бесконечного расползания фазы не будет и $\langle \varphi_\tau^2 \rangle$ будет конечным при $\tau \rightarrow \infty$. Малому D соответствует медленное возрастание $\langle \varphi_\tau^2 \rangle$ при $\tau \rightarrow \infty$.

В предыдущем параграфе, заменяя $\sin \varphi$ на φ и $\cos \varphi$ на единицу, мы для малых шумов (полагая $D \ll 2\Delta_0$, что эквивалентно, как легко проверить (9.1.18)) фактически заменили периодическую

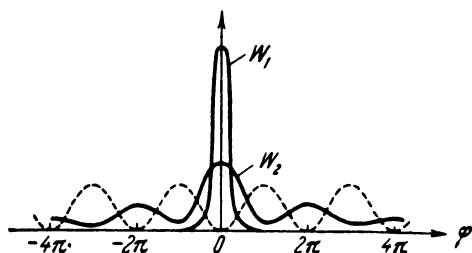


Рис. 9.10.

потенциальную функцию на бесконечно возрастающую (см. пунктирную кривую на рис. 9.9) и именно поэтому получили ограниченность $\langle \varphi^2 \rangle$ и ширину спектральной линии синхронизованного колебания, равную нулю.

Нашей ближайшей задачей является оценка дисперсии фазовых флуктуаций и ширины спектральной линии синхронизованного колебания в зависимости от $D/2\Delta_0$, когда потенциальная функция является периодической.

2. Уравнение (9.2.3) является достаточно сложным и не удается в общем случае найти его точное решение $W(0, \tau, \varphi)$; интересуясь в основном величиной $\langle \varphi_\tau^2 \rangle = 2\chi(\tau)$, можно тем не менее найти функцию $\chi(\tau)$ и оценить ее зависимость от τ . Поскольку $W(0, \tau, \varphi)$ есть четная функция φ , мы можем искать ее в виде

$$W(0, \tau, \varphi) = W_0(\varphi) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} W_\tau(x, \tau) \cos \varphi x \, dx, \quad (9.2.4)$$

где второй интеграл есть в сущности разложение в интеграл Фурье зависимости $W(0, \tau, \varphi)$ от φ .

Первое слагаемое, также четное по φ , мы выбираем так, чтобы оно представляло собой установившееся значение вероятности переходов — стационарную вероятность

$$W_0(\varphi) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} W(0, \tau, \varphi).$$

Очевидно, что функция $W_0(\varphi)$ должна удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} [\Delta_0 \sin \varphi W_0(\varphi)] + \frac{D}{2} \frac{\partial^2 W_0(\varphi)}{\partial \varphi^2} = 0, \quad (9.2.5)$$

а функция $W_\tau(x, \tau)$ в (9.2.4) — условию

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} W_\tau(x, \tau) = 0. \quad (9.2.6)$$

Учитывая четность $W_\tau(x, \tau)$ по отношению к x , нетрудно получить

$$\begin{aligned} \sin \varphi W(0, \tau, \varphi) &= \sin \varphi W_0(\varphi) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} W_\tau(x, \tau) \sin \varphi \cos \varphi x dx = \\ &= \sin \varphi W_0(\tau) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} [W_\tau(x-1, \tau) - W_\tau(x+1, \tau)] \sin \varphi x dx. \end{aligned} \quad (9.2.7)$$

Дифференцируя (9.2.4) по τ и по φ и (9.2.7) по φ и подставляя все в (9.2.3), получим, принимая во внимание (9.2.5), следующее уравнение для $W_\tau(x, \tau)$:

$$\frac{\partial W_\tau(x, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\Delta_0}{2} x [W_\tau(x-1, \tau) - W_\tau(x+1, \tau)] - \frac{D}{2} x^2 W_\tau(x, \tau). \quad (9.2.8)$$

Решая это уравнение, мы отыщем $W_\tau(x, \tau)$.

Оставляя пока в стороне решение этого уравнения, предположим, что $W_\tau(x, \tau)$ нам известно. Рассмотрим некоторые свойства $W_\tau(x, \tau)$. Обратимся к (9.2.4). Из условия нормировки для вероятности переходов и стационарной вероятности:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} W(0, \tau, \varphi) d\varphi = 1, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} W_0(\varphi) d\varphi = 1,$$

следует, что

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} d\varphi \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} W_\tau(x, \tau) \cos \varphi x dx = \\ = \int_{-\infty}^{+\infty} W_\tau(x, \tau) \delta(x) dx = W_\tau(0, \tau) = 0. \end{aligned} \quad (9.2.9)$$

Однако это условие справедливо лишь тогда, когда $W_0(\varphi) \neq 0$. Если же $W_0(\varphi) \equiv 0$, то условие нормировки дает

$$W_\tau(0, \tau) = 1. \quad (9.2.10)$$

В нашем случае, если $D > 0$, то, как уже было сказано, при $\tau \rightarrow \infty$ броуновские частицы расползаются в обе стороны до бесконечности, и нетрудно видеть, что в этом случае

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} W(0, \tau, \varphi) = 0$$

для любого значения φ . Следовательно, в этом случае $W_0(\varphi) \equiv \equiv 0$, и мы имеем (9.2.10).

В принципе, пользуясь тем, что φ есть фаза исследуемого колебания и поэтому значения φ и $\varphi + 2\pi$ эквивалентны, можно было бы наложить на $W(0, \tau, \varphi)$ условие периодичности: $W(0, \tau, \varphi + 2\pi) = W(0, \tau, \varphi)$. Это означает, что всю ось фазы мы заменили бы интервалом длиной 2π . В этом случае как легко понять, $W_0(\varphi) \neq 0$. Именно такой случай рассмотрен в (1958 [14], 1961 [15]). Однако в этом случае точное исследование $\chi(\tau)$ становится чрезвычайно сложным. Для исследования $\chi(\tau)$ гораздо естественнее рассматривать всю ось $-\infty < \varphi < +\infty$ и тем самым брать случай $W_0(\varphi) \equiv 0$.

Итак,

$$W(0, \tau, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} W_{\tau}(x, \tau) \cos \varphi x dx. \quad (9.2.11)$$

Здесь $W_{\tau}(x, \tau)$ есть теперь характеристическая функция искомого распределения. Выразим $\chi(\tau)$ через $W_{\tau}(x, \tau)$:

$$\begin{aligned} 2\chi(\tau) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi^2 W(0, \tau, \varphi) d\varphi = \int_{-\infty}^{+\infty} W_{\tau}(x, \tau) dx \frac{1}{2\pi} \oint_{-\infty}^{+\infty} \varphi^2 \cos \varphi x d\varphi = \\ &= - \int_{-\infty}^{+\infty} W_{\tau}(x, \tau) \delta''(x) dx = - \left[\frac{\partial^2 W_{\tau}(x, \tau)}{\partial x^2} \right]_{x=0}. \end{aligned} \quad (9.2.12)$$

Дифференцируя (9.2.12) по τ , найдем

$$2 \frac{d\chi(\tau)}{d\tau} = - \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial W_{\tau}(x, \tau)}{\partial \tau} \right]_{x=0}.$$

Подставляя сюда (9.2.8), выполняя дифференцирование по x и учитывая четность $W_{\tau}(x, \tau)$ по x , придем к следующему значению коэффициента диффузии фазы:

$$P(\tau) \equiv 2 \frac{d\chi(\tau)}{d\tau} = D + 2\Delta_0 W'_{\tau_x}(1, \tau). \quad (9.2.13)$$

Интегрируя теперь это выражение по τ от 0 до τ , принимая во внимание (9.2.10), получим следующее окончательное выражение для среднего квадрата уходов фазы синхронизованного колебания:

$$\langle \Delta\varphi^2 \rangle = 2\chi(\tau) = D\tau + 2\Delta_0 \int_0^{\tau} W'_{\tau_x}(1, \theta) d\theta. \quad (9.2.14)$$

Эта формула является точной. Из нее, во-первых, сразу же следует при $\Delta_0=0$ диффузионный закон для фазы:

$$\langle \Delta \varphi^2 \rangle = D\tau,$$

который мы имели (см. гл. 5) для обычного автогенератора с шумом. Во-вторых, при $\Delta_0 > 0$ «чистого» диффузионного закона для φ не получается, зависимость $\chi(\tau)$ от τ становится более сложной и коэффициент диффузии начинает зависеть от τ .

3. Точного решения уравнения (9.2.8) простыми методами найти не удастся, поэтому мы рассмотрим лишь некоторые приближения для наиболее интересных случаев. То же относится и к $D(\tau)$, и к $\chi(\tau)$. Для решения вопроса о существовании размытия спектральной линии колебания необходимо знать поведение $\chi(\tau)$ при $\tau \rightarrow \infty$. Если $\chi(\tau) \rightarrow \infty$, то значение коэффициента диффузии $D_\infty \equiv P(\infty)$ приобретает особый интерес.

Начнем отыскание функций $\chi(\tau)$ и $P(\tau)$ для малых τ , когда нетрудно получить точные значения. При $\tau=0$ из (9.2.11) имеем на основании начального условия для $W(0; \tau, \varphi)$:

$$W(0; 0, \varphi) = \delta(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} W_\tau(x, 0) \cos \varphi x dx.$$

Отсюда получаем начальное условие для $W_\tau(x, \tau)$

$$W_\tau(x, 0) = 1. \quad (9.2.15)$$

Из (9.2.8), учитывая (9.2.15), получим при $\tau=0$

$$\left(\frac{\partial W_\tau(x, \tau)}{\partial \tau} \right)_{\tau=0} = -\frac{D}{2} x^2. \quad (9.2.16)$$

Дифференцируя (9.2.8) по τ , учитывая (9.2.16), нетрудно получить

$$\left(\frac{\partial^2 W_\tau(x, \tau)}{\partial \tau^2} \right)_{\tau=0} = \Delta_0 D x^2 + \frac{D}{4} x^4.$$

Аналогично имеем

$$\left(\frac{\partial^3 W_\tau(x, \tau)}{\partial \tau^3} \right)_{\tau=0} = - \left[D \Delta_0 (2\Delta_0 + D) x^2 + \frac{3}{2} D^2 \Delta_0 x^4 + \frac{D^3}{8} x^6 \right].$$

Таким образом, первые три члена разложения $W_\tau(x, \tau)$ по малому τ имеют вид

$$W_\tau(x, \tau) = 1 - \frac{D}{2} x^2 \tau + \frac{1}{2} \left(\Delta_0 D x^2 + \frac{D^2}{4} x^4 \right) \tau^2 - \\ - \frac{1}{6} \left[D \Delta_0 (2\Delta_0 + D) x^2 + \frac{3}{2} D^2 \Delta_0 x^4 + \frac{D^3}{8} x^6 \right] \tau^3 + \dots \quad (9.2.17)$$

Отсюда с помощью (9.2.12) или (9.2.14) можно получить ($\tau > 0$)

$$\chi(\tau) = \frac{D}{2} \left(\tau - \Delta_0 \tau^2 + \frac{\Delta_0(2\Delta_0 + D)}{3} \tau^3 - \dots \right). \quad (9.2.18)$$

Таково точное выражение $\chi(\tau)$ для малых τ , при любых D и Δ_0 . Дифференцируя, найдем разложение коэффициента диффузии

$$P(\tau) = D(1 - 2\Delta_0\tau + \Delta_0(2\Delta_0 + D)\tau^2 - \dots). \quad (9.2.19)$$

Физический смысл первых членов этого разложения очевиден. При $\tau = 0$ $W(0, \tau, \varphi) = \delta(\varphi)$. Это значит, что все изображающие точки находятся при $\varphi = 0$; при $\tau > 0$ они начинают диффундировать с коэффициентом диффузии $P(\tau)$, равным коэффициенту свободной диффузии D . При начальных τ диффузия действительно свободна, так как $\varphi \ll 1$, потенциальная функция постоянна. Затем при возрастании τ , согласно (9.2.19), коэффициент диффузии начинает уменьшаться — сказывается возрастание потенциальной функции.

4. Рассмотрим теперь подробнее случай, когда мощность синхронизирующего сигнала мала по сравнению с мощностью собственных шумов — случай слабой синхронизации.

На основании п. 8 § 9.1 естественно теперь всюду за мощность собственных шумов брать мощность шумов, активно действующих на фазу, а именно $S_{E\Delta} = c_0 \Delta_0$. Таким образом, рассматриваем случай

$$\frac{1}{\mu} \equiv \frac{D}{\Delta_0} = \frac{\pi S_{E\Delta}}{E_0^2/2} \gg 1.$$

Уравнение (9.2.8) запишем в виде

$$\frac{\partial B(x, \theta)}{\partial \theta} = \mu x [B(x-1, \theta) - B(x+1, \theta)] - x^2 B(x, \theta), \quad (9.2.20)$$

где обозначено

$$\theta = \frac{D\tau}{2}, \quad W_\tau(x, \tau) \equiv B(x, \theta).$$

Вследствие малости μ уравнение (9.2.20) можно решать приближенно. Его решение ищем в виде

$$B(x, \theta) = B_0(x, \theta) + \mu B_1(x, \theta) + \mu^2 B_2(x, \theta) + \dots$$

Нетрудно получить следующие уравнения для $B_k(x, \theta)$:

$$\frac{\partial B_0(x, \theta)}{\partial \theta} + x^2 B_0(x, \theta) = 0,$$

$$\frac{\partial B_1(x, \theta)}{\partial \theta} + x^2 B_1(x, \theta) = x [B_0(x-1, \theta) - B_0(x+1, \theta)],$$

$$\frac{\partial B_2(x, \theta)}{\partial \theta} + x^2 B_2(x, \theta) = x [B_1(x-1, \theta) - B_1(x+1, \theta)],$$

.....

Решая первые два уравнения, получим

$$B_0(x, \theta) = e^{-x^2 \theta},$$

$$B_1(x, \theta) = \frac{x}{2x-1} [e^{-(x-1)^2 \theta} - e^{-x^2 \theta}] + \frac{x}{2x+1} [e^{-(x+1)^2 \theta} - e^{-x^2 \theta}].$$

Таким образом, в первом приближении получаем

$$W_\tau(x, \tau) = e^{-\frac{Dx^2}{2} \tau} + \mu \frac{x}{2x-1} \left[e^{-\frac{D}{2} (x-1)^2 \tau} - e^{-\frac{Dx^2}{2} \tau} \right] + \\ + \mu \frac{x}{2x+1} \left[e^{-\frac{D}{2} (x+1)^2 \tau} - e^{-\frac{Dx^2}{2} \tau} \right]. \quad (9.2.21)$$

Дифференцируя по x и подставляя $x=1$, найдем, согласно (9.2.13),

$$P(\tau) = D \left(1 - 2 \frac{\Delta_0^2}{D^2} \right) + 2\Delta_0 e^{-\frac{D\tau}{2}} \left(\frac{8}{9} \frac{\Delta_0}{D} - D\tau + \frac{4}{3} \Delta_0 \tau \right) + \\ + 2\Delta_0 e^{-2D\tau} \left(\frac{1}{9} \frac{\Delta_0}{D} - \frac{2}{3} \Delta_0 \tau \right). \quad (9.2.22)$$

Нетрудно проверить, кстати, что при малых τ это выражение переходит в (9.2.19).

Устремим $\tau \rightarrow \infty$. Тогда

$$D_\infty = D(1 - 2\mu^2) = D \left(1 - 2 \frac{\Delta_0^2}{D^2} \right). \quad (9.2.23)$$

Это выражение является точным при $\mu \ll 1$ и показывает, что при $\mu=0$ (синхронизируемый сигнал отсутствует) $D_\infty = D$, что и должно быть, так как в отсутствие синхронизирующего сигнала диффузия происходит свободно. При $\mu > 0$ коэффициент диффузии фазы уменьшается, так как диффузия затрудняется потенциальным барьером.

Если ограничиться первым приближением, то можно принять (9.2.23) справедливым при любом μ , дополнив требованием $D_\infty = 0$ при $\mu > 1/\sqrt{2}$, так как по своему смыслу D_∞ не может быть отрицательным.

Таким образом, в первом приближении D_∞ зависит от Δ_0/D следующим образом:

$$D_\infty = \begin{cases} D \left(1 - 2 \frac{\Delta_0^2}{D^2} \right), & 0 \leq \frac{\Delta_0}{D} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ 0, & \frac{1}{\sqrt{2}} < \frac{\Delta_0}{D}. \end{cases} \quad (9.2.24)$$

График этой зависимости изображен на рис. 9.11. Из него следует, во-первых, что при $\Delta_0/D \ll 1$, т. е. при малом синхронизирующем сигнале диффузия фазы идет с коэффициентом, равным D , т. е. происходит свободная диффузия: синхронизирующий сигнал

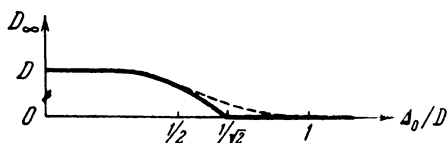


Рис. 9.11.

по сравнению с собственными шумами настолько мал, что практически никакого влияния на флуктуации фазы автогенератора не оказывает, т. е. при таком синхронизирующем сигнале им можно просто пренебречь. Флук-

туационные процессы в таком автогенераторе полностью в этом случае совпадают, как уже говорилось, с описанными в гл. 5.

При возрастании Δ_0/D коэффициент диффузии фазы D_∞ начинает уменьшаться, так как потенциальные барьеры потенциальной функции $U(\varphi)$ начинают препятствовать свободной диффузии фазы. Расплывание вероятностей переходов $W(0, \tau, \varphi)$ становится замедленным.

Наконец, при $\frac{\Delta_0}{D} \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$ потенциальные барьеры настолько возрастают, что в первом приближении предельный коэффициент диффузии равен нулю. Фаза вовсе не покидает области

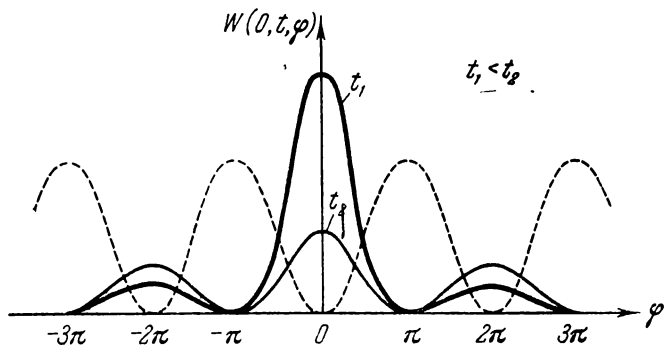


Рис. 9.12.

минимума потенциальной функции ($-\pi, +\pi$). Расплывание вероятностей переходов $W(0, \tau, \varphi)$ происходит только в пределах ($-\pi, +\pi$), где при $\tau \rightarrow \infty$ устанавливается какое-то стационарное распределение $W(0, \infty, \varphi)$ с конечной дисперсией.

5. В случае $\mu \gg 1$ распыление $W(0, \tau, \varphi)$ будет происходить с двумя постоянными времени: быстрые установления «стацио-

нарного» распределения в каждом минимуме потенциальной функции и медленный переход фазовых точек через потенциальный барьер из одного минимума в другой. Рассматривая только крупномасштабные промежутки времени, много большие по сравнению с быстрым временем установления, мы можем считать распределение вероятностей внутри каждого минимума в каждый момент установившимся. При этом с течением времени будет изменяться лишь «амплитуда» распределения в каждом минимуме потенциальной функции (рис. 9.12).

Таким образом, можно записать

$$W(0, t, \varphi) = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} A_s(t) W(\varphi - 2\pi s), \quad (9.2.25)$$

где $W(\varphi)$ — некоторое установившееся распределение с максимальным значением в точке $\varphi=0$. При этом

$$\int_{-\pi}^{+\pi} W(\varphi) d\varphi = 1. \quad (9.2.26)$$

Из этих формул нетрудно получить основное условие, накладываемое на $A_s(t)$. Интегрируя (9.2.25) по φ от $-\infty$ до $+\infty$, найдем, что

$$\sum_{s=-\infty}^{+\infty} A_s(t) = 1. \quad (9.2.27)$$

Кроме этого, нетрудно увидеть из анализа начальных условий, что

$$A_s(0) = \begin{cases} 1, & s=0, \\ 0, & s \neq 0 \end{cases} \quad (9.2.28)$$

и что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} A_s(t) = 0.$$

Условие (9.2.28) дает начало отсчета крупномасштабному времени t : при $t=0$ все фазовые точки находятся в первом минимуме и имеют там установившееся распределение $W(0, 0, \varphi) = W(\varphi)$. С «включением» времени это распределение начинает уменьшаться, не изменяя своей формы, а в потенциальных минимумах в точках 2π и -2π начинают расти распределения по законам $A_1(t)W(\varphi)$ и $A_{-1}(t)W(\varphi)$. Таким образом, наше рассмотрение является «квазистационарным».

Дисперсия флуктуаций фазы равна

$$\begin{aligned}
 2\chi(t) &= \langle \varphi_t^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi^2 W(0, t, \varphi) d\varphi = \sum_{-\infty}^{+\infty} A_s(t) \int_{2\pi s - \pi}^{2\pi s + \pi} \varphi^2 W(\varphi - 2\pi s) d\varphi = \\
 &= \sum_{-\infty}^{+\infty} A_s(t) (4\pi^2 s^2 + \chi_0) = 2\chi_0 + 4\pi^2 \sum_{-\infty}^{+\infty} s^2 A_s(t), \\
 2\chi_0 &= \int_{-\pi}^{+\pi} x^2 W(x) dx.
 \end{aligned}
 \tag{9.2.29}$$

Коэффициент диффузии фазы равен, следовательно,

$$P(t) = 4\pi^2 \sum_{-\infty}^{+\infty} s^2 \dot{A}_s(t). \tag{9.2.30}$$

Теперь для отыскания $P(t)$ необходимо получить какие-то данные об $A_s(t)$.

При $t=0$ $A_0 \neq 1$, а остальные $A_s = 0$. При $t > 0$ A_0 начинает уменьшаться — возникает диффузия фазовых точек через первый потенциальный барьер. Диффузия возникает потому, что состояние (9.2.28) является неравновесным. Скорость уменьшения A_0 должна быть пропорциональна разности между A_0 и A_1 , A_{-1} . Заметим здесь, кстати, что в силу симметрии потенциальной функции и начального условия относительно начала координат $\varphi=0$, $A_s(t) = A_{-s}(t)$. Если $A_0 = A_1 = A_{-1}$, то для A_0 исчезает причина ее изменения. Диффузия равновероятно может идти как из потенциального минимума при $\varphi=0$ в минимумы при $\varphi = \pm 2\pi$, так и наоборот. Поэтому для любого $A_s(t)$ может быть записано следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{dA_s(t)}{dt} = -b(A_s - A_{s+1}) - b(A_s - A_{s-1}) = -b(2A_s - A_{s+1} - A_{s-1}),
 \tag{9.2.31}$$

где $2b$ — некоторый коэффициент, численно равный скорости уменьшения $A_0(t)$ в начальный момент $t=0$. Другими словами, b — это поток вероятности через сечение $\varphi=\pi$ в начальный момент времени (при $t=0$ все $A_s \neq 0 = 0$ и $dA_0/dt = -2b$, так как $A_0(t=0) = 1$).

Подставляя (9.2.31) в (9.2.30), получим

$$\begin{aligned}
 P(t) &= 4\pi^2 b \sum_{-\infty}^{+\infty} s^2 (A_{s+1} + A_{s-1} - 2A_s) = \\
 &= 4\pi^2 b \sum_{-\infty}^{+\infty} [(s-1)^2 + (s+1)^2 - 2s^2] A_s = 8\pi^2 b.
 \end{aligned}$$

Таким образом, $P(t)$ является постоянной величиной и, следовательно, (для $t > 0$)

$$\chi(t) = 4\pi^2 b t + \chi_0. \quad (9.2.32)$$

Итак, для нашей модели в крупномасштабном времени для флуктуаций фазы имеет место диффузионный закон. Заметим, что при получении этого диффузионного закона мы использовали только периодичность потенциальной функции, а не ее конкретный вид. Это значит, что (9.2.32) будет справедливым при любой форме периодической (с периодом 2π) потенциальной функции $U(\varphi)$.

Мы также не выяснили вид функции $W(\varphi)$, которая, не влияя на зависимость (9.2.32), тем не менее определяет значения коэффициентов b и χ_0 .

Для определения коэффициента b рассмотрим моменты времени, близкие к $t=0$. При этом мы имеем ($A_0(t) \neq 0$, $A_{s \neq 0} = 0$)

$$\frac{dA_0(t)}{dt} = -2bA_0(t), \quad (9.2.33)$$

$$W(0, t, \varphi) = A_0(t) W(\varphi). \quad (9.2.34)$$

Основное уравнение (9.2.3) для $W(0, t, \varphi)$ можно записать в форме

$$\frac{\partial W(0, t, \varphi)}{\partial t} = -\frac{\partial G(t, \varphi)}{\partial \varphi}, \quad (9.2.35)$$

где

$$G(t, \varphi) = -\Delta_0 \sin \varphi W(0, t, \varphi) - \frac{D}{2} \frac{\partial W(0, t, \varphi)}{\partial \varphi}$$

есть поток вероятности через сечение φ в момент времени t . Интегрируя (9.2.34) в пределах от $-\pi$ до $+\pi$, получим, с учетом (9.2.26),

$$A_0(t) = \int_{-\pi}^{+\pi} W(0, t, \varphi) d\varphi. \quad (9.2.36)$$

Дифференцируя (9.2.36) по t и учитывая (9.2.35), имеем

$$\frac{dA_0(t)}{dt} = - \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\partial G(t, \varphi)}{\partial \varphi} d\varphi = -[G(t, \pi) - G(t, -\pi)].$$

Из-за нечетности $G(t, \varphi)$ относительно φ

$$\frac{dA_0(t)}{dt} = -2G(t, \pi),$$

или

$$\frac{dA_0(t)}{dt} = -2G_1(\pi) A_0(t),$$

где

$$G_1(\varphi) = -\Delta_0 \sin \varphi W(\varphi) - \frac{D}{2} \frac{dW(\varphi)}{d\varphi}. \quad (9.2.37)$$

Сравнивая (9.2.36) с (9.2.33), видим, что

$$b = G_1(\pi),$$

т. е. b действительно равно потоку вероятности через сечение $\varphi = \pi$, другими словами, через потенциальный барьер.

Подставляя $G(t, \varphi) = A_0(t) G_1(\varphi)$ в (9.2.35), найдем

$$\frac{dG_1(\varphi)}{d\varphi} = 2G_1(\pi) W(\varphi). \quad (9.2.38)$$

Это уравнение для $G_1(\varphi)$ является точным. Его можно заметить, однако, приближенным. Так как мы рассматриваем случай малых шумов и больших потенциальных барьеров, а именно случай $2\Delta_0/D \gg 1$, то ясно, что коэффициент $b = G_1(\pi)$, определяющий коэффициент диффузии, является очень малым, поэтому правая часть (9.2.38) является малой величиной. Следовательно, точное уравнение (9.2.38) можно заменить приближенным:

$$\frac{dG_1(\varphi)}{d\varphi} = 0, \quad G_1(\varphi) = \text{const}. \quad (9.2.39)$$

Этому уравнению соответствует условие стационарности потока вероятности. Так как мы уже имели $G_1(\pi) = b$, то решением уравнения (9.2.39) является

$$G_1(\varphi) = b.$$

Для нахождения этого значения последуем методу Крамерса [92]. Поток вероятности $G_1(\varphi)$, заданный выражением (9.2.37), можно записать как

$$G_1(\varphi) = b = -\frac{D}{2} e^{2\mu \cos \varphi} \frac{d}{d\varphi} [W(\varphi) e^{-2\mu \cos \varphi}].$$

Отсюда

$$b \frac{2}{D} e^{-2\mu \cos \varphi} = -\frac{d}{d\varphi} [W(\varphi) e^{-2\mu \cos \varphi}].$$

Проинтегрируем теперь это равенство по φ от 0 до 2π и учтем, что $W(2\pi) = 0$ (мы рассматриваем моменты времени, близкие к $t=0$, когда все фазовые точки лежат вблизи $\varphi=0$ и их практически нет в точках $\varphi = \pm 2\pi s$, $s=1, 2, 3, \dots$), тогда получим

$$b = \frac{D}{2} \frac{W(0) e^{-2\mu}}{2\pi I_0(2\mu)}, \quad (9.2.40)$$

где $I_0(x)$ — модифицированная функция Бесселя.

Осталось найти теперь стационарное распределение $W(\varphi)$. Его легко найти в силу малости b из приближенного уравнения

$$G_1(\varphi) = -\Delta_0 \sin \varphi W(\varphi) - \frac{D}{2} \frac{dW(\varphi)}{d\varphi} = 0,$$

решением которого является функция

$$W(\varphi) = C e^{2\mu \cos \varphi}.$$

Находя постоянную интегрирования C из условия нормировки (9.2.26), получим окончательно

$$W(\varphi) = \frac{1}{2\pi I_0(2\mu)} e^{2\mu \cos \varphi}. \quad (9.2.41)$$

Подставляя (9.2.41) в (9.2.40), найдем окончательное выражение для b :

$$b = \frac{D}{2I_0^2(2\mu) 4\pi^2}.$$

Тем самым искомый коэффициент диффузии флуктуаций фазы синхронизованного колебания равен

$$D_\infty = \frac{D}{I_0^2\left(\frac{2\Delta_0}{D}\right)}. \quad (9.2.42)$$

Поскольку $\Delta_0/D \gg 1$, то на основании известных свойств модифицированной функции Бесселя

$$D_\infty = 4\pi\Delta_0 e^{-4\frac{\Delta_0}{D}}. \quad (9.2.43)$$

Эта формула показывает, что коэффициент диффузии фазы при больших значениях Δ_0/D действительно является очень малым и при $\Delta_0/D \rightarrow \infty$ очень быстро стремится к нулю.

Выражение (9.2.42) мы получили для $\mu \gg 1$ и для этого условия оно может считаться достаточно точным. Однако приближенно выражение (9.2.42) может рассматриваться при любом значении μ , тем более, что при $\mu \ll 1$ из него мы получаем $D_\infty = D$, что также является точным. Зависимость D_∞ от Δ_0/D , согласно (9.2.42), представлена на рис. 9.11 пунктиром.

Таким образом, на рис. 9.11 две кривые (сплошная линия и пунктир), соответствующие формулам (9.2.24) и (9.2.42), дают приближения с разных сторон ($\mu \ll 1$ и $\mu \gg 1$ соответственно) для зависимости D_∞ от μ . Истинная зависимость $D_\infty(\mu)$ лежит

где-то посередине между упомянутыми кривыми. Из хода кривых видно, что с достаточной степенью точности D_∞ дается формулой (9.2.24) для $0 \leq \mu \leq 0,5$ и $D_\infty = 0$ для $\mu \geq 1,5$.

6. Рассмотрим теперь вопрос о форме и ширине спектральной линии. Начнем с больших значений μ . Как следует из гл. 4, для определения формы спектральной линии, порождаемой флуктуациями фазы, необходимо найти $\langle \cos \Delta \varphi \rangle$, $\langle \sin \Delta \varphi \rangle$ или в нашем случае $\langle \cos \varphi \rangle$ и $\langle \sin \varphi \rangle$. На основании (9.2.35) имеем

$$\begin{aligned} \langle \cos \varphi \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} \cos \varphi \sum_{-\infty}^{+\infty} A_s(t) W(\varphi - 2\pi s) d\varphi = \\ &= \sum_{-\infty}^{+\infty} A_s(t) \int_{-\pi}^{+\pi} \cos(x + 2\pi s) W(x) dx = \\ &= \int_{-\pi}^{+\pi} \cos x W(x) dx = \frac{I_1(2\mu)}{I_0(2\mu)} \approx 1. \end{aligned} \quad (9.2.44)$$

Аналогично получим, что $\langle \sin \varphi \rangle = 0$. Весьма интересным является то, что $\langle \cos \varphi \rangle$ не зависит от t . Это значит, что (см. § 4.3) (в пренебрежении амплитудными флуктуациями)

$$A^0(\tau) = \frac{R_0^2}{2}, \quad A^1(\tau) = 0.$$

Следовательно, форма спектральной линии синхронизованного колебания есть монохроматическая линия

$$W_x(\Omega) = \frac{R_0^2}{2} \delta(\Omega).$$

Мы получили чрезвычайно любопытный результат: несмотря на то, что флуктуации фазы существуют и для фазы имеет место диффузионный закон, ширина спектральной линии синхронизованного колебания равна нулю. Это получено для случая, когда справедлива формула (9.2.25) для распределения вероятностей фазы, т. е. для $\mu \gg 1$.

Представляет несомненный интерес точно решить вопрос о ширине линии при любом μ . Для этого мы можем воспользоваться результатами § 4.8, где получена общая формула для $\Delta\Omega$ независимо от закона распределения фазы. Уравнение (4.8.1) совпадает с нашим уравнением (9.2.3) при потенциальной функции

$$U(\varphi) = \Delta_0 - \Delta_0 \cos \varphi.$$

Следовательно, мы сразу же можем воспользоваться формулой (4.8.7) для вспомогательной величины T_{Δ} :

$$T_{\Delta} = \Pi(0, 0) e^{-2\mu} \int_0^{\infty} e^{2\mu \cos \varphi} \cos \varphi d\varphi - \\ - \frac{1}{D} \int_0^{\infty} e^{2\mu \cos \varphi} \cos \varphi \int_0^{\varphi} e^{-2\mu \cos x} dx d\varphi. \quad (9.2.45)$$

Воспользовавшись разложением

$$e^{2\mu \cos \varphi} = I_0(2\mu) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} I_n(2\mu) \cos n\varphi,$$

нетрудно увидеть, что оба слагаемых в (9.2.45) при любом μ и D расходятся. Следовательно, ширина спектральной линии $\Delta\Omega$, на основании (4.8.5), равна нулю.

Итак, мы получили, что при любом, даже сколь угодно малом $\mu > 0$ ширина спектральной линии синхронизованного колебания равна нулю. Другими словами, несмотря на диффузионный закон роста флуктуаций фазы, ширина спектральной линии синхронизованного колебания при любой сколь угодно малой амплитуде синхронизирующего сигнала равна нулю.

Каков смысл полученного результата? Прежде всего отметим, что этот результат парадоксален. В самом деле, в отсутствие внешнего сигнала ($E_0 = 0$ и, следовательно, $\mu = 0$) генератор является свободным. Это значит, что его спектр (в пренебрежении амплитудными флуктуациями) представляет собой линию с шириной, равной $\pi D/2$. Если же амплитуда синхронизирующего сигнала сколь угодно мала, но больше нуля ($\mu > 0$), то мы получаем $\Delta\Omega = 0$. Таким образом, кажется, что сколь угодно слабый синхронизирующий сигнал приводит к скачкообразному изменению $\Delta\Omega$ с $\pi D/2$ до нуля. Однако, разумеется, подобных скачков нет. Тот факт, что мы получили для любого $\mu > 0$ ширину линии $\Delta\Omega = 0$, говорит только о том, что при $\mu > 0$ в составе спектра колебания *появилась монохроматическая линия* и ничего не говорит о форме, ширине и величине пьедестала и об отношении мощности монохроматической линии к мощности пьедестала. Как будет показано ниже (§ 9.3), при малом $\mu > 0$ спектр колебания синхронизованного генератора состоит из спектра свободного генератора (размытая линия с шириной $\pi D/2$) плюс монохроматическая линия с относительно малой мощностью.

Кроме того, отметим, что мы получили монохроматическую линию при наличии диффузионного закона для фазы потому, что вероятностное распределение для фазы (9.2.25) не является гауссовым, а в этом случае дисперсия флуктуаций фазы, в общем случае, не определяет ширину спектральной линии.

7. Частотные флуктуации. Рассмотрим теперь спектральную плотность флуктуаций частоты синхронизованного колебания $S_v(\Omega)$. Для флуктуаций частоты $v(t)$ имеем, согласно (9.2.2), уравнение (полагая $\varphi(0) = 0$)

$$v(t) = -\Delta_0 \sin \int_0^t v(x) dx - \frac{\omega_0}{2R_0} e_{\parallel}(t). \quad (9.2.46)$$

Это уравнение является сложным, поэтому из него непосредственно получить $S_v(\Omega)$ не удастся. Отметим только следующее. Поскольку в (9.2.46) явно входит t , то в общем случае $v(t)$ является нестационарным процессом и его корреляционная функция зависит как от t , так и от τ :

$$\langle v(t)v(t+\tau) \rangle = K_v[t, t+\tau].$$

Предположим, что существует предел

$$\lim_{t \rightarrow \infty} K_v[t, t+\tau] = L_v(\tau). \quad (9.2.47)$$

Тогда функция корреляции (1.4.2) равна $\Phi_v(\tau) = L_v(\tau)$. В этом случае можно говорить о существовании «установившегося спектра» флуктуаций частоты со спектральной плотностью $S_v(\Omega)$, связанной обычным образом с $\Phi_v(\tau)$.

Существование $\Phi_v(\tau)$ легко доказать для двух предельных случаев $\mu \ll 1$ и $\mu \gg 1$. В первом случае (9.2.46) сводится к

$$v(t) = -\frac{\omega_0}{2R_0} e_{\parallel}(t),$$

и легко видеть, что $\Phi_v(\tau) = L_v(\tau) = D\delta(\tau)$ и $S_v(\Omega) = D/2\pi$. Во втором случае (9.2.46) сводится к (9.1.16), и нетрудно найти, что

$$\begin{aligned} \Phi_v(\tau) = L_v(\tau) &= -\frac{d^2 \Phi_{\varphi}(\tau)}{d\tau^2} = -\frac{D\Delta_0}{2} e^{-\Delta_0|\tau|} + D\delta(\tau), \\ S_v(\Omega) &= \frac{D}{2\pi} \frac{\Omega^2}{\Omega^2 + \Delta_0^2}. \end{aligned}$$

Все это дает основание считать предел (9.2.47) существующим при любом μ .

Отыщем теперь некоторые характеристики $S_v(\Omega)$ для произвольного μ . Из-за нестационарности $v(t)$, нестационарным в общем случае будет и $\Delta\varphi$. Его средний квадрат равен

$$\langle \Delta\varphi^2 \rangle = \int_t^{t+\tau} \int_t^{t+\tau} K_v[\xi, \eta] d\xi d\eta = \int_0^\tau \int_0^\tau K_v[t+x, t+y] dx dy.$$

В силу (9.2.47) существует предел

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \langle \Delta\varphi^2 \rangle \equiv 2\chi(\tau) = \int_0^\tau \int_0^\tau L_v(x-y) dx dy.$$

Это соотношение позволяет выразить искомые характеристики $S_v(\Omega)$ через $\chi(\tau)$, которое мы считаем известным. Дифференцируя $\chi(\tau)$, получим

$$2 \frac{d\chi(\tau)}{d\tau} = 2 \int_0^\tau \Phi_v(x) dx.$$

С другой стороны, $2 d\chi(\tau)/d\tau = P(\tau)$ — коэффициенту диффузии фазы. Следовательно,

$$P(\tau) = 2 \int_0^\tau \Phi_v(x) dx.$$

При $\tau \rightarrow \infty$ имеем

$$D_\infty = 2 \int_0^\infty \Phi_v(x) dx = 2\pi S_v(0)$$

— соотношение, связывающее значение неизвестной нам $S_v(\Omega)$ при $\Omega=0$ с предельным коэффициентом диффузии. Рассмотрим теперь значение $S_v(\Omega)$ при $\Omega \rightarrow \infty$

$$S_v(\infty) = \lim_{\Omega \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_v(\tau) \cos \Omega\tau d\tau.$$

Нетрудно видеть, что основной вклад в этот интеграл при сколь угодно больших Ω дает значение $\Phi(\tau)$ при малых τ . Пусть $|\tau| \leq \varepsilon$, где ε — сколь угодно малая положительная величина. Обозначим

$$\Phi_v(\tau) \equiv \Phi_\varepsilon(\tau), \quad |\tau| \leq \varepsilon.$$

Тогда

$$S_v(\Omega \rightarrow \infty) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_\varepsilon(\tau) \cos \Omega\tau d\tau. \quad (9.2.48)$$

Рассматривая значение $\chi(\tau)$ при малых τ , можем в общем случае записать (напомним, что $\chi(\tau)$ — четная функция)

$$\chi(\tau) = \chi_1 |\tau| + \chi_2 \tau^2 + \chi_3 |\tau|^3 + \dots$$

Следовательно,

$$\Phi_\varepsilon(\tau) = \left(\frac{d^2 \chi(\tau)}{d\tau^2} \right)_{|\tau| \leq \varepsilon} = 2\chi_1 \delta(\tau) + 2\chi_2.$$

Подставляя это выражение в (9.2.48), получим

$$S_v(\Omega) = \frac{1}{\pi} \chi_1.$$

Применим теперь ранее полученные результаты к нашему случаю. Для (9.2.46), или, что то же самое, для (9.2.2), мы имели, во-первых, (см. (9.2.42)) $D_\infty = D/I_0^2(2\mu)$ и, во-вторых, (см. (9.2.18)) $\chi_1 = D/2$. Следовательно, искомая спектральная плотность $S_v(\Omega)$ такова, что при любом μ

$$S_v(0) = \frac{D}{2\pi I_0^2(2\mu)}, \quad S_v(\infty) = \frac{D}{2\pi}.$$

Общий вид $S_v(\Omega)$ можно представить теперь кривой на рис. 9.13, где неизвестной еще величиной является характерная частота Ω_0 (Ω_0^{-1} — время корреляции флуктуаций фазы). При $\mu \gg 1$, когда $I_0^2(2\mu) \gg 1$, $S_v(\Omega)$ должна переходить в $D\Omega^2/[2\pi(\Omega^2 + \Delta_0^2)]$, при $\mu \ll 1$ наша кривая $S_v(\Omega)$ должна переходить в $S_v(\Omega) = D/2\pi$. На основании этих свойств изображенная на рис. 9.13 кривую $S_v(\Omega)$ можно приближенно представить формулой

$$S_v(\Omega) = \frac{D}{2\pi} \frac{\Omega^2 + \Delta_0^2 I_0^{-2}(2\mu)}{\Omega^2 + \Delta_0^2}. \quad (9.2.49)$$

Рис. 9.13.

Функция корреляции флуктуаций частоты, соответствующая этой спектральной плотности, равна

$$\Phi_v(\tau) = D\delta(\tau) - \frac{\Delta_0 D}{2} [1 - I_0^{-2}(2\mu)] e^{-\Delta_0 |\tau|}. \quad (9.2.50)$$

Таким образом, формулы (9.2.49) и (9.2.50) можно принять за общие формулы для спектра и функций корреляции флуктуаций частоты синхронизованного колебания при любом значении $\mu = \Delta_0/D$.

Можно теперь, наконец, найти и спектральную плотность фазовых флуктуаций. Умножая (9.2.49) на Ω^{-2} , будем иметь

$$S_{\varphi}(\Omega) = \frac{D}{2\pi} \frac{\Omega^2 + \Delta_0^2 I_0^{-2} (2\mu)}{(\Omega^2 + \Delta_0^2) \Omega^2}.$$

При $\Omega \ll \Delta_0 I^{-1} (2\mu)$

$$S_{\varphi}(\Omega) \sim \frac{D}{2\pi} \frac{1}{I_0^2 (2\mu) \Omega^2},$$

т. е. при $\Omega \rightarrow 0$ $S_{\varphi}(\Omega)$ расходится. Нетрудно видеть, что эта расходимость тесно связана с расходимостью $\langle \varphi^2 \rangle$ при возрастании t . Вид $S_{\varphi}(\Omega)$ показан на рис. 9.14.

8. Амплитудные флуктуации. Рассмотрим теперь амплитудные флуктуации синхронизованного колебания изохронного генератора при нулевой расстройке. Для них мы имеем из первого уравнения (9.2.1)

$$\frac{da}{dt} = -p\alpha - \Delta_0 [1 - \cos \varphi] + \frac{\omega_0}{2R_0} e_{\perp}(t). \quad (9.2.51)$$

Поскольку φ , определяемое уравнением (9.2.2), зависит от $e_{\parallel}(t)$ статистически независимого от $e_{\perp}(t)$, то в рассматриваемом уравнении φ и α статистически независимы, причем φ также не зависит от $e_{\perp}(t)$. Это и также линейность уравнения (9.2.51) дают основание искать его решение в виде

$$\alpha(t) = \alpha_c(t) + \alpha_{\varphi}(t),$$

где α_c и α_{φ} — статистически независимые флуктуации, определяются уравнениями

$$\frac{d\alpha_c}{dt} = -p\alpha_c + \frac{\omega_0}{2R_0} e_{\perp}(t), \quad \frac{d\alpha_{\varphi}}{dt} = -p\alpha_{\varphi} - \Delta_0 [1 - \cos \varphi]. \quad (9.2.52)$$

Первое уравнение совпадает с уравнением амплитудных флуктуаций свободного автогенератора, и его решение и свойства $\alpha_c(t)$ нам, следовательно, известны. Так, например, спектральная плотность $S_{\alpha_c}(\Omega)$ и функция корреляции $\Phi_{\alpha_c}(\tau)$ даются выражениями (5.4.2).

Отвлекаясь от переходных процессов, рассмотрим вынужденное решение уравнения (9.2.52). Поскольку $p \gg \Delta_0$, то время корреляции φ , а следовательно, и α_{φ} много больше времени

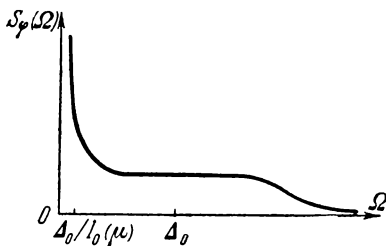


Рис. 9.14.

корреляции α_c , равного p^{-1} . Тогда, как нетрудно показать,

$$\left\langle \left(\frac{d\alpha_\Phi}{dt} \right)^2 \right\rangle \ll \langle (p\alpha_\Phi)^2 \rangle,$$

и уравнение для α_Φ принимает вид

$$\alpha_\Phi = -\frac{\Delta_0}{p} [1 - \cos \varphi]. \quad (9.2.53)$$

Легко видеть, что α_Φ принимает значения от нуля до $2\Delta_0/p$ и, следовательно (в силу $\langle \varphi \rangle = 0$), среднее значение α_Φ не равно нулю. Нетрудно найти (см. (9.2.41) и (9.2.44)), что

$$\langle \alpha_\Phi \rangle = -\frac{\Delta_0}{p} \left[1 - \frac{I_1(2\mu)}{I_0(2\mu)} \right].$$

При малых шумах ($\mu \gg 1$), используя следующее асимптотическое разложение $I_n(x)$ для $x \gg 1$:

$$I_n(x) = \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}} \left[1 - \frac{1}{8x} (2n-1)(2n+1) \right], \quad (9.2.54)$$

получим

$$\langle \alpha_\Phi \rangle = -\frac{\Delta_0}{p} \frac{1}{4\mu} = -\frac{D}{4p}$$

— чрезвычайно малую величину. Практически можно считать $\langle \alpha_\Phi \rangle = 0$ и, следовательно, $\langle \alpha \rangle = 0$ (так как $\langle \alpha_c \rangle = 0$), что и должно быть в пределе при малых шумах. При малой амплитуде синхронизации ($\mu \ll 1$)

$$\langle \alpha_\Phi \rangle = -\frac{\Delta_0}{p} = -\alpha_0.$$

Наиболее интересной характеристикой является $S_{\alpha_\Phi}(\Omega)$. Для ее оценки найдем сначала $\langle \alpha_\Phi^2 \rangle$:

$$\langle \alpha_\Phi^2 \rangle = \frac{\Delta_0^2}{p^2} [1 - 2\langle \cos \varphi \rangle + \langle \cos^2 \varphi \rangle] = \frac{\Delta_0^2}{2p^2} \left[3 - 4 \frac{I_1(2\mu)}{I_0(2\mu)} + \frac{I_2(2\mu)}{I_0(2\mu)} \right].$$

Выражая $I_2(2\mu)$ через $I_0(2\mu)$ и $I_1(2\mu)$ известным образом, найдем

$$\langle \alpha_\Phi^2 \rangle = \frac{2\Delta_0^2}{p^2} \left[1 - \left(1 + \frac{1}{2\mu} \right) \frac{I_1(2\mu)}{I_0(2\mu)} \right].$$

При $\mu \ll 1$

$$\langle \alpha_\Phi^2 \rangle = \frac{3}{2} \frac{\Delta_0^2}{p^2}.$$

При $\mu \gg 1$

$$\langle \alpha_\Phi^2 \rangle = \frac{\Delta_0^2}{8p^2\mu^2} \approx \frac{D^2}{8p^2}.$$

Для оценки удельного вклада в α флуктуаций α_ϕ по сравнению с α_c составим отношение

$$\frac{\langle \alpha_\phi^2 \rangle}{\langle \alpha_c^2 \rangle} = \frac{4\Delta_0\mu}{p} \left[1 - \left(1 + \frac{1}{4\mu} \right) \frac{I_1(2\mu)}{I_0(2\mu)} \right],$$

которое, как нетрудно видеть, много меньше единицы при $\mu \ll 1$ и равно $D/4p$ при $\mu \gg 1$. Поскольку при $\mu \gg 1$ $D \ll \Delta_0$, а $\Delta_0 \ll p$, то это отношение много меньше единицы при любом μ . Учитывая медленность α_ϕ по сравнению с $\alpha_c(t)$, ибо ширина спектра флуктуации $\alpha_\phi(t)$ равна примерно Δ_0 , учитывая также, что из-за статистической независимости α_ϕ и α_c

$$S_\alpha(\Omega) = S_{\alpha_\phi}(\Omega) + S_{\alpha_c}(\Omega),$$

общую картину $S_\alpha(\Omega)$ можно изобразить рис. 9.15. Малость $\langle \alpha_\phi^2 \rangle / \langle \alpha_c^2 \rangle$ означает только малость $\int_0^\infty S_{\alpha_\phi}(\Omega) d\Omega$ по сравнению с $\int_0^\infty S_{\alpha_c}(\Omega) d\Omega$. Отношение же спектральных плотностей $S_{\alpha_\phi}(\Omega)$ и $S_{\alpha_c}(\Omega)$ особенно вблизи $\Omega=0$ не обязательно мало.

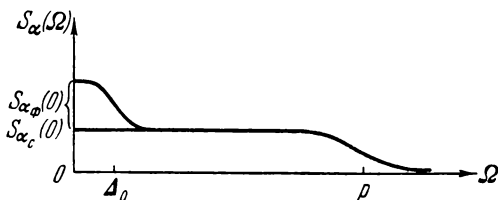


Рис. 9.15.

Оценим величину $S_{\alpha_\phi}(0)$. Поскольку $\langle \alpha_\phi^2 \rangle$ конечно, то можно предположить, что конечно также значение спектральной плотности $S_{\alpha_\phi}(0)$. В этом случае по порядку величины

$$S_{\alpha_\phi}(0) = \frac{\langle \alpha_\phi^2 \rangle}{\Delta_0} = \frac{2\Delta_0}{p^2} \left[1 - \left(1 + \frac{1}{4\mu} \right) \frac{I_1(2\mu)}{I_0(2\mu)} \right].$$

Тогда

$$\frac{S_{\alpha_\phi}(0)}{S_{\alpha_c}(0)} = 4\pi\mu \left[1 - \left(1 + \frac{1}{4\mu} \right) \frac{I_1(2\mu)}{I_0(2\mu)} \right];$$

эта величина равна $4\pi\mu$ при $\mu \ll 1$ и $\pi/4\mu$ при $\mu \gg 1$, т. е. в предельных случаях достаточно мала. Однако, например, для $\mu = 1/2$ $S_{\alpha_\phi}(0)/S_{\alpha_c}(0) = 2,14$.

Таким образом, несмотря на малость энергии амплитудных флуктуаций $\alpha_\Phi(t)$ по сравнению с $\alpha_c(t)$ спектральную плотность первых необходимо учитывать, особенно при $|\Omega| \leq \Delta_0$.

Наконец, отметим, что распределение вероятностей для $\alpha(t)$ из-за независимости $\alpha_c(t)$ и $\alpha_\Phi(t)$ равно свертке распределения α_c (являющегося нормальным) с распределением α_Φ , которое можно найти из (9.2.53).

§ 9.3. Спектр синхронизованного генератора.

Нулевая расстройка

Изучим теперь подробнее спектр колебания генератора, обладающего естественными шумами и синхронизованного монохроматическим сигналом. Для простоты рассмотрения мы не будем учитывать амплитудных флуктуаций, анализируя компоненты спектра, обязанные флуктуациям фазы (частоты).

В предыдущем параграфе мы доказали, что при любом μ в составе спектра колебания имеется монохроматическая линия. Следовательно, спектр синхронизованного генератора при нулевой расстройке имеет вид

$$W_x(\Omega) = \frac{R_0^2}{2} [W_0 \delta(\Omega) + W_{\text{пъед}}(\Omega)]. \quad (9.3.1)$$

Здесь W_0 — неизвестный коэффициент, зависящий в общем случае от μ , $W_{\text{пъед}}(\Omega)$ — форма пьедестала, обязанная флуктуациям фазы (частоты) и также зависящая от μ . Фурье-сопряженная этого спектра имеет вид

$$A^0(\tau) = \frac{R_0^2}{2} [W_0 + A_{\text{пъед}}(\tau)].$$

1. Займемся прежде всего отысканием $W_0 = W_0(\mu)$. Поскольку $\lim_{\tau \rightarrow \infty} A_{\text{пъед}}(\tau) = 0$, то

$$W_0 = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{2}{R_0^2} A^0(\tau).$$

Согласно § 4.3

$$A^0(\tau) = \frac{R_0^2}{2} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \langle \cos \Delta\varphi \rangle dt.$$

Статистическое усреднение идет с помощью вероятности переходов $W(\varphi_0, \tau, \varphi)$. Полагая $\varphi_0 = 0$, мы фактически имеем $W(0, \tau, \varphi) = W(0, \tau, \Delta\varphi)$, ибо $\Delta\varphi = \varphi(t+\tau) - \varphi(t)$, а в силу того,

что процесс $\varphi(t)$ является марковским, вероятность переходов не зависит от t . Следовательно,

$$A^0(\tau) = \frac{R_0^2}{2} \langle \cos \Delta\varphi \rangle = \frac{R_0^2}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos \varphi W(0, \tau, \varphi) d\varphi.$$

Принимая во внимание (9.2.11), нетрудно найти

$$A^0(\tau) = \frac{R_0^2}{2} W_\tau(1, \tau). \quad (9.3.2)$$

Следовательно,

$$W_0 = \lim_{\tau \rightarrow \infty} W_\tau(1, \tau) = W_\tau(1, \infty).$$

Для $W_\tau(x, \tau)$ — характеристической функции вероятности переходов — мы имеем дифференциально-разностное уравнение (9.2.8). Будем интересоваться функцией $W_\tau(x, \tau)$ при достаточно больших значениях τ . Обозначим

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} W_\tau(x, \tau) = a_x(\mu).$$

Тогда из (9.2.8) для $a_x(\mu)$ нетрудно получить следующее разностное уравнение:

$$\mu[a_{x-1}(\mu) - a_{x+1}(\mu)] = x a_x(\mu). \quad (9.3.3)$$

Поскольку $W_\tau(x, \tau)$ есть фурье-сопряженная по φ распределения фазы $W(0, \tau, \varphi)$ и поскольку при $\tau \rightarrow \infty$ $W(0, \tau, \varphi)$ стремится к некоторой периодической функции (вследствие диффузии фазы в периодическом потенциальном поле) с периодом 2π , то можно показать, что $a_x(\mu)$ есть четная по x «гребенчатая» функция, отличная от нуля только в точках $x = \pm N$, где N — натуральный ряд чисел. Кроме этого, из условия нормировки для $W(0, \tau, \varphi)$ следует, что $a_0(\mu) = 1$ при любом μ . Тем самым уравнение (9.3.3) принимает вид

$$\mu[a_{N-1}(\mu) - a_{N+1}(\mu)] = N a_N(\mu). \quad (9.3.4)$$

Придавая значения $N = 1, 2, 3, \dots$, получим следующую бесконечную систему уравнений для $a_N(\mu)$:

$$\begin{aligned} 1a_1 + \mu a_2 + 0 + 0 + \dots &= \mu, \\ -\mu a_1 + 2a_2 + \mu a_3 + 0 + \dots &= 0, \\ 0 - \mu a_2 + 3a_3 + \mu a_4 + \dots &= 0, \\ 0 + 0 - \mu a_3 + 4a_4 + \dots &= 0, \\ \dots &\dots \end{aligned} \quad (9.3.5)$$

Нам нужно найти $a_1(\mu)$, так как

$$W_0 = \lim_{\tau \rightarrow \infty} W_\tau(1, \tau) = a_1(\mu).$$

Решая систему линейных уравнений (9.3.5), можно найти, что

$$a_1(\mu) = \mu \frac{Q_2}{Q_1}, \quad (9.3.6)$$

где

$$Q_1 = \begin{vmatrix} 1 & \mu & 0 & 0 & 0 & \dots \\ -\mu & 2 & \mu & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -\mu & 3 & \mu & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -\mu & 4 & \mu & \dots \\ 0 & 0 & 0 & -\mu & 5 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}, \quad (9.3.7)$$

а Q_2 получено из Q_1 вычеркиванием первого столбца и первой строки. Аналогично, вычеркивая две первых строки и два первых столбца из Q_1 , мы получим Q_3 и т. д. Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} Q_1 &= 1Q_2 + \mu^2 Q_3, \\ Q_2 &= 2Q_3 + \mu^2 Q_4, \\ &\dots \\ Q_n &= nQ_{n+1} + \mu^2 Q_{n+2}. \end{aligned} \quad (9.3.8)$$

Таким образом, имеем

$$a_1(\mu) = \mu \frac{Q_2}{1Q_2 + \mu^2 Q_3} = \mu \frac{1}{1 + \mu^2 \frac{Q_3}{Q_2}}. \quad (9.3.9)$$

С другой стороны,

$$\frac{Q_3}{Q_2} = \frac{Q_3}{2Q_3 + \mu^2 Q_4} = \frac{1}{2 + \mu^2 \frac{Q_4}{Q_3}}.$$

И вообще

$$\frac{Q_{n+1}}{Q_n} = \frac{1}{n + \mu^2 \frac{Q_{n+2}}{Q_{n+1}}}. \quad (9.3.10)$$

Подставляя (9.3.10) многократно в (9.3.9), можно выразить $a_1(\mu)$ в виде следующей непрерывной дроби:

$$a_1(\mu) = \mu \frac{1}{1 + \mu^2 \frac{1}{2 + \mu^2 \frac{1}{3 + \mu^2 \frac{1}{4 + \dots}}}}. \quad (9.3.11)$$

Отметим, что эта непрерывная дробь есть точное выражение решения разностного уравнения (9.3.4). Функция $a_1(\mu)$, согласно (9.3.11), может быть легко табулирована. При $\mu \leq 1$ $a_1(\mu)$ удовлетворительно представляется формулой

$$a_1(\mu) = \mu \frac{6 + \mu^2}{6 + 4\mu^2}. \quad (9.3.12)$$

При $\mu \rightarrow 0$ $a_1(\mu) \rightarrow \mu$, при $\mu \rightarrow \infty$ $a_1(\mu) \rightarrow 1$. Таким образом, при любом, даже сколь угодно малом $\mu > 0$ $a_1(\mu) > 0$. Следовательно, для $\mu > 0$

$$W_0 = a_1(\mu) > 0.$$

Тем самым, при $\mu > 0$ в спектре синхронизованного генератора всегда присутствует монохроматическая линия с множителем, пропорциональным $a_1(\mu)$:

$$W_x(\Omega) = \frac{R_0^2}{2} [a_1(\mu) \delta(\Omega) + W_{\text{пье}}(\Omega)]. \quad (9.3.13)$$

График $a_1(\mu)$ показан на рис. 9.16. При возрастании μ от нуля до бесконечности (при возрастании сигнала синхронизации от нуля до достаточно большой величины) удельный вес (по мощности) монохроматической линии в спектре генератора возрастает от нуля до единицы.



Рис. 9.16.

2. Обратимся к пьедесталу. В случае произвольного μ отыскание $W_{\text{пье}}(\Omega)$ является довольно сложным делом, однако в предельных случаях

$\mu \ll 1$, $\mu \gg 1$ спектр пьедестала находится легко.

В случае слабой синхронизации ($\mu \ll 1$) мы можем воспользоваться приближенной формулой (9.2.21) для $W_\tau(x, \tau)$. Полагая $x = 1$, имеем

$$W_\tau(1, \tau) = e^{-\frac{D}{2}\tau} + \mu \left[1 - e^{-\frac{D}{2}\tau} \right] + \frac{1}{3} \mu \left[e^{-2D\tau} - e^{-\frac{D}{2}\tau} \right].$$

Вычитая отсюда

$$W_0 = \lim_{\tau \rightarrow \infty} W_\tau(1, \tau) = \mu,$$

получаем

$$A_{\text{пье}}(\tau) = e^{-\frac{D}{2}\tau} \left(1 - \frac{4}{3} \mu \right) + \frac{1}{3} \mu e^{-2D\tau}.$$

Тем самым при $\mu \ll 1$

$$W_{\text{пъед}}(\Omega) = \frac{1}{\pi} \frac{\frac{D}{2} \left(1 - \frac{4}{3}\mu\right)}{\Omega^2 + \left(\frac{D}{2}\right)^2} + \frac{\mu}{3} \frac{1}{\pi} \frac{2D}{\Omega^2 + 4D^2}. \quad (9.3.14)$$

Форма пьедестала в этом случае чрезвычайно близка к форме спектральной линии свободного автогенератора. Общая мощность $W_{\text{пъед}}(\Omega)$ равна

$$A_{\text{пъед}}(0) = 1 - \frac{4}{3}\mu + \frac{1}{3}\mu = 1 - \mu.$$

При этом мощность монохроматической линии (без учета $R_0^2/2$) равна $a_1(\mu) = \mu$.

Таким образом, при слабой синхронизации (большие шумы), когда $\mu \ll 1$, спектр колебания состоит, согласно (9.3.13), из слабой монохроматической линии мощностью $\frac{R_0^2}{2}\mu$ и пьедестала, близкого по форме к спектральной линии свободного автогенератора. Мощность пьедестала равна $\frac{R_0^2}{2}(1 - \mu)$. Общая мощность спектра колебания, обладающего флуктуациями фазы (частоты) не зависит от характеристик фазовых флуктуаций (в нашем случае от μ) и всегда равна $R_0^2/2$. Это общее условие, как видно, выполняется и в нашем случае.

Отметим, что при $\mu = \Delta\omega/D \ll 1$ ширина пьедестала равна $\pi D/2 = \Delta\Omega_{\text{своб}}$ — ширине спектральной линии свободного автогенератора.

В другом предельном случае, случае сильной синхронизации, когда $\mu \gg 1$, мы, согласно § 9.2, имеем

$$A^0(\tau) = \frac{R_0^2}{2}, \quad W_x(\Omega) = \frac{R_0^2}{2} \delta(\Omega).$$

При этом мы получаем полное согласие с (9.3.13), где для $\mu \gg 1$ $a_1(\mu) = 1$. Однако анализ, проведенный в § 9.2, использовал вероятность переходов (9.2.25), полученную для крупномасштабного (медленного) времени. При этом выпадение $W_{\text{пъед}}(\Omega)$ обязано как раз отбрасыванию процессов быстрого установления «стационарного» распределения фазы в каждом минимуме потенциальной функции. Для более подробного выяснения вида функции $W_{\text{пъед}}(\Omega)$ при $\mu \gg 1$ следует обратиться к § 9.1, где мы рассматривали линейное приближение по φ , справедливое, согласно (9.1.18), в центре зоны синхронизации при

$$\langle \varphi^2 \rangle = \frac{D}{2\Delta_0} = \frac{1}{2\mu} \ll 1.$$

При этом необходимо отметить следующее. В линейном приближении $\langle \varphi^2 \rangle$ мало и не зависит от t . При более строгом рассмотрении в § 9.2 фактически того же случая $\mu \gg 1$ мы получили (см. (9.2.43))

$$\langle \varphi^2 \rangle = 4\pi \frac{\Delta_0}{D} e^{-4 \frac{\Delta_0}{D}} Dt = 4\pi \mu e^{-4\mu} Dt.$$

Здесь уже средний квадрат флуктуаций фазы *растет со временем* при любом сколь угодно большом μ . Линейное приближение этот эффект утрачивает. Однако при больших μ коэффициент диффузии фазы (скорость роста $\langle \varphi^2 \rangle$) становится настолько малой, что при всех обозримых длительностях эксперимента $\langle \varphi^2 \rangle$ все еще много меньше единицы и при этом с достаточной степенью точности можно пользоваться линейным приближением.

Таким образом, строго говоря, флуктуации фазы являются процессом нестационарным. Линейное приближение считает их стационарными. При не очень больших длительностях эксперимента разница между строгим и линейным рассмотрением незначительна. Другими словами, линейным приближением можно пользоваться для таких длительностей процесса синхронизации t (при $t=0$ у нас имеется привязка фазы — $\varphi(0)=0$), которые удовлетворяют неравенству

$$4\pi \mu e^{-4\mu} Dt \ll 1,$$

например, для всех

$$0 \leq t \leq \frac{1}{D} \frac{e^{4\mu}}{40\pi\mu}. \quad (9.3.15)$$

Пусть условие (9.3.15) при $\mu \gg 1$ выполнено. Тогда спектр колебания, обладающего фазовыми флуктуациями при $\langle \varphi^2 \rangle \ll 1$, находится согласно (4.3.10):

$$W_x(\Omega) = \frac{R_0^2}{2} [(1 - \langle \varphi^2 \rangle) \delta(\Omega) + S_\varphi(\Omega)],$$

где член с $\langle \varphi^2 \rangle$ мы сохраним. Поскольку $\langle \varphi^2 \rangle = 1/2\mu$, то

$$W_x(\Omega) = \frac{R_0^2}{2} \left[\left(1 - \frac{1}{2\mu} \right) \delta(\Omega) + S_\varphi(\Omega) \right]. \quad (9.3.16)$$

Во-первых, можно показать, что при $\mu \gg 1$ $a_1(\mu) = 1 - \frac{1}{2\mu}$ и тем самым (9.3.16), как и должно быть, совпадает с (9.3.13). Во-вторых, мощность $\langle \varphi^2 \rangle = 1/2\mu$. Тем самым, как и должно быть, полная мощность колебания с фазовыми флуктуациями равна $R_0^2/2$, независимо от значения μ .

Поскольку для $S_{\varphi}(\Omega)$ мы имеем формулу (полагая $\Delta=0$) (9.1.17), то при $\mu \gg 1$

$$W_{\text{пед}}(\Omega) = \frac{D}{2\pi(\Omega^2 + \Delta_0^2)}.$$

Ширина этого пьедестала равна $\pi\Delta_0 \gg \pi D/2$, а высота $\frac{D}{2\pi\Delta_0^2} = \frac{1}{2\pi D} \frac{D^2}{\Delta_0^2} \ll \frac{2}{\pi D}$ много меньше высоты пьедестала при $\mu \ll 1$.

Таким образом, при больших сигналах синхронизации мы имеем сильную монохроматическую линию мощностью $\frac{R_0^2}{2} \left(1 - \frac{1}{2\mu}\right)$, а также малый и широкий пьедестал мощностью $\frac{R_0^2}{2} \frac{1}{2\mu}$.

3. На основании вышеизложенного влияние синхронизации на генератор с естественными шумами можно представить следующим образом. Пусть для простоты $R_0^2/2 = 1$, тогда полная мощность спектра колебания (линии и пьедестала) постоянна и равна единице независимо от величины синхронизирующего сигнала (напомним, что мы рассматриваем малые по сравнению с R_0 амплитуды синхронизирующего сигнала, когда $\alpha_0 \ll 1$).

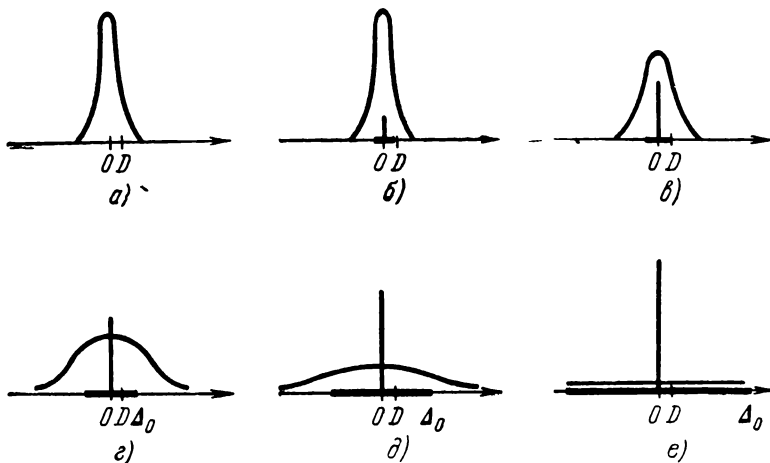


Рис. 9.17.

В отсутствие сигнала синхронизации спектр генератора состоит из размытой спектральной линии мощностью, равной единице, высотой $2/\pi D$ и шириной $\pi D/2$ (рис. 9.17, а). $W_x(\Omega) = \frac{1}{\pi} \frac{D/2}{\Omega^2 + (D/2)^2}$.

Если теперь появился малый сигнал синхронизации такой, что $\mu \ll 1$, то возникла слабая монохроматическая линия мощностью μ , а шумовой спектр — бывшая спектральная линия — несколько уширился, высота его уменьшилась и стала равной $\frac{2}{\pi D} \left[1 - \frac{15}{12} \mu \right]$. Мощность его стала равной $1 - \mu$. Точное его выражение дано формулой (9.3.14). На рис. 9.17, б изображен этот случай, где монохроматическая линия представлена отрезком, пропорциональным μ .

При дальнейшем увеличении амплитуды сигнала синхронизации (увеличении μ) мощность монохроматической линии растет как $a_1(\mu)$, пьедестал расширяется, высота его падает, а его мощность падает как $1 - a_1(\mu)$ (рис. 9.17, в).

При $\mu = 1$ мощность монохроматической линии равна $a_1(1) = 0,7$, мощность пьедестала $1 - a_1(1) = 0,3$, ширина пьедестала равна примерно $2\Delta_0 = 2D$ (рис. 9.17, г).

При $\mu > 1$ пьедестал становится еще более низким и широким, его ширина приближается к $\pi\Delta_0$ (рис. 9.17, д).

Наконец, при $\mu \gg 1$ монохроматическая линия имеет мощность, равную $1 - 1/2\mu$, пьедестал имеет высоту $D/2\pi\Delta_0^2 \ll 2/\pi D$, ширину $\pi\Delta_0$ и мощность $1/2\mu$ (рис. 9.17, е).

На рис. 9.16 отмечено взаимоотношение мощностей монохроматической линии и пьедестала в зависимости от значения μ .

Такова эволюция спектра генератора, обладающего естественными шумами, при синхронизации его возрастающим по амплитуде сигналом.

Как мы уже отмечали, найти точную форму пьедестала при произвольном μ довольно сложно. Однако приближенно оценить его ширину и высоту можно. Поскольку при $\Delta_0 \ll D$ ширина равна $\pi D/2$, а при $\Delta_0 \gg D$ ширина равна $\pi\Delta_0$, то можно предположить, что ширина пьедестала при произвольном μ равна примерно

$$\Delta\Omega_{\text{пед}} \approx \pi \left(\Delta_0 + \frac{D}{2} \right) \approx \pi \frac{D}{2} (1 + 2\mu) = \pi\Delta_0 \left(1 + \frac{1}{2\mu} \right).$$

Поскольку мощность пьедестала равна $1 - a_1(\mu)$, то его высоту можно принять приближенно равной

$$W_{\text{пед}}(0) = \frac{1 - a_1(\mu)}{\pi \left(\Delta_0 + \frac{D}{2} \right)} = \frac{2(1 - a_1(\mu))}{\pi D(1 + 2\mu)} = \frac{1 - a_1(\mu)}{\pi\Delta_0 \left(1 + \frac{1}{2\mu} \right)}.$$

Эти формулы точны, разумеется, лишь в предельных случаях $\mu \ll 1$, $\mu \gg 1$.

4. Какова физика процесса синхронизации генератора с шумами, позволяющая наглядно понять картину эволюции спектра, показанную на рис. 9.17? Если вспомнить, что $D = 2\Delta\Omega_{\text{своб}}/\pi$, где $\Delta\Omega_{\text{своб}}$ — ширина спектральной линии свободного генератора, то картина изменения спектра на рис. 9.17 может

быть наглядно объяснена следующим образом. При $0 < \mu \approx \frac{\pi}{2} \frac{\Delta_0}{\Delta\Omega_{\text{своб}}} \ll 1$ полоса синхронизации генератора много меньше ширины его спектра, равной примерно $\Delta\Omega_{\text{своб}}$ (рис. 9.18, а). Поэтому в полосу синхронизации попадает лишь небольшое число спектральных компонент колебания генератора, которые и синхронизируются. Мощность монохроматической линии, образовавшейся из синхронизованных спектральных компонент, равна примерно площади заштрихованного прямоугольника и составляет $\frac{2}{\pi D} 2\Delta_0 = \frac{4}{\pi} \mu$, т. е. примерно то, что и следует из строгого рассмотрения. Спектральные компоненты $W_x(\Omega)$, находящиеся вне полосы синхронизации, естественно, не синхронизируются и составляют пьедестал около монохроматической линии. При $\Delta_0 \ll \Delta\Omega_{\text{своб}}$ этот пьедестал почти точно равен, как мы и имели, форме спектральной линии свободного генератора.

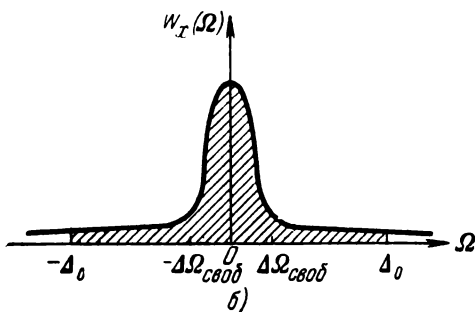
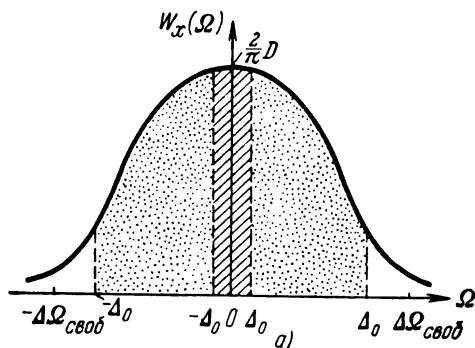


Рис. 9.18.

При увеличении Δ_0 (увеличении μ) в область синхронизации попадает все больше и больше спектральных компонент: мощность синхронизованного спектра (монохроматической линии) растет, а мощность несинхронизованного спектра (пьедестала) падает. При $\Delta_0 = \frac{2}{\pi} \Delta\Omega_{\text{своб}}$ ($\mu = 1$) в область синхронизации попадает уже большая часть спектральных компонент (на рис. 9.18, а эта область покрыта точками) мощность синхронизованного спектра, как мы видели, равна 0,7, а ширина пьедестала становится несколько большей $\Delta\Omega_{\text{своб}}$. Наконец, при $\Delta_0 \gg \Delta\Omega_{\text{своб}}$, $\mu \gg 1$ в область синхронизации попадает почти весь спектр свободного генератора (рис. 9.18, б), мощность синхронизованного спектра, превращенного в монохроматическую линию,

растет, а мощность несинхронизованного спектра (пьедестала) падает. При $\Delta_0 = \frac{2}{\pi} \Delta\Omega_{\text{своб}}$ ($\mu = 1$) в область синхронизации попадает уже большая часть спектральных компонент (на рис. 9.18, а эта область покрыта точками) мощность синхронизованного спектра, как мы видели, равна 0,7, а ширина пьедестала становится несколько большей $\Delta\Omega_{\text{своб}}$. Наконец, при $\Delta_0 \gg \Delta\Omega_{\text{своб}}$, $\mu \gg 1$ в область синхронизации попадает почти весь спектр свободного генератора (рис. 9.18, б), мощность синхронизованного спектра, превращенного в монохроматическую линию,

становится близкой к единице, а пьедестал имеет малую мощность и его ширина примерно равна $\pi\Delta_0$.

При учете амплитудных флуктуаций картины спектра усложнятся. Появятся дополнительные спектры амплитудных флуктуаций и свертки амплитудных спектров с фазовыми.

§ 9.4. Влияние естественных шумов на синхронизацию генератора. Ненулевая расстройка

В двух предыдущих параграфах мы рассмотрели флуктуации фазы в синхронизованном генераторе для случая, когда расстройка $\Delta=0$. Пусть теперь $\Delta \neq 0$. Генератор для простоты считаем по-прежнему изохронным.

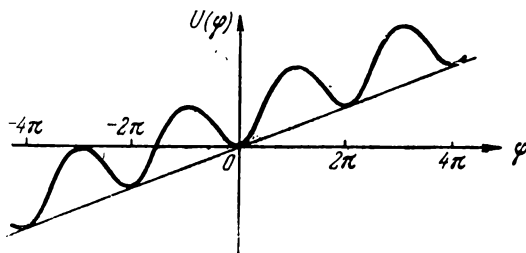


Рис. 9.19.

1. Рассмотрим подробно только фазовые флуктуации синхронизованного колебания, которые на основании (9.1.14) описываются уравнением

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\Delta [1 - \cos \varphi] - d_0 \sin \varphi - \frac{\omega_0}{2R_0} e_{\parallel}(t), \quad (9.4.1)$$

где $0 < d_0 = p\alpha_0 \leq \Delta_0$. Из-за дельта-коррелированности $e_{\parallel}(t)$ для $W(0, \tau, \varphi)$ может быть написано следующее уравнение Эйнштейна — Фоккера — Планка:

$$\frac{\partial W}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \varphi} \{ [\Delta [1 - \cos \varphi] + d_0 \sin \varphi] W \} + \frac{D}{2} \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2}. \quad (9.4.2)$$

Потенциальной функцией, соответствующей данному уравнению, служит функция

$$U(\varphi) = d_0 - d_0 \cos \varphi + \Delta(\varphi - \sin \varphi),$$

изображенная на рис. 9.19. Таким образом, диффузия фазы, заданной уравнением (9.4.1), эквивалентна диффузии броуновских частиц (фазовых точек) в потенциальном поле $U(\varphi)$. Из-за явной несимметрии $U(\varphi)$ распределение $W(0, \tau, \varphi)$ также будет

несимметричным и при этом будет существовать поток вероятности в сторону наклона потенциальной функции. Из-за $\Delta \neq 0$ и несимметричности распределения среднее значение силы

$$\Delta + d_0 \sin \varphi - \Delta \cos \varphi,$$

действующей на фазу, не будет равно нулю. Это приводит к

$$\langle v \rangle = \left\langle \frac{d\varphi}{dt} \right\rangle = \langle -\Delta - d_0 \sin \varphi + \Delta \cos \varphi \rangle \neq 0,$$

т. е. приводит к смещению средней частоты синхронизованного колебания на $\langle v \rangle$.

Найдем $\langle v \rangle$. Вследствие переходных процессов $\langle v \rangle$, вообще говоря, будет зависеть от τ . Наиболее интересным для нас значением является установившееся значение $\langle v \rangle$, имеющее место при больших τ . Рассмотрим $W(0, \tau, \varphi)$ для достаточно больших τ , когда τ можно заменить крупномасштабным временем t . В этом случае, как и раньше, плотность вероятности

$$W(0, t, \varphi) = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} A_s(t) W(\varphi - 2\pi s).$$

Здесь уже, однако, в отличие § 9.2, функция распределения $W(\varphi)$ несимметрична и изменение $A_s(t)$ со временем носит другой характер. Вследствие существования потока вероятности в сторону убывания $U(\varphi)$ максимальное значение среди $A_s(t)$ будет смещаться с ростом t в сторону отрицательных значений s . Так, если при $t=0$ $A_1(0)=1$, а другие $A_s(0)=0$, то при достаточно большом t максимальным будет какое-либо $A_{-k}(t)$, где с ростом t k возрастает.

Таким образом, плотность вероятности $W(0, t, \varphi)$ с ростом t , во-первых, расплывается и, во-вторых, ее центр тяжести движется в сторону убывания $U(\varphi)$ со скоростью, равной $\langle v \rangle$. Последнее следует из того, что $\langle \dot{\varphi} \rangle = \langle v \rangle t$. Среднее значение флуктуаций частоты равно

$$\begin{aligned} \langle v \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} (-\Delta - d_0 \sin \varphi + \Delta \cos \varphi) W(0, t, \varphi) d\varphi = \\ &= \sum_{s=-\infty}^{+\infty} A_s(t) \int_{2\pi s - \pi}^{2\pi s + \pi} (-\Delta - d_0 \sin \varphi + \Delta \cos \varphi) W(\varphi - 2\pi s) d\varphi = \\ &= \int_{-\pi}^{+\pi} (-\Delta - d_0 \sin \varphi + \Delta \cos \varphi) W(\varphi) d\varphi. \end{aligned} \quad (9.4.3)$$

Отсюда видно, что усреднение v по интервалу $[-\infty, +\infty]$ совпадает для достаточно больших τ с усреднением по интервалу

$(-\pi, +\pi)$. Легко видеть, что это совпадение усреднений будет иметь место только для периодических (с периодом 2π) усредняемых функций. Совпадения не будет, например, для $\langle \varphi^2 \rangle$, которое нужно вычислять так, как это мы делали в § 9.2.

Распределение $W(\varphi)$ есть по существу стационарное распределение, рассмотренное в промежутке $[-\pi, +\pi]$ и для него справедливо уравнение (9.4.2), где левая часть равна нулю, т. е.

$$\frac{\partial G_2(\varphi)}{\partial \varphi} = 0, \quad G_2(\varphi) = -[\Delta(1 - \cos \varphi) + d_0 \sin \varphi] W(\varphi) - \frac{D}{2} \frac{dW(\varphi)}{d\varphi}. \quad (9.4.4)$$

Обозначая постоянный поток $G_2(\varphi) = G_2$, найдем, что подынтегральное выражение в (9.4.3) равно

$$G_2 + \frac{D}{2} \frac{dW(\varphi)}{d\varphi}.$$

Следовательно (учитывая, что $W(\pi) = W(-\pi)$),

$$\langle v \rangle = 2\pi G_2. \quad (9.4.5)$$

Найдем G_2 . Обозначив

$$V(\varphi) = \frac{2}{D} U(\varphi),$$

запишем (9.4.4) в виде

$$\frac{dV}{d\varphi} W + \frac{dW}{d\varphi} = -\frac{2}{D} G_2.$$

Общее решение этого уравнения, удовлетворяющее условию $W(\pi) = W(-\pi)$, равно (при условии, что $V(\varphi + 2\pi) - V(\varphi) = l = \text{const}$)

$$W(\varphi) = -\frac{\frac{2}{D} G_2}{e^l - 1} e^{-V(\varphi)} \int_{\varphi}^{\varphi + 2\pi} e^{V(x)} dx.$$

Величину G_2 отсюда легко найти, используя условие нормировки

$$\int_{-\pi}^{+\pi} W(\varphi) d\varphi = 1.$$

Обозначая

$$Z = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-V(\varphi)} d\varphi \int_{\varphi}^{\varphi + 2\pi} e^{V(x)} dx = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{V(x+y-\pi) - V(y-\pi)} dx dy, \quad (9.4.6)$$

получим

$$G_2 = -\frac{D}{2} \frac{e^l - 1}{Z}. \quad (9.4.7)$$

Вводя обозначения $\mu = \Delta_0/D$, $\lambda = \Delta/\Delta_0$, где μ , как и ранее, есть отношение мощности синхронизирующего сигнала к мощности шума, а λ — относительная расстройка, для потенциальной функции $V(\varphi)$, имеем

$$V(\varphi) = 2\mu - 2\mu \cos \varphi + 2\mu\lambda(\varphi - \sin \varphi).$$

Отсюда, как легко видеть,

$$l = V(\varphi + 2\pi) - V(\varphi) = 4\pi\mu\lambda.$$

$$V(x + y - \pi) - V(y - \pi) = 2\mu\lambda x + 4\mu \sin \frac{x}{2} \left[\lambda \cos \left(\frac{x}{2} + y \right) - \sin \left(\frac{x}{2} + y \right) \right].$$

Подставляя эти выражения в (9.4.6) и (9.4.7), получим

$$G_2 = -\frac{D}{2} \frac{e^{4\pi\mu\lambda} - 1}{Z}$$

и после несложных преобразований

$$Z = Z(\mu, \lambda) = 2\pi \int_0^{2\pi} e^{2\mu\lambda x} I_0 \left(4\mu \sqrt{\lambda^2 + 1} \sin \frac{x}{2} \right) dx. \quad (9.4.8)$$

Воспользовавшись формулой (18.53) работы (1961 [15]), найдем, что

$$Z(\mu, \lambda) = 4\pi^2 e^{2\pi\mu\lambda} I_{2\mu\lambda}(2\mu \sqrt{\lambda^2 + 1}) I_{-2\mu\lambda}(2\mu \sqrt{\lambda^2 + 1}),$$

где $I_{ia}(b)$ — модифицированная функция Бесселя мнимого индекса.

Таким образом, имеем окончательно с учетом (9.4.5)

$$\langle v \rangle = -\Delta_0 \frac{\text{sh } \frac{2\pi\mu\lambda}{2\pi\mu}}{2\pi\mu} |I_{2\mu\lambda}(2\mu \sqrt{\lambda^2 + 1})|^{-2}. \quad (9.4.9)$$

2. Проанализируем и обсудим полученный результат.

Пусть $\Delta > 0$ ($\omega_c > \omega_0$); тогда $\lambda > 0$ и $\langle v \rangle < 0$. Это значит, что средняя частота синхронизованного колебания равна

$$\omega_c + \langle v \rangle$$

и смещена от ω_c в сторону ω_0 . Если $\Delta < 0$ ($\omega_c < \omega_0$), то $\lambda < 0$ и $\langle v \rangle > 0$. Средняя частота колебания опять смещена в сторону ω_0 . Найдем предельные значения для $\langle v \rangle$, зависящей от μ и λ . В предельном случае слабой синхронизации $0 < \mu \ll 1$. Тогда функция Z на основании (9.4.8) равна $4\pi^2$, а сдвиг частоты равен $\langle v \rangle = -\Delta$. Отсюда средняя частота синхронизованного колебания равна

$$\omega_c + \langle v \rangle = \omega_c - \Delta = \omega_0$$

— частоте автоколебаний генератора. Итак, в случае больших

шумов синхронизирующий сигнал мало влияет на автогенератор и на его спектр.

Пусть теперь имеет место сильная синхронизация ($\mu \gg 1$ — шумы автогенератора достаточно малы). В этом случае можно

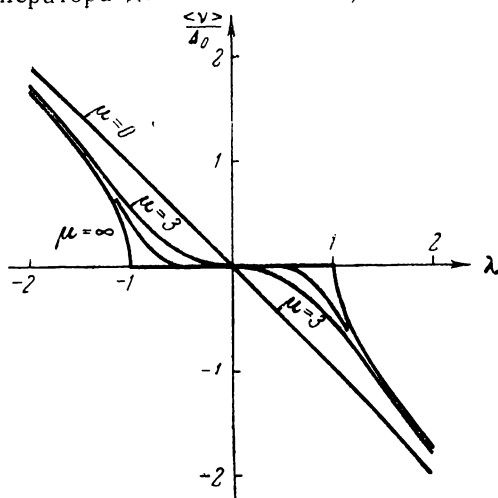


Рис. 9.20.

показать, что $\langle \nu \rangle = 0$ и частота синхронизованного колебания равна ω_c — частоте синхронизирующего сигнала.

Средняя частота синхронизованного генератора $\omega_c + \langle \nu \rangle$ всегда лежит между собственной частотой свободного генератора ω_0 и частотой синхронизирующего сигнала ω_c .

На практике обычно изменяется расстройка Δ и амплитуда синхронизирующего сигнала E_0 , в то время как мощность шумов автогенератора является постоянной. Поэтому представляется интересным проследить зависимость средней частоты генератора от расстройки (при постоянной E_0) и зависимость средней частоты генератора $\langle \omega \rangle$ от E_0 при постоянной расстройке. В первом случае постоянно D и E_0 (т. е. Δ_0), следовательно, постоянно μ и изменяется λ . График зависимости $\langle \nu \rangle$ от λ показан на рис. 9.20. График зависимости $\langle \nu \rangle$ от μ показан на рис. 9.21. Более подробное исследование зависимостей $\langle \nu \rangle$ от Δ при разных λ см. в работе (1961 [15]).

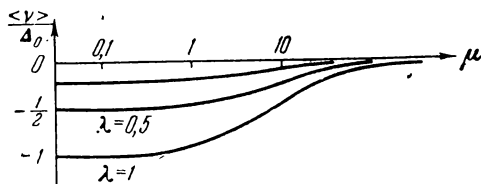


Рис. 9.21.

3. Каков спектр генератора с шумами при наличии синхронизирующего сигнала и расстройки? Наличие $\langle v \rangle \neq 0$ означает, что средняя частота синхронизованных автоколебаний смещается от ω_c и, следовательно, спектр $W_x(\Omega)$ сосредоточивается около частоты $\omega_c + \langle v \rangle$. Покажем, что этот спектр содержит монохроматическую линию на частоте $\Omega = \langle v \rangle$.

Рассматривая фазу колебания φ , можно ее записать в виде $\varphi = \langle v \rangle t + \psi$, где ψ — флуктуации фазы. Распределение вероятностей для флуктуаций фазы ψ не будет уже перемещаться. Его центр тяжести всегда будет лежать в точке $\psi = 0$, ибо $\langle \psi \rangle = 0$. Это распределение с ростом t будет расплываться, аналогично тому, как расплывалось распределение $W(0, \tau, \varphi)$ для φ при $\Delta = 0$. При достаточно больших t $\langle v \rangle^2 t^2$ будет много больше $\langle \psi^2 \rangle$, поэтому при больших t основной компонентой в φ будет $\langle v \rangle t$.

Для отыскания формы спектра синхронизованного колебания необходимо найти $\langle \cos \Delta \varphi \rangle$ и $\langle \sin \Delta \varphi \rangle$. Для вероятности переходов $W(0, t, \varphi)$ роль $\Delta \varphi$ играет φ , а роль τ — величина t , следовательно, необходимо рассматривать $\langle \cos \varphi \rangle$ и $\langle \sin \varphi \rangle$.

На основании вышесказанного, пренебрегая флуктуациями фазы, приближенно можем считать, что $\cos \varphi = \cos \langle v \rangle \tau$, $\sin \varphi = \sin \langle v \rangle \tau$. Тогда

$$A^0(\tau) = \frac{R_0^2}{2} \cos \langle v \rangle \tau, \quad A^1(\tau) = \frac{R_0^2}{2} \sin \langle v \rangle \tau.$$

Следовательно,

$$W_x^0(\Omega) = \frac{R_0^2}{2} \frac{1}{2} [\delta(\Omega - v) + \delta(\Omega + v)],$$

$$W_x^1(\Omega) = \frac{R_0^2}{2} \frac{1}{2} [\delta(\Omega - v) - \delta(\Omega + v)]$$

Складывая эти компоненты, получаем окончательно

$$W_x(\Omega) = \frac{R_0^2}{2} \delta(\Omega - v).$$

Таким образом, имеется монохроматическая линия на частоте $\Omega = v$, т. е. на частоте $\omega = \omega_c + v$. Вследствие пренебрежения флуктуациями фазы ψ , мы получили чистую монохроматическую линию без какого-либо пьедестала. Нетрудно видеть, что в действительности мощность этой монохроматической линии будет меньше и появится пьедестал, обязанный флуктуациям фазы ψ . При этом полная мощность линии и пьедестала будет по-прежнему равна $R_0^2/2$.

4. В § 9.3 мы рассматривали эволюцию спектра синхронизируемого генератора с шумом для случая нулевой расстройки. Теперь, зная смещение частоты синхронизованного колебания $\langle v \rangle$,

можно построить картинки спектра при любом значении расстройки. Будем полагать, что уровень шума генератора (величина D) и расстройка $\Delta = \omega_c - \omega_0$ являются заданными и постоянными, а меняется амплитуда синхронизирующего сигнала E_0 (полоса синхронизации Δ_0). Вид и поведение спектра в зависимости от E_0 различны в зависимости от отношения $\Delta\Omega_{\text{своб}}/\Delta$.

Для бóльшей наглядности поведения спектра рассмотрим сначала предельный случай бесшумного генератора ($D = \Delta\Omega_{\text{своб}} = 0$). При этом зависимость $\langle v \rangle$ от Δ выражается на рис. 9.20 кривой, соответствующей $\mu = \infty$:

$$\langle v \rangle = \begin{cases} 0, & \Delta < \Delta_0 \ (\lambda \leq 1), \\ -\Delta \sqrt{1 - \lambda^{-2}}, & \Delta > \Delta_0 \ (\lambda \geq 1). \end{cases}$$

Примерный вид спектра в этом случае изображен на рис. 9.22, где полоса синхронизации показана жирной горизонтальной линией. В отсутствие сигнала синхронизации мы имеем монохроматическую линию автоколебаний свободного генератора (рис. 9.22, а).

При слабом сигнале синхронизации, когда $0 < \Delta_0 \ll \Delta$, $\langle v \rangle \approx -\Delta$. Таким образом, смещение частоты автоколебаний близко к расстройке и частота автоколебаний ω практически осталась на прежнем месте (рис. 9.22, б).

Имеется режим биений с частотой биений, равной Δ . Пусть теперь амплитуда сигнала синхронизации становится еще большей, так что $\Delta_0 = \Delta/2$ ($\lambda = 2$). В этом случае $\langle v \rangle = -0,865 \Delta$. Частота автоколебаний сместилась по направлению к ω_c

(рис. 9.22, в). В этом случае мы имеем так называемое явление частичного увлечения частоты или частичную синхронизацию, при которой биения сохраняются (так как $\Delta > \Delta_0$), но частота биений становится меньше по сравнению с расстройкой $\omega_c - \omega_0$.

Будем далее увеличивать сигнал синхронизации. Пусть $\Delta_0 = \Delta/\sqrt{2}$ ($\lambda = \sqrt{2}$). Тогда $\langle v \rangle = -\Delta/\sqrt{2} = -\Delta_0$ (рис. 9.22, г).

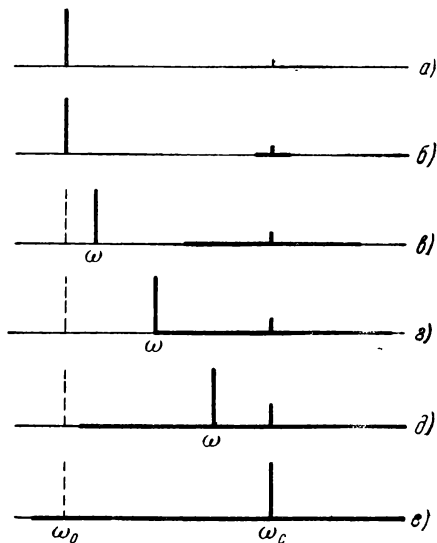


Рис. 9.22.

Частота автоколебаний будет еще ближе к ω_c , частота биений станет равной Δ_0 . Частичная синхронизация стала еще ближе к «полной» синхронизации. Пусть $\Delta_0 = \Delta/1,05$ ($\lambda = 1,05$). Нетрудно найти, что $\langle \nu \rangle = -0,3\Delta$ (рис. 9.22, д).

Наконец, если $\Delta_0 \geq \Delta$, то наступает «полная» синхронизация, режим биений исчезает и частота автоколебаний совпадает с ω_c . Заметим, что в режиме частичной синхронизации мощность мо-

нохроматической линии сигнала синхронизации много меньше мощности автоколебания (условие $\alpha_{00} \ll 1$).

Изображенная на рис. 9.22 картина спектра при частичной синхронизации является примерной, ибо строгий анализ показывает в общем случае более богатый спектральный состав увлеченного автоколебания, который выражается, в частности, в том, что форма биений не является строго синусоидальной. Оставаясь, однако, в рамках слабой нелинейности автогенератора и малых сигналов синхронизации, мы можем этим пренебречь.

Пусть теперь генератор об-

ладает шумами, но они достаточно малы, так что $\Delta\Omega_{\text{своб}} \ll \Delta$. Эволюция спектра генератора показана в этом случае на рис. 9.23.

Пусть E_0 мала, так что $\Delta_0/\Delta \ll 1$ ($\lambda \gg 1$). При этом $\mu = \Delta_0/D$ остается еще произвольным. Однако из рис. 9.20 следует, что при $\lambda \gg 1$ при любом μ $\langle \nu \rangle = -\Delta$. Следовательно, спектр генератора практически остается на прежнем месте и совпадает со спектром свободного автогенератора. Имеются биения (рис. 9.23, а).

Увеличим амплитуду сигнала синхронизации, так что $\Delta_0 = \Delta/2$ ($\lambda = 2$). В этом случае мы имеем частичную синхронизацию и спектр автогенератора, практически не деформируясь, смещается на $0,135\Delta$ в сторону ω_c (рис. 9.23, б). По-прежнему имеется режим биений, частота их равна $\langle \nu \rangle$ с дисперсией порядка $\Delta\Omega_{\text{своб}}$.

Поскольку у спектра свободного автогенератора имеются крылья, то их часть попадает в полосу синхронизации и это

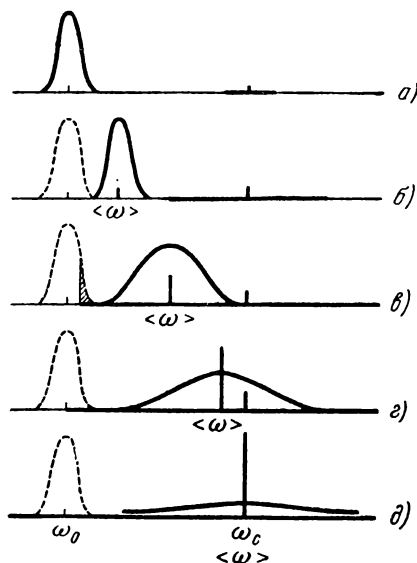


Рис. 9.23.

приводит к тому, что на частоте $\langle \omega \rangle$ появляется монохроматическая линия с чрезвычайно малой мощностью (примерно равной мощности крыльев, попавших в полосу синхронизации).

Пусть теперь сигнал синхронизации настолько возрос, что $\Delta - \Delta_0 = D_{\text{своб.}}$. В этом случае $\lambda = 1 + \frac{1}{\mu}$. Предположим для определенности, что в рассматриваемом случае $\mu = \Delta_0/D = 10$. В таком случае $\langle v \rangle = -0,5 \Delta$. Смещение средней частоты в сторону ω_c несколько меньше, чем для бесшумного генератора. При этом, вследствие того, что в полосу синхронизации попадает уже заметная часть спектральных компонент спектра свободного генератора, смещенный спектр уменьшается и расширяется, а мощность монохроматической линии на частоте $\langle \omega \rangle$ увеличивается и равна синхронизованной мощности спектра свободного генератора (она пропорциональна заштрихованной площади на рис. 9.23, в). Общая мощность сплошного спектра и монохроматической линии по-прежнему равна примерно $R_0^2/2$.

Обратимся к рис. 9.23, в. В какой-то степени еще можно считать, что имеются биения. Они существуют между монохроматической линией синхронизирующего сигнала и колебанием, представленным спектром с максимумом на частоте $\langle \omega \rangle$. Однако частота биений со средним значением $\langle v \rangle$ имеет дисперсию, уже значительно большую чем $\Delta \Omega_{\text{своб.}}$.

При дальнейшем увеличении Δ_0 в полосу синхронизации попадает все большая и большая часть спектральных компонент спектра свободного генератора, спектр колебания располагается все ближе к ω_c , мощность его пьедестала уменьшается, а ширина увеличивается. Увеличивается и мощность линии частоты $\langle \omega \rangle$. При $\Delta \approx \Delta_0$ ($\lambda \approx 1$) $\langle v \rangle \approx -\frac{1}{4} \Delta$. Мощность линии и пьедестала равны, а ширина пьедестала такова, что она свободно захватывает область $\omega = \omega_c$ (рис. 9.23, г). В этом случае о биениях уже говорить трудно, так как дисперсия частоты биений имеет порядок ее среднего значения. Если, наконец, $\Delta_0 - \Delta \gg D$ (рис. 9.23, д), то $\lambda < 1$, а $\mu \gg 1$. Частота смещения становится очень малой и спектр автоколебания расположен практически на частоте ω_0 . Почти весь спектр свободного генератора попадает в полосу синхронизации и «перерабатывается» в монохроматическую линию, мощность которой близка к $R_0^2/2$. Пьедестал становится очень малым и широким, и мы фактически приходим к случаю линейного приближения, когда $\langle \varphi^2 \rangle \ll 1$.

5. Несколько иная картина видоизменения спектра генератора с шумами при его синхронизации наблюдается для случая, когда $\Delta < \Delta \Omega_{\text{своб.}}$, когда расстройка сравнима с шириной

спектральной линии свободного автогенератора или меньше ее. Этот случай изображен на рис. 9.24.

При малой амплитуде сигнала синхронизации $\lambda = \Delta/\Delta_0 \gg 1$, спектр автоколебаний практически остается без изменений, мощность монохроматической линии мала (рис. 9.24, а).

При $\Delta_0 = \Delta$, $\lambda = 1$, $\mu = \Delta_0/D \approx 1$ монохроматическая линия синхронизованного генератора расположена ближе к ω_c , ее мощность сравнима с мощностью пьедестала, который стал ниже и шире (рис. 9.24, б).

При $\Delta_0 > \Delta\Omega_{\text{своб}}$, $\Delta, \lambda < 1$, $\mu > 1$ монохроматическая линия расположена очень близко к ω_c и ее мощность больше мощности пьедестала (рис. 9.24, в).

Наконец, при $\Delta_0 \gg \Delta\Omega_{\text{своб}}$, $\Delta, \lambda \ll 1$, $\mu \gg 1$ почти вся мощность первоначального спектра попадает в полосу синхронизации, «превращаясь» в монохроматическую линию мощностью, примерно равной $R_0^2/2$ и расположенную практически на частоте ω_c . При этом $\langle \varphi^2 \rangle \ll 1$, и мы также приходим к линейному случаю (рис. 9.24, г).

Спектры, указанные на рис. 9.24, позволяют сделать вывод о том, что биений при $\Delta < \Delta\Omega_{\text{своб}}$ обнаружить практически невозможно, ибо они

«тонут» в сплошной части спектра синхронизованного автогенератора (дисперсия частоты биений больше ее среднего значения).

Нетрудно видеть, что картина изменения спектра, указанная на рис. 9.24, при $\Delta = 0$, как и должно быть, непосредственно переходит в ту, которая изображена на рис. 9.17.

§ 9.5. Синхронизация генератора при флуктуациях его параметров. Сильная синхронизация

Помимо естественных шумов в системах синхронизации автогенераторов, так же как и в обычных автогенераторах, существуют флуктуации параметров, которые могут приводить как к ухудшению синхронизации, так и вообще к ее срыву. По своему

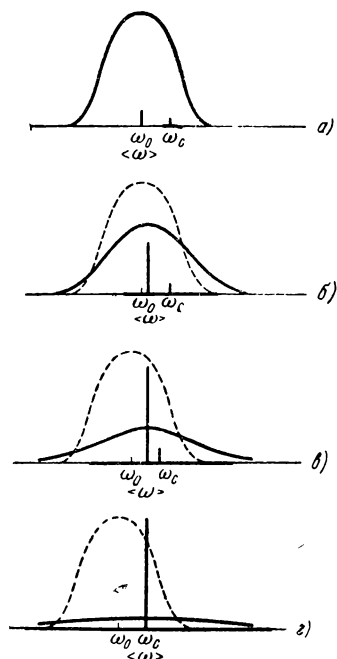


Рис. 9.24.

удельному весу флуктуации параметров практически всегда преобладают над естественными шумами.

В настоящем и следующем параграфах рассматривается влияние флуктуаций емкости контура автогенератора (и отчасти влияние флуктуаций крутизны лампы) на качество работы систем синхронизации.

1. Томсоновский генератор, обладающий малыми флуктуациями параметров и находящийся под воздействием малого синусоидального сигнала с частотой ω_c , близкой к ω_0 , описывается уравнением

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_1^2 x = F(x, \dot{x}) + \omega_1^2 E_0 \cos \omega_c t + \omega_1^2 \mathcal{G}(t, x, \dot{x}),$$

правая часть которого является достаточно малой.

Если искать решение этого уравнения в виде

$$x = (R_0 + \rho') \cos(\omega_c t + \varphi'),$$

то, согласно § 5.2, получим следующие уравнения для φ' и малых $\alpha' = \rho'/R_0$:

$$\frac{d\alpha'}{dt} = -p\alpha' - \frac{\omega_0 E_0}{2R_0} \sin \varphi' - \frac{\omega_0}{2R_0} \frac{2}{T_c} \int_{t-T_c}^t \mathcal{G}(\xi, \tilde{x}, \dot{\tilde{x}}) \sin(\omega_c \xi + \varphi') d\xi,$$

$$\frac{d\varphi'}{dt} = -q\alpha' - \Delta - \frac{\omega_0 E_0}{2R_0} \cos \varphi' - \frac{\omega_0}{2R_0} \frac{2}{T_c} \int_{t-T_c}^t \mathcal{G}(\xi, \tilde{x}, \dot{\tilde{x}}) \cos(\omega_c \xi + \varphi') d\xi.$$

Здесь $\tilde{x} = R_0 \cos(\omega_c t + \varphi')$, $\dot{\tilde{x}} = -\omega_c R_0 \sin(\omega_c t + \varphi')$.

Ограничимся рассмотрением флуктуаций одного параметра, медленного по сравнению с $\cos \omega_c t$. Тогда случайную функцию $\mathcal{G}(t, \tilde{x}, \dot{\tilde{x}})$ можно представить в виде

$$\mathcal{G}(t, \tilde{x}, \dot{\tilde{x}}) = g_{\parallel}(t) \cos(\omega_c t + \varphi') - g_{\perp}(t) \sin(\omega_c t + \varphi'),$$

где, как показано в § 6.1,

$$g_{\parallel}(t) = R_0 g_c(t) = R_0 \left[\Psi_{0c} \sigma + \Psi_{1c} \frac{d\sigma}{dt} \right],$$

$$g_{\perp}(t) = R_0 g_s(t) = R_0 \left[F_{0s} \sigma + F_{1s} \frac{d\sigma}{dt} \right].$$

Здесь Ψ_{0c} , Ψ_{1c} , F_{0s} , F_{1s} — некоторые коэффициенты. В таком случае уравнения для α' и φ' примут следующий вид:

$$\frac{d\alpha'}{dt} = -p\alpha' - \frac{\omega_0 E_0}{2R_0} \sin \varphi' + \frac{\omega_0}{2} g_s(t),$$

$$\frac{d\varphi'}{dt} = -q\alpha' - \Delta - \frac{\omega_0 E_0}{2R_0} \cos \varphi' - \frac{\omega_0}{2} g_c(t).$$

Вводя, как и ранее, $\varphi' = \varphi_0 + \varphi$, $\alpha' = \alpha_0 + \alpha$, где φ_0 , α_0 — установившиеся значения φ' и α' в отсутствие флуктуаций параметров, для α_0 и φ_0 получим по-прежнему уравнения (9.1.6). Для α и φ нетрудно получить тогда следующие окончательные уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{dt} &= -p\alpha - d_0[1 - \cos \varphi] + (q\alpha_0 + \Delta) \sin \varphi + \frac{\omega_0}{2} g_s(t), \\ \frac{d\varphi}{dt} &= -q\alpha - (q\alpha_0 + \Delta)[1 - \cos \varphi] - d_0 \sin \varphi - \frac{\omega_0}{2} g_c(t). \end{aligned} \quad (9.5.1)$$

Ограничимся далее случаем изохронного генератора и, кроме того, в этом параграфе рассмотрим лишь малые фазовые флуктуации, когда $\langle \varphi^2 \rangle \ll 1$. Флуктуационные уравнения при этом принимают простой вид:

$$\frac{d\alpha}{dt} = -p\alpha + \Delta\varphi + \frac{\omega_0}{2} g_s(t), \quad \nu = \frac{d\varphi}{dt} = -d_0\varphi - \frac{\omega_0}{2} g_c(t). \quad (9.5.2)$$

Эти уравнения похожи на (9.1.15), (9.1.16), с той лишь разницей, что случайные функции $e_{\parallel}(t)$ и $e_{\perp}(t)$ дельта-коррелированные и независимые, в то время как $g_s(t)$, $g_c(t)$ — всегда коррелированы и могут обладать спектром любой формы (сохраняется лишь вышеупомянутое ограничение на медленность $\sigma(t)$).

Из уравнений (9.5.2) нетрудно получить теперь все необходимые характеристики для флуктуаций α и φ : дисперсии, корреляции, спектры и т. п., не ограничиваясь каким-либо конкретным параметром, а в общем виде для любого параметра. Для этого нужно лишь воспользоваться общими характеристиками для $g_s(t)$ и $g_c(t)$, приведенными в § 6.1. Так, например, условие справедливости уравнений (9.5.2), т. е. условие $\langle \varphi^2 \rangle \ll 1$, для стационарных флуктуаций параметра $\sigma(t)$, обладающего функцией корреляции $\Phi_{\sigma}(\tau)$, примет следующий вид:

$$\langle \varphi^2 \rangle = \frac{\omega_0^2}{8p\alpha_0} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-d_0|x|} \left[\Psi_{0c}^2 \Phi_{\sigma}(x) - \Psi_{1c}^2 \frac{d^2 \Phi_{\sigma}(x)}{dx^2} \right] dx \ll 1. \quad (9.5.3)$$

Затем можно в общем случае утверждать, что вследствие ограниченности $\langle \varphi^2 \rangle$ спектр синхронизованного колебания, как и для случая естественных шумов, состоит из монохроматической линии и пьедестала, образованного амплитудными и фазовыми флуктуациями.

Условие (9.5.3) есть по существу условие сильной синхронизации. Однако оно отличается от (9.1.18) тем, что в него не входит R_0 — амплитуда автоколебаний. Это связано с тем, что флуктуации параметров эквивалентны действию шума, уже пропорционального R_0 — они влияют на автоколебания, если автоколебания уже существуют. Амплитуда синхронизирующего сиг-

нала в условие сильной синхронизации по-прежнему входит через α_0 .

2. Для наглядности и простоты последующих выкладок ограничимся частным случаем когерентных флуктуаций емкости контура $\delta C(t)$ томсоновского генератора и крутизны лампы $\delta S(t)$. В этом случае, согласно § 6.3,

$$g_c = \delta C(t), \quad g_s(t) = -\frac{1}{\omega_0} \left[P d \delta C + \frac{d}{dt} \delta C \right],$$

где $\delta S(t) = b \delta C(t)$, $d = 1 - b$. Таким образом, $\sigma = \delta C$, $\Psi_{0c} = 1$, $\Psi_{1c} = 0$, $F_{0s} = -Pd/\omega_0$, $F_{1s} = -1/\omega_0$. Теперь уже нетрудно получить с помощью §§ 6.1 и 2.3 следующие характеристики спектров флуктуаций амплитуды, частоты и фазы синхронизованного генератора:

$$\begin{aligned} S_\varphi(\Omega) &= \frac{\omega_0^2}{4} \frac{S_{\delta C}(\Omega)}{\Omega^2 + d_0^2}, \quad S_\nu(\Omega) = \frac{\omega_0^2}{4} \frac{\Omega^2}{\Omega^2 + d_0^2} S_{\delta C}(\Omega), \\ S_a(\Omega) &= \frac{1}{4} \frac{1}{\Omega^2 + p^2} \left\{ P^2 d^2 + \Omega^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\Delta \omega_0}{\Omega^2 + d_0^2} [\Delta \omega_0 + 2d_0 P d - 2\Omega^2] \right\} S_{\delta C}(\Omega), \quad (9.5.4) \\ S_{a\varphi}^0(\Omega) &= \frac{\omega_0}{4} \frac{1}{(\Omega^2 + p^2)(\Omega^2 + d_0^2)} [p(\Delta \omega_0 + P d d_0) + \Omega^2 P d] S_{\delta C}(\Omega), \\ S_{a\varphi}^1(\Omega) &= \frac{\omega_0}{4} \frac{\Omega}{(\Omega^2 + p^2)(\Omega^2 + d_0^2)} [p P d - \Delta \omega_0 + \Omega^2] S_{\delta C}(\Omega). \end{aligned}$$

Эти формулы справедливы, если $S_{\delta C}(t)$ существует для почти всех Ω .

Если флуктуации емкости являются стационарными, то условие малости фазовых флуктуаций принимает вид

$$\langle \varphi^2 \rangle = \frac{\omega_0^2}{4 p \alpha_0} \int_0^\infty e^{-d_0 x} \Phi_{\delta C}(x) dx \ll 1.$$

Из (9.5.4) следует, что спектральные плотности амплитудно-фазовых флуктуаций сильно зависят от расстройки и в общем непохожи на те, которые были для случая естественных шумов (см. (9.1.20)), если даже предположить, что флуктуации емкости и крутизны являются дельта-коррелированными.

Это обстоятельство связано с тем, что в правую часть флуктуационного уравнения для амплитудных флуктуаций входит слагаемое $\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \delta C(t)$. Это приводит, в частности, к тому, что для

достаточно больших Ω $S_\alpha(\Omega) = \frac{1}{4} S_{\delta c}(\Omega)$. Кроме того, если для естественных шумов корреляция между флуктуациями амплитуды и фазы существовала только при $\Delta \neq 0$, то в рассматриваемом случае флуктуаций параметров α и φ коррелированы и в центре зоны синхронизации. Это объясняется тем, что и флуктуации амплитуды, и флуктуации фазы порождаются нестабильностью одного и того же параметра.

При приближении к границам синхронизации все спектральные плотности существенно возрастают с уменьшением Ω , если даже $S_{\delta c}(0) = \text{const}$.

3. Рассмотрим еще более конкретный случай. Пусть флуктуации емкости и крутизны являются стационарными и обладают функцией корреляции, равной $\Phi_{\delta c}(\tau) = \langle \delta C^2 \rangle e^{-a|\tau|}$. Условие малости фазовых флуктуаций (условие сильной синхронизации) принимает тогда вид

$$\langle \varphi^2 \rangle = \frac{\omega_0^2 \langle \delta C^2 \rangle}{4d_0(d_0 + a)} \ll 1.$$

Следовательно, для справедливости линейного приближения интенсивность флуктуаций емкости должна удовлетворять неравенству

$$\frac{\langle \delta C^2 \rangle}{4} \ll \frac{d_0(d_0 + a)}{\omega_0^2} = \frac{\sqrt{\Delta_0^2 - \Delta^2} (\sqrt{\Delta_0^2 - \Delta^2} + a)}{\omega_0^2}.$$

При приближении к краям зоны синхронизации требование на малость флуктуаций становится более сильным. Это связано с возрастанием дисперсии фазы при увеличении расстройки. В пределе при $\Delta \rightarrow \Delta_0$ $\langle \varphi^2 \rangle$ ограниченно возрастает и линеаризация уравнений становится невозможной при любой, отличной от нуля интенсивности флуктуаций емкости. Форма спектра синхронизованного колебания определяется для рассматриваемого случая формулой

$$W_x(\Omega) = \frac{R_0^2}{2} [\delta(\Omega) + S_\alpha(\Omega) + 2S_{\alpha\varphi}^1(\Omega) + S_\varphi(\Omega)].$$

Как уже отмечалось, спектр состоит из монохроматической линии и пьедестала. В центре полосы синхронизации ($\Delta = 0$) форма пьедестала равна (для $\Omega \ll \omega_0$)

$$W_x(\Omega) = \frac{R_0^2}{2} \frac{a \langle \delta C^2 \rangle}{4(a^2 + \Omega^2)} \frac{\Omega^2 \omega_0^2 + (\Omega p d + \omega_0 p)^2}{(\Omega^2 + p^2)(\Omega^2 + d_0^2)}. \quad (9.5.5)$$

Она сильно несимметрична при $\Omega = \pm \Omega_0$, где, как и в гл. 6,

$$\Omega_0 = \frac{p}{\frac{\omega_0}{\Pi d} + \frac{\Pi d}{\omega_0}}.$$

Сравнивая (9.5.5) с (6.4.20), нетрудно видеть, что при $\Omega \gg p\alpha_0$ форма пьедестала спектра синхронизованного колебания полностью совпадает с формой пьедестала спектра свободного автогенератора.

Это совпадение связано с тем, что явление синхронизации генератора «связывает» лишь сравнительно медленные флуктуации фазы, отвечающие за форму пика спектральной линии свободного генератора (при $\Omega \approx \Delta\Omega$) и образующие теперь форму «пика» фазовых флуктуаций (при $\Omega \approx p\alpha_0$) синхронизованного колебания. Другими словами, фаза автогенератора синхронизуется квазистатически.

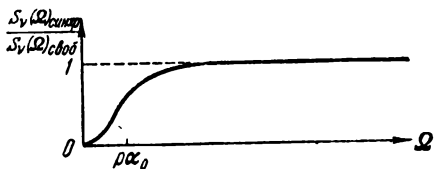


Рис. 9.25.

Особенно наглядно эта квазистатичность синхронизации видна из сравнения спектров флуктуаций частоты у свободного и синхронизованного генератора. На рис. 9.25 показано отношение спектральных плотностей флуктуаций частоты синхронизованного генератора к свободному, равное (см. (6.3.19) и (9.5.4))

$$\frac{S_v(\Omega)_{\text{синхр}}}{S_v(\Omega)_{\text{своб}}} = \frac{\omega_0^2}{4} \frac{S_{\delta c}(\Omega) \Omega^2}{\Omega^2 + d_0^2} / \frac{\omega_0^2}{4} S_{\delta c}(\Omega) = \frac{\Omega^2}{\Omega^2 + d_0^2}.$$

Отсюда видно, что с точки зрения малых флуктуаций параметров (а также и малых естественных шумов) синхронизация генератора эффективна лишь для низкочастотных флуктуаций фазы (и частоты), спектр которых лежит в полосе $[0, d_0]$. При увеличении расстройки низкочастотная область «синхронизованной» фазы уменьшается — эффект синхронизации проявляется лишь для всех более медленных и медленных флуктуаций фазы. В пределе при $\Delta \rightarrow \Delta_0$, $d_0 \rightarrow 0$ и $[S_v(\Omega)]_{\text{синхр}} \rightarrow [S_v(\Omega)]_{\text{своб}}$ для всех сколь угодно малых частот Ω .

4. Выше, в § 9.1, мы ввели различные определения эффективности синхронизации: 1) по набегу фазы; 2) по интенсивности флуктуаций частоты и 3) по отношению мощности пьедестала к мощности спектральной линии. Применим теперь эти критерии к рассматриваемому случаю.

Функция корреляции фазовых флуктуаций для спектральной плотности

$$S_{\varphi}(\Omega) = \frac{\omega_0^2}{4} \frac{a \langle \delta C^2 \rangle}{\pi (\Omega^2 + d_0^2)(a^2 + \Omega^2)}$$

равна (см. Приложение III)

$$\Phi_{\varphi}(\tau) = \frac{\langle \delta C^2 \rangle}{4} \frac{\omega_0^2}{\rho a_0 (a^2 - d_0^2)} [a e^{-d_0 \tau} - d_0 e^{-a \tau}].$$

Следовательно ($\tau > 0$),

$$\chi(\tau) = \Phi_{\varphi}(0) - \Phi_{\varphi}(\tau) = \frac{m a^2}{\rho a_0 (a + d_0)} \left[1 - \frac{a e^{-d_0 \tau} - d_0 e^{-a \tau}}{a - d_0} \right],$$

где $m = \langle \delta C^2 \rangle \omega_0^2 / 4 a^2$ — индекс модуляции. Для частного случая $a \gg \Delta_0 \gg d_0$ зависимость $\chi(\tau)$ от τ при разных значениях расстройки Δ изображена на рис. 9.26.

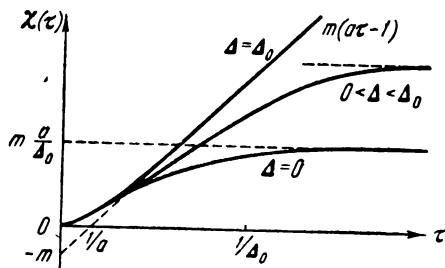


Рис. 9.26.

Определяя эффективность синхронизации по набегу фазы, имеем следующее неравенство:

$$\chi(\tau) \leq \chi_0,$$

определяющее возможные расстройки эффективной синхронизации. Вводя, как и ранее, относительную полосу синхронизации η_1 и

$\xi_1 = \langle \varphi^2 \rangle_{\Delta=0} / \chi_0$, получим зависимость η_1 от ξ_1 , аналогичную зависимости, изображенной на рис. 9.7.

Нетрудно найти интенсивность флуктуаций частоты

$$\langle \nu^2 \rangle = \frac{a}{a + d_0} \frac{\langle \delta C^2 \rangle \omega_0^2}{4}.$$

Тогда условие эффективной синхронизации по второму определению принимает вид

$$\frac{\langle \delta C^2 \rangle \omega_0^2}{4} \frac{a}{a + d_0} \leq \nu_0^2.$$

Для любых Δ дисперсия $\langle \nu^2 \rangle$ остается конечной и принимает максимальное значение на краю полосы синхронизации $\langle \nu^2 \rangle_{\max} = \frac{\langle \delta C^2 \rangle \omega_0^2}{4}$. Поэтому, если $\langle \nu^2 \rangle_{\max} > \nu_0^2$, то условие эффективной синхронизации выполняется при любых расстройках

$\Delta \leq \Delta_0$ и $\eta_2 = 1$. Если же $\langle v^2 \rangle_{\max} > v_0^2$, то полоса эффективной синхронизации уменьшается и находится из соотношения

$$\eta_2 = 1 - \frac{a^2}{\Delta_0^2} (\xi_2 - 1)^2,$$

где $\eta_2 = \left(\frac{\Delta_2}{\Delta_0}\right)^2$, $\xi_2 = \frac{\langle \delta C^2 \rangle \omega_0^2}{4v_0^2}$.

На рис. 9.27, где изображены графики зависимости $\eta_2 = \eta_2(\xi_2)$ при разных значениях a/Δ_0 , видно, что полоса эффективной синхронизации существенно зависит от соотношения ширины спектра флуктуаций емкости и полосы синхронизации Δ_0 , уменьшаясь с ростом ξ_2 . В предельном случае при $a/\Delta_0 \rightarrow 0$ зависимость $\eta_2(\xi_2)$ вырождается в прямую, параллельную оси ξ_2 , а при $a/\Delta_0 \rightarrow \infty$ полоса эффективной синхронизации равна

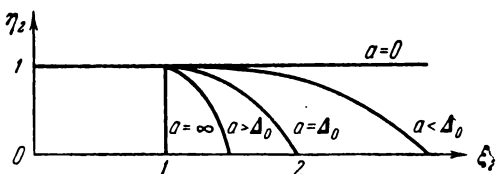


Рис. 9.27.

$$\Delta_2 = \begin{cases} \Delta_0, & 0 \leq \xi_2 \leq 1, \\ 0 & \xi_2 > 1. \end{cases}$$

5. Обратимся к нестационарным флуктуациям емкости и крутизны, обладающих стационарными приращениями. Пусть

$$\delta S(t) = b \delta C(t), \quad S_{\delta C}(\Omega) = \frac{A_c}{2\pi |\Omega|^\gamma}, \quad 1 < \gamma < 3.$$

Теперь уже для справедливости линейного приближения необходима малость структурных функций $d_\alpha[0; t]$ и $d_\varphi[t; t; \tau]$ при достаточно больших, но ограниченных t и любых τ . Однако если малость $d_\alpha[0; t]$ для $t \leq t_1$ и возможна, то малости

$$d_\varphi[t; t; \tau] = d_\varphi[0; \tau] = \chi(\tau)$$

для любых τ мы не получим, ибо, например, при $\tau \gg d_0^{-1}$

$$d_\varphi[0; \tau] \sim \frac{\omega_0^2}{4d_0} \tau^{\gamma-1}$$

и неограниченно возрастает с ростом τ . Таким образом, для рассмотренной спектральной плотности флуктуаций частоты линеаризация уравнений (9.5.1) невозможна.

Бесконечное возрастание $\chi(\tau)$ с ростом τ наводит на мысль о том, что в этом случае, благодаря флуктуациям параметров, синхронизованное колебание не состоит из монохроматической

линии и пьедестала, а представляют собой размытую спектральную линию, обладающую конечной шириной. Однако в этом случае флуктуации фазы достаточно велики, уравнение становится нелинейным, фаза распределена не нормально и предположение о размытости спектральной линии может оказаться неверным. В этом случае необходимо специальное рассмотрение.

§ 9.6. Синхронизация генератора при больших флуктуациях параметра

В предыдущем параграфе рассматривалось влияние сравнительно малых флуктуаций параметров синхронизируемого генератора на процессы и характеристики синхронизации. Обратимся теперь к случаю больших флуктуаций параметра, когда линеаризация уравнений (9.5.1) невозможна.

1. Ограничимся случаем изохронного генератора и анализом лишь фазовых флуктуаций, представляющих наибольший интерес. Тогда имеем

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\Delta [1 - \cos \varphi] - d_0 \sin \varphi - \frac{\omega_0}{2} g_c(t). \quad (9.6.1)$$

Сделаем замену переменных, чтобы упростить правую часть этого уравнения. Нетрудно найти, что

$$\Delta \cos \varphi - d_0 \sin \varphi = -\Delta_0 \sin (\varphi + \gamma_0),$$

где $\gamma_0 = -\arctg \frac{\Delta}{d_0}$.

Обозначая $\varphi + \gamma_0 = \varphi'$ для φ' , получим следующее, более простое уравнение:

$$\frac{d\varphi'}{dt} = -\Delta_0 \sin \varphi' - \Delta - \frac{\omega_0}{2} g_c(t). \quad (9.6.2)$$

В то время как для φ мы имеем $\langle \varphi \rangle = 0$, среднее значение φ' равно $\langle \varphi' \rangle = \gamma_0$.

Анализ уравнения (9.6.2) показывает, что оно, вообще говоря, имеет два резко отличающихся решения в зависимости от значения $\Delta + \frac{\omega_0}{2} g_c(t)$. Фаза φ' или стремится к какому-то установившемуся значению (генератор находится внутри полосы синхронизации), что имеет место при достаточно малых значениях $\left| \Delta + \frac{\omega_0}{2} g_c(t) \right|$, или монотонно изменяется во времени (генератор вышел из полосы синхронизации), что получается при достаточно больших значениях $\left| \Delta + \frac{\omega_0}{2} g_c(t) \right|$. Это обстоятельство существенно затрудняет исследование решения уравнения (9.6.2) в случае произвольной функции $g_c(t)$.

Для простоты последующего анализа, но вместе с тем чтобы сохранить основные характеристики решения, примем шаговую модель флуктуаций параметра, т. е. будем считать, что в течение некоторого времени (равного времени корреляции параметра τ_0) параметр имеет некоторое постоянное значение, которое затем меняется скачком, причем его значение после скачка не зависит от значения, предшествовавшего скачку. Таким образом, между скачками $g_c(t)$ принимает постоянное значение g_c и решение уравнения (9.6.2) (а следовательно, и (9.6.1) может быть записано в квадратурах, причем вид этого решения будет различным в зависимости от значения $\left| \Delta + \frac{\omega_0}{2} g_c \right|$.

Разумеется, последующие значения g_c являются случайными. Предположим, что g_c имеет нормальное распределение с $\langle g_c \rangle = 0$. Введя безразмерную случайную величину $\xi \equiv \frac{\omega_0}{2\Delta_0} g_c$, будем полагать заданным ее вероятностное распределение (рис. 9.28).

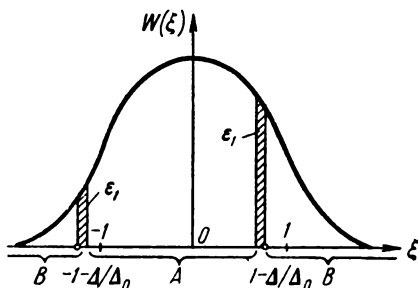


Рис. 9.28.

2. Рассмотрим первый случай, когда $\left| \Delta + \frac{\omega_0}{2} g_c \right| < \Delta_0$. Это соответствует области A на рис. 9.28. Для этого случая решение уравнения (9.6.2) имеет вид

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi'}{2} = \frac{(\Delta_0 - \Delta_1) C_1(g_c; \varphi'_n) - (\Delta_0 + \Delta_1) e^{-\Delta_1(t-t_0)}}{-\left(\Delta + \frac{\omega_0}{2} g_c\right) [C_1(g_c; \varphi'_n) - e^{-\Delta_1(t-t_0)}]}, \quad (9.6.3)$$

где

$$\Delta_1 = \sqrt{\Delta_0^2 - \left(\Delta + \frac{\omega_0}{2} g_c\right)^2},$$

а

$$C_1(g_c; \varphi'_n) = \frac{\left(\Delta + \frac{\omega_0}{2} g_c\right) \operatorname{tg} \frac{\varphi'_n}{2} + \Delta_0 + \Delta_1}{\left(\Delta + \frac{\omega_0}{2} g_c\right) \operatorname{tg} \frac{\varphi'_n}{2} + \Delta_0 - \Delta_1}$$

— постоянная интегрирования, φ'_n — начальная фаза генератора. Из (9.6.3) следует, что после скачка начинается переходный процесс с временем установления

$$\tau_{\text{уст}} = \frac{1}{\sqrt{\Delta_0^2 - \left(\Delta + \frac{\omega_0}{2} g_c\right)^2}},$$

по окончании которого система приходит в равновесное состояние, характеризующееся тем, что частота генератора равна ω_c , т. е. при значениях параметра ξ , принадлежащего области A , генератор все время находится в полосе синхронизации. Согласно (9.6.2) в установившемся состоянии

$$\varphi' = -\arcsin\left(\frac{\Delta}{\Delta_0} + \xi\right). \quad (9.6.4)$$

Введем еще одно упрощающее предположение: примем, что флуктуации параметра настолько медленны, что $\tau_0 \gg \tau_{уст}$. В этом случае квазистатистических флуктуаций параметра переходным процессом можно пренебречь и в качестве решения взять (9.6.4). При этом, вообще говоря, условие шаговости флуктуаций параметра является уже излишним. Решение (9.6.4) справедливо при любых квазистатистических флуктуациях емкости, лишь бы выполнялось условие $\left|\frac{\Delta}{\Delta_0} + \xi\right| < 1$.

Необходимо также отметить, что условие квазистатичности $\tau_0 \gg \tau_{уст}$, вообще говоря, нарушается в ϵ_1 -окрестности границы полосы синхронизации (рис. 9.28), где $\tau_{уст}$ может быть сравнимым с временем корреляции τ_0 и даже превосходить его.

Однако для большинства практических случаев этим обстоятельством можно, по-видимому, пренебречь, так как, полагая τ_0 достаточно большим, мы тем самым настолько уменьшаем ϵ_1 -окрестность, что вероятность пребывания величины ξ в этой окрестности оказывается пренебрежимо малой. Например, пусть $\omega_c/2\pi = 10^7$ гц, $\Delta_0/2\pi = 3 \cdot 10^5$ гц, $\tau_0 = \frac{1}{6\pi} 10^{-2}$ сек, $s^2 \equiv \langle \xi^2 \rangle = 10^{-2}$, $\Delta/\Delta_0 = 0.5$. Тогда можно показать, что ширина области ϵ_1 , где $\tau_{уст} \geq \frac{1}{10} \tau_0$, равна (для величины ξ) $5 \cdot 10^{-5}$, а вероятность попадания параметра ξ в эту область составит 10^{-9} .

3. Пусть теперь $\left|\Delta - \frac{\omega_0}{2} g_c\right| > \Delta_0$, чему соответствует область B на рис. 9.28. Решение уравнения (9.6.2) для этой области принимает вид

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{\varphi'}{2} = & - \frac{\sqrt{\left(\frac{\omega_0}{2} g_c + \Delta\right)^2 - \Delta_0^2}}{\frac{\omega_0}{2} g_c + \Delta} \times \\ & \times \operatorname{tg} \frac{(t-t_0) \sqrt{\left(\frac{\omega_0}{2} g_c + \Delta\right)^2 - \Delta_0^2} + C_2(g_c, \varphi'_n)}{2} - \frac{\Delta_0}{\frac{\omega_0}{2} g_c + \Delta}, \quad (9.6.5) \end{aligned}$$

где

$$C_2(g_c, \varphi'_n) = \operatorname{arctg} \frac{\left(\frac{\omega_0}{2} g_c + \Delta\right) \operatorname{tg} \frac{\varphi'_n}{2} + 1}{\sqrt{\left(\frac{\omega_0}{2} g_c + \Delta\right)^2 - \Delta_0^2}}$$

— постоянная интегрирования. Из полученного решения видно, что в этом случае фаза монотонно возрастает при $\frac{\omega_0}{2} g_c < 0$ (или уменьшается при $\frac{\omega_0}{2} g_c > 0$). Таким образом, при значениях $\frac{\omega_0}{2\Delta_0} g_c$, принадлежащих области B , генератор оказывается вне полосы синхронизации.

Особый интерес представляет не само значение фазы $\varphi'(t)$, а набег фазы за время τ $\Delta\varphi(\tau) = \varphi'(t+\tau) - \varphi'(t)$. Из (9.6.5) нетрудно получить зависимость $\Delta\varphi$ (для $\tau \leq \tau_0$) от τ . На рис. 9.29

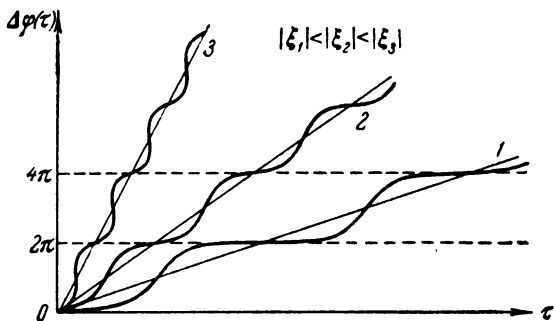


Рис. 9.29.

приведены графики $\Delta\varphi(\tau)$ для разных значений $\frac{\omega_0}{2\Delta_0} g_c$. Из этих графиков, а также из (9.6.5) нетрудно видеть, что фаза изменяется на 2π за время

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\left(\frac{\omega_0}{2} g_c + \Delta\right)^2 - \Delta_0^2}}.$$

Введем усредненную за время T частоту $\tilde{\nu}$, которая, как легко видеть, равна $\tilde{\nu} = 2\pi/T$, и представим изменение фазы за время $\tau \leq \tau_0$ следующим приближенным соотношением:

$$\Delta\varphi(\tau) = \tilde{\nu} \cdot \tau, \quad (9.6.6)$$

где

$$\tilde{\nu} = \begin{cases} -\sqrt{\left(\frac{\omega_0}{2}g_c + \Delta\right)^2 - \Delta_0^2} & \text{при } g_c > 0, \\ \sqrt{\left(\frac{\omega_0}{2}g_c + \Delta\right)^2 - \Delta_0^2} & \text{при } g_c < 0. \end{cases} \quad (9.6.7)$$

Графики, соответствующие (9.6.6), представлены на рис. 9.29 прямыми линиями.

Нетрудно видеть, что приближенное решение (9.6.6) существенно отклоняется от точного только при малых значениях $\frac{\omega_0}{2\Delta_0}g_c$, при которых генератор находится вблизи границы полосы синхронизации. Но поскольку при таких значениях параметра изменения фазы происходят очень медленно, следует ожидать, что область малых $\frac{\omega_0}{2\Delta_0}g_c$ не дает заметного вклада в значение среднего набег фазы $\langle\Delta\varphi\rangle$ и тем более в значение $\langle\Delta\varphi^2\rangle$. Ниже будут даны численные оценки, подтверждающие это предположение.

Имея в виду все эти упрощения, теперь уже нетрудно отыскать остаточную расстройку частоты генератора от синхронизируемого сигнала $\nu_{\text{ост}}$, среднеквадратичный набег фазы $\langle\Delta\varphi^2\rangle$ и ширину спектральной линии генератора $\Delta\Omega$. Будем также предполагать, что флуктуации параметра, представленные флуктуацией $g_c(t)$, имеют нормальное распределение.

4. Остаточную среднюю расстройку между частотой генератора и частотой синхронизирующего сигнала определим как

$$\nu_{\text{ост}} = \frac{\langle\Delta\varphi(\tau)\rangle}{\tau},$$

для $\tau \gg \tau_0$. Для отыскания $\nu_{\text{ост}}$ разобьем интервал времени τ на отрезки, длина которых равна примерно времени корреляции: $\tau = n\tau_0$, $n \gg 1$. Тогда средний набег фазы получим, просуммировав с последующим усреднением набег фазы за n интервалов:

$$\langle\Delta\varphi(\tau)\rangle = \left\langle \sum_{k=1}^n \Delta\varphi_k(\tau_0) \right\rangle = n \langle\Delta\varphi(\tau_0)\rangle. \quad (9.6.8)$$

Если флуктуирующий параметр принадлежит области B , то случайный набег фазы за время τ_0 , как следует из (9.6.6), будет равен

$$\Delta\varphi_B(\tau_0) = \tilde{\nu}(g_c)\tau_0. \quad (9.6.9)$$

Если параметр принимает значения, принадлежащие области A , то набег фазы $\Delta\varphi_A$, как следует из (9.6.3), равен

$$\Delta\varphi_A = -\arcsin\left(\frac{\Delta}{\Delta_0} + \xi\right) - \varphi'_n. \quad (9.6.10)$$

Для начальной фазы φ'_n примем равновероятностный закон распределения в интервале $(-\pi, +\pi)$, если до последнего скачка ξ принадлежало области B ; если же ξ принадлежало области A , то для φ_n принимаем закон распределения в соответствии с законом распределения установившейся фазы, который может быть получен с помощью соотношения (9.6.4). Тогда плотность вероятности начальной фазы $W_1(\varphi'_n)$ можно записать следующим образом:

$$W_1(\varphi'_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} s} e^{-\frac{(\sin \varphi'_n + \Delta/\Delta_0)^2}{2s^2}} \cos \varphi'_n \left[1 \left(\varphi'_n + \frac{\pi}{2} \right) - 1 \left(\varphi'_n - \frac{\pi}{2} \right) \right] + \frac{P_B}{2\pi} [1(\varphi'_n + \pi) - 1(\varphi'_n - \pi)]. \quad (9.6.11)$$

Здесь P_B — вероятность пребывания величины ξ в области B . При этих предположениях, учитывая (9.6.5) и (9.6.10), выражение для среднего набега фазы за время корреляции, усредненное по начальным фазам, примет следующий вид:

$$\begin{aligned} \overline{\langle \Delta\varphi(\tau_0) \rangle} &= \int_B \Delta_0 \tau_0 \sqrt{(\xi + \Delta/\Delta_0)^2 - 1} W(\xi) d\xi - \\ &- \int_{-1-\Delta/\Delta_0}^{1-\Delta/\Delta_0} \arcsin(\xi + \Delta/\Delta_0) W(\xi) d\xi - P_A \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi'_n W_1(\varphi'_n) d\varphi'_n. \end{aligned} \quad (9.6.12)$$

Здесь P_A — вероятность пребывания величины ξ в области A .

Чертой сверху обозначено усреднение по начальным фазам. В выражении (9.6.12) первый интеграл представляет собой средний набег фазы, связанный с выходом генератора из полосы синхронизации при значениях величины ξ , принадлежащих области B . Последующие два члена представляют собой средний набег фазы, связанный со случайным изменением величины ξ в области A . Сравнительная оценка членов в (9.6.12) показывает, что набег фазы в генераторе определяется главным образом «накручиванием фазы» при выходе его из полосы синхронизации*). Поэтому в дальнейшем приближенно примем, что

$$\langle \Delta\varphi(\tau_0) \rangle = \int_B \Delta_0 \tau_0 \sqrt{(\xi + \Delta/\Delta_0)^2 - 1} W(\xi) d\xi. \quad (9.6.13)$$

*) Для тех же количественных соотношений, которые были взяты выше, первый член в (9.6.12), по крайней мере в 10 раз больше последующих.

Отсюда, учитывая (9.6.7) и (9.6.8), получим следующее выражение для средней расстройки частоты:

$$\nu_{\text{ост}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi} s} \left[\int_{1+\Delta}^{\infty} \sqrt{(\xi - \Delta/\Delta_0)^2 - 1} e^{-\frac{\xi^2}{2s^2}} d\xi - \int_{1-\Delta}^{\infty} \sqrt{(\xi + \Delta/\Delta_0)^2 - 1} e^{-\frac{\xi^2}{2s^2}} d\xi \right]. \quad (9.6.14)$$

Из этого соотношения следует прежде всего, что $\nu_{\text{ост}}$ отлична от нуля только в случае ненулевой начальной расстройки ($\Delta \neq 0$) и имеет знак, обратный Δ .

Таким образом, средняя частота генератора из-за флуктуаций параметра (когда $g_c(t) \neq 0$) оказывается смещенной на

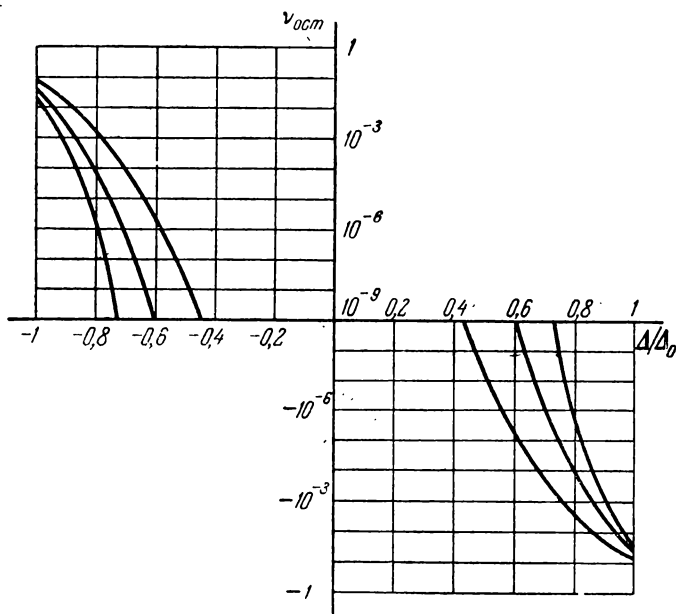


Рис. 9.30.

величину $\nu_{\text{ост}}$ от частоты синхронизирующего сигнала в сторону собственной частоты подстраиваемого генератора. Этот вывод аналогичен результату, который был получен выше при оценке влияния дельта-коррелированных аддитивных шумов. На рис. 9.30 приведены графики зависимости $\nu_{\text{ост}}$ от начальной расстройки, рассчитанные по формуле (9.6.14) для различных значений интенсивности флуктуаций параметра.

Пользуясь (9.6.12), можно дать оценку вклада в величину $\langle \Delta\varphi(\tau_0) \rangle$, даваемого областью ε_2 вблизи границы полосы синхронизации (рис. 9.28), в которой приближенное решение (9.6.13) отличается от точного (9.6.12) больше, например, чем на 10%. Полагая, как и раньше, $\omega_0/2\pi = 10^7$ гц, $\Delta_0/2\pi = 3 \cdot 10^5$ гц, $\tau_0 = \frac{1}{6\pi} 10^{-2}$ сек, $s^2 = 10^{-2}$, $\Delta/\Delta_0 = 0,5$, можно найти, что этот вклад составляет 2,5%.

5. Определим теперь характер спектра колебания генератора вблизи его средней частоты. Если пренебречь амплитудными флуктуациями, которые мало сказываются на форме и ширине пика спектральной линии, а оказывают влияние практически лишь на пьедестал, то колебание генератора можно представить как $x = R_0 \cos[\omega_c t + \varphi(t)]$.

Можно показать, что функция корреляции этого колебания может быть записана как

$$\Phi_x(\tau) = \langle \cos \gamma(\tau) \rangle \cos(\omega_c + \nu_{\text{ост}})\tau, \quad (9.6.15)$$

где $\gamma(\tau) = \Delta\varphi(\tau) - \langle \Delta\varphi(\tau) \rangle$ — отклонение набег фазы генератора за время τ от его среднего значения. Как следует из (9.6.8), $\gamma(\tau)$ можно представить следующим образом:

$$\gamma(\tau) = \sum_{k=1}^n [\Delta\varphi_k(\tau_0) - \langle \Delta\varphi(\tau_0) \rangle] = \sum_{k=1}^n \gamma_k(\tau_0), \quad (9.6.16)$$

причем $\gamma_k(\tau_0)$ и $\gamma_l(\tau_0)$ для $k \neq l$ статистически независимы, так как они определяются независимыми значениями случайных величин ξ_k, ξ_l .

На основании центральной предельной теоремы теории вероятностей, при достаточно большом n , распределение величины $\gamma(\tau)$ можно считать нормальным. Характер спектра колебания вблизи частоты $\omega_c + \nu_{\text{ост}}$ определяется поведением $\langle \cos \gamma(\tau) \rangle$ при больших значениях аргумента τ . Таким образом, рассматривая большие значения τ , имеем большие значения n и можем считать, что $\gamma(\tau)$ распределена нормально. Тогда, следовательно,

$$\langle \cos \gamma(\tau) \rangle = e^{-\frac{\langle \gamma^2(\tau) \rangle}{2}}.$$

На основании (9.6.16) получим следующее выражение для дисперсии $\gamma(\tau)$:

$$\langle \gamma^2(\tau) \rangle = n [\overline{\langle \Delta\varphi^2(\tau) \rangle} - \overline{\langle \Delta\varphi(\tau_0) \rangle}^2]. \quad (9.6.17)$$

Для среднеквадратичного набег фазы за время корреляции имеем

$$\overline{\langle \Delta\varphi^2(\tau_0) \rangle} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta\varphi^2(\tau_0) W(\xi) W_1(\varphi'_n) d\varphi'_n d\xi. \quad (9.6.18)$$

Принимая во внимание (9.6.6), (9.6.11) — (9.6.13), из (9.6.18) найдем следующее приближенное значение для дисперсии набега фазы:

$$\langle \gamma^2(\tau_0) \rangle = \Delta_0^2 \tau_0^2 E(s, \Delta),$$

где

$$E(s, \Delta) = (s^2 - 1 + \Delta/\Delta_0) \left[1 - \Phi\left(\frac{1 + \Delta/\Delta_0}{\sqrt{2}s}\right) - \Phi\left(\frac{1 - \Delta/\Delta_0}{\sqrt{2}s}\right) \right] + \\ + \frac{s}{2\pi} \left[(1 - \Delta/\Delta_0) e^{-\frac{(1 + \Delta/\Delta_0)^2}{2s^2}} + (1 + \Delta/\Delta_0) e^{-\frac{(1 - \Delta/\Delta_0)^2}{2s^2}} \right] - v_{\text{ост}}^2. \quad (9.6.19)$$

На основании (9.6.17), учитывая, что $\tau = n\tau_0$, получаем следующее выражение для дисперсии набега фазы за время τ :

$$\langle \gamma^2(\tau) \rangle = \frac{\langle \gamma^2(\tau_0) \rangle}{\tau_0} \tau.$$

Т а б л и ц а 2

$s \backslash \Delta/\Delta_0$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
0,05	—	—	—	—	—	—
0,07	—	—	—	—	—	$1,23 \cdot 10^{-13}$
0,1	—	—	$1 \cdot 10^{-16}$	$2,9 \cdot 10^{-13}$	$2,5 \cdot 10^{-10}$	$7,96 \cdot 10^{-8}$
0,2	—	$6,43 \cdot 10^{-7}$	$6,75 \cdot 10^{-6}$	$6,4 \cdot 10^{-5}$	$4,3 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-3}$
0,3	$6,73 \cdot 10^{-5}$	$2,67 \cdot 10^{-4}$	$1 \cdot 10^{-3}$	$3,36 \cdot 10^{-3}$	$9,0 \cdot 10^{-3}$	$2,1 \cdot 10^{-2}$
$s \backslash \Delta/\Delta_0$	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	
0,05	$1,5 \cdot 10^{-16}$	$2,18 \cdot 10^{-10}$	$5,7 \cdot 10^{-6}$	$2,85 \cdot 10^{-3}$	$3,87 \cdot 10^{-2}$	
0,07	$1,48 \cdot 10^{-10}$	$2,11 \cdot 10^{-6}$	$4,18 \cdot 10^{-4}$	$1,15 \cdot 10^{-2}$	$5,34 \cdot 10^{-2}$	
0,1	$8,7 \cdot 10^{-6}$	$3,5 \cdot 10^{-4}$	$5,17 \cdot 10^{-3}$	$3 \cdot 10^{-2}$	$7,5 \cdot 10^{-2}$	
0,2	$8,68 \cdot 10^{-3}$	$2,4 \cdot 10^{-2}$	$5,1 \cdot 10^{-2}$	0,1	0,14	
0,3	$4,2 \cdot 10^{-2}$	$7,6 \cdot 10^{-2}$	0,11	0,18	0,19	

Отсюда следует, что для фазы синхронизируемого генератора, обладающего флуктуациями параметра (такого, что $g_c(t) \neq 0$), для достаточно больших τ имеет место диффузионный закон с коэффициентом диффузии

$$D_\infty = \frac{\langle \gamma^2(\tau_0) \rangle}{\tau_0}.$$

Таким образом, форма спектральной линии синхронизованного генератора $W_x(\Omega)$, обладающего большими флуктуациями параметра, имеет при малых Ω вид резонансной кривой с шириной, равной $\Delta\Omega = \frac{\pi}{2} D_\infty$. Тем самым

$$\Delta\Omega = \frac{\pi\Delta_0}{2} \Delta_0 \tau_0 E(s, \Delta). \quad (9.6.20)$$

В табл. 2 приведены значения функции $E(s, \Delta)$, рассчитанные для некоторых конкретных значений s и Δ/Δ_0 . Из табл. 2 и (9.6.20) видно, что уширение спектральной линии становится особенно существенным при значениях начальной расстройки Δ , близких к Δ_0 (т. е. близких к границе полосы синхронизации).

Если взять значения $\omega_0/2\pi = 10^7$ гц, $\Delta_0/2\pi = 3 \cdot 10^5$ гц, $\tau_0 = \frac{1}{6\pi} 10^{-2}$ сек (это время корреляции соответствует ширине спектра флуктуации параметра, равной $2 \cdot 10^3$ гц), $s = 0,1$, то можно найти следующую относительную ширину спектральной линии генератора $\delta f = \Delta\Omega/\omega_0$ в зависимости от расстройки (табл. 3).

Т а б л и ц а 3

δf	$8,1 \cdot 10^{-16}$	$2,2 \cdot 10^{-12}$	$2 \cdot 10^{-9}$	$6 \cdot 10^{-7}$	$6,5 \cdot 10^{-5}$	$2,6 \cdot 10^{-3}$	$3,9 \cdot 10^{-2}$	0,23	0,56
Δ/Δ_0	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0

Поскольку в вышеизложенном мы не конкретизировали флуктуирующий параметр, то все полученные результаты справедливы для любого параметра, дающего вклад в $g_c(t)$. Так, если предположить, что в автогенераторе флуктуирует емкость контура, то, как мы имели ранее (см. § 6.3),

$$g_c(t) = \delta C(t) = \frac{\Delta C(t)}{\langle C \rangle}.$$

Тем самым все полученные выше результаты справедливы для флуктуаций емкости контура и при этом $s^2 = \frac{\omega_0^2}{4\Delta_0^2} \langle \delta C^2 \rangle$.

6. На основании результатов, полученных в этом и в предыдущем параграфах, можно дать следующее качественное описание характера спектра колебания генератора в зависимости от интенсивности флуктуаций параметра.

Если флуктуации параметра малы, так что справедливы линейные уравнения, то спектр колебания синхронизируемого генератора представляет собой суперпозицию монохроматического колебания на частоте сигнала синхронизации и шумового пьедестала, являющегося в этом приближении суммой спектров амплитудных и фазовых флуктуаций. Можно показать, что при увеличении интенсивности флуктуаций параметра, когда уравнения становятся существенно нелинейными, но генератор еще не выходит из полосы захвата, характер спектра колебания существенно не изменяется, оставаясь суперпозицией монохроматической линии и шумового пьедестала, который уже более сложным образом зависит от амплитудных и фазовых флуктуаций.

Когда интенсивность флуктуации параметра становится настолько большой, что возможен выход генератора из полосы синхронизации, спектр колебания качественно изменяется — уширяется спектральная линия и появляется остаточная расстройка частот генератора. Эта же картина наблюдается и при увеличении начальной расстройки.

§ 9.7. Синхронизация томсоновского автогенератора квазимонохроматическим сигналом

В предыдущих параграфах мы рассматривали поведение автогенератора с шумами, синхронизованного синусоидальным сигналом. В действительности никакой реальный сигнал не может быть строго синусоидальным, следовательно, более строгий подход к задаче о синхронизации автогенератора с шумами должен учитывать немонотонность синхронизирующего сигнала. В этом параграфе мы ограничимся случаем, когда в автогенераторе собственных шумов нет, а его флуктуации амплитуды и частоты порождаются немонотонностью синхронизирующего сигнала. Основной задачей в этом случае будет исследование фазовых флуктуаций синхронизованного сигнала в зависимости от характеристик фазовых флуктуаций синхронизирующего сигнала.

1. Рассмотрим томсоновский автогенератор, описываемый уравнением

$$\ddot{x} + \omega_1^2 x = F(x, \dot{x}).$$

Приближенное решение уравнения берем, как обычно, в виде $x = R_0 \cos \omega_0 t$, где R_0 и ω_0 находятся из уравнений

$$R_0(\omega_1^2 - \omega_0^2) = \Psi(\omega_0, R_0), \quad 0 = \Phi(\omega_0, R_0),$$

причем $|\omega_1 - \omega_0| \ll \omega_0$.

Пусть на генератор действует внешний сигнал $E(t)$:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_1^2 x = F\left(x, \frac{dx}{dt}\right) + \omega_1^2 E(t), \quad (9.7.1)$$

спектр которого сосредоточен около частоты $\omega_c = \omega_0 + \Delta$, где $\Delta \ll \omega_0$, а ширина спектра внешнего сигнала много меньше ω_c . В этом случае сигнал удобно представить в форме

$$E(t) = e_c(t) \cos \omega_c t - e_s(t) \sin \omega_c t, \quad (9.7.2)$$

где функции $e_c(t)$, $e_s(t)$ являются медленными по сравнению с $\cos \omega_c t$.

Решение уравнения (9.7.1) при сигнале (9.7.2) будем искать в виде

$$x(t) = (R_0 + \rho_t) \cos(\omega_c t + \varphi_t), \quad (9.7.3)$$

где ρ_t и φ_t являются также медленными функциями по сравнению с $\cos \omega_c t$.

Нетрудно найти уравнения для ρ_t и φ_t . Для этого необходимо подставить (9.7.3) в (9.7.1), учесть медленность ρ_t и φ_t и малость функции $F(x, \dot{x})$. Полученные уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} \rho_t \frac{\Psi(\omega_0, R_0)}{R_0} - [\Psi(\omega_0, R_0 + \rho_t) - \Psi(\omega_0, R_0)] - \\ - 2(R_0 + \rho_t)(\Delta + \dot{\varphi}_t)\omega_0 = \omega_0^2 [e_c(t) \cos \varphi_t + e_s(t) \sin \varphi_t], \\ - \Phi(\omega_0, R_0 + \rho_t) - 2\omega_0 \dot{\rho}_t = \omega_0^2 [e_c(t) \sin \varphi_t - e_s(t) \cos \varphi_t]. \end{aligned} \quad (9.7.4)$$

В том случае, когда воздействующий сигнал является строго синусоидальным, $e_c = \text{const}$, $e_s = \text{const}$ и из (9.7.4) можно получить уравнения

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{\Psi(\omega_0, R_0)}{R_0} - [\Psi(\omega_0, R_0 + \rho_0) - \Psi(\omega_0, R_0)] - \\ - 2\omega_0 \Delta (R_0 + \rho_0) = \omega_0^2 (e_c \cos \varphi_0 + e_s \sin \varphi_0), \\ - \Phi(\omega_0, R_0 + \rho_0) = \omega_0^2 (e_c \sin \varphi_0 - e_s \cos \varphi_0), \end{aligned}$$

определяющие параметры ρ_0 и φ_0 синхронизованного колебания генератора $(R_0 + \rho_0) \cos(\omega_c t + \varphi_0)$.

Если же e_c и e_s не постоянны, а представляют собой случайные функции времени, то (9.7.4) определяют случайную амплитудную ρ_t и фазовую φ_t модуляцию синхронизованного (не монохроматическим сигналом) колебания генератора (9.7.3).

Если при определении сигнала $E(t)$ ограничиться указанием лишь о форме его спектра, то это не определит однозначно статистические характеристики $e_c(t)$ и $e_s(t)$. В самом деле, один и тот же узкополосный спектр, сосредоточенный около ω_c , может иметь и белый шум, прошедший через узкополосный фильтр, и квазимонохроматический сигнал

$$E(t) = E_0 \cos(\omega_c t + \psi_t), \quad (9.7.5)$$

имеющий постоянную амплитуду и определенные фазовые флуктуации. И тот, и другой сигналы могут быть представлены в виде (9.7.2), но статистические характеристики $e_c(t)$ и $e_s(t)$ будут для обоих сигналов существенно различными. Здесь мы рассмотрим задачу о синхронизации генератора сигналом (9.7.5), который может представлять (пренебрегая амплитудными флуктуациями) реальное автоколебание какого-то другого генератора.

Итак, пусть сигнал, действующий на генератор, имеет вид (9.7.5), где ψ_t — заданные флуктуации фазы. Сравнивая (9.7.2) с (9.7.5), можно видеть, что

$$e_c(t) = E_0 \cos \psi_t, \quad e_s(t) = E_0 \sin \psi_t. \quad (9.7.6)$$

Подставляя эти значения в правые части уравнений (9.7.4), найдем, что

$$e_c(t) \cos \varphi_t + e_s(t) \sin \varphi_t = E_0 \cos(\varphi_t - \psi_t),$$

$$e_c(t) \sin \varphi_t - e_s(t) \cos \varphi_t = E_0 \sin(\varphi_t - \psi_t).$$

Вводя обозначения

$$H(\rho_t) = \rho_t \frac{\Psi(\omega_0, R_0)}{R_0} - \Psi(\omega_0, R_0 + \rho_t) + \Psi(\omega_0, R_0) - 2\omega_0 \Delta(R_0 + \rho_t),$$

$$B(\rho_t) = -\Phi(\omega_0, R_0 + \rho_t), \quad (9.7.7)$$

$$C(\rho_t) = -2\omega_0(R_0 + \rho_t).$$

Запишем уравнения (9.7.4) в виде

$$\begin{aligned} C(\rho_t) \dot{\varphi}_t + H(\rho_t) &= \omega_0^2 E_0 \cos(\varphi_t - \psi_t), \\ -2\omega_0 \dot{\rho}_t + B(\rho_t) &= \omega_0^2 E_0 \sin(\varphi_t - \psi_t). \end{aligned} \quad (9.7.8)$$

Эти уравнения определяют ρ_t и φ_t по заданной функции ψ_t , и являются в общем случае весьма сложными.

Рассмотрим сначала случай очень медленных флуктуаций ψ_t , таких, что зависящие от ψ_t функции ρ_t и φ_t являются в свою

очередь настолько медленными, что их производными в уравнениях (9.7.8) можно пренебречь, т. е.

$$|C(\rho_t) \dot{\varphi}_t| \ll |H(\rho_t)|, \quad |2\omega_0 \dot{\rho}_t| \ll |B(\rho_t)|.$$

В этом случае (9.7.8) перейдут в уравнения

$$H(\rho_t) = \omega_0^2 E_0 \cos(\varphi_t - \psi_t), \quad B(\rho_t) = \omega_0^2 E_0 \sin(\varphi_t - \psi_t), \quad (9.7.9)$$

дающие значения квазистатистических ρ_t и φ_t и связь их с ψ_t . Из (9.7.9) легко получить, что

$$H^2(\rho_t) + B^2(\rho_t) = E_0^2, \quad (9.7.10)$$

$$\varphi_t = \psi_t + \operatorname{arctg} [B(\rho_t)/H(\rho_t)]. \quad (9.7.11)$$

В уравнение (9.7.10) функция ψ_t не входит; следовательно, оно имеет решение

$$\rho_t = \rho_0 = \text{const.}$$

Соответственно этому из (9.7.11) имеем

$$\varphi_t = \psi_t + \psi_0, \quad \psi_0 = \operatorname{arctg} [B(\rho_0)/H(\rho_0)]. \quad (9.7.12)$$

Нетрудно убедиться, что (9.7.10) есть обычное уравнение для амплитуды (вернее для приращения амплитуды над R_0) синхронизованного колебания в зависимости от амплитуды внешнего сигнала E_0 и расстройки Δ . Будем полагать, что его решение ρ_0 существует и является устойчивым.

Уравнение (9.7.12) позволяет говорить в свою очередь о том, что в условиях квазистатистического воздействия фаза синхронизованного колебания с точностью до постоянного слагаемого совпадает с фазой синхронизирующего колебания. Вследствие этого флуктуации фазы φ_t совпадают с флуктуациями фазы ψ_t . Это при $\rho_0 = \text{const}$, т. е. при отсутствии амплитудных флуктуаций у $x(t)$, приводит к тому, что форма и ширина спектральной линии синхронизованного колебания полностью совпадает с формой и шириной линии синхронизирующего сигнала.

2. Рассмотрим теперь случай более быстрых флуктуаций ψ_t . В этом случае решения уравнения (9.7.8) можно искать в виде ряда по производным от ψ_t :

$$\varphi_t = \psi_0 + \psi_t + a_1 \dot{\psi}_t + a_2 \ddot{\psi}_t + a_3 \dddot{\psi}_t + \dots,$$

$$\rho_t = \rho_0 + b_1 \dot{\psi}_t + b_2 \ddot{\psi}_t + b_3 \dddot{\psi}_t + \dots$$

Ограничиваясь для простоты поправками на первую производную ψ_t , можно с помощью Приложения VII отыскать a_1 и b_1 :

$$a_1 = - \frac{C(\rho_0) [\partial B(\rho)/\partial \rho] \rho_0}{H(\rho_0) [\partial H(\rho)/\partial \rho]_{\rho_0} + B(\rho_0) [\partial B(\rho)/\partial \rho]_{\rho_0}},$$

$$b_1 = - \frac{C(\rho_0) H(\rho_0)}{H(\rho_0) [\partial H(\rho)/\partial \rho]_{\rho_0} + B(\rho_0) [\partial B(\rho)/\partial \rho]_{\rho_0}}.$$

Тем самым приближенное решение уравнения (9.7.8) равно

$$\varphi_t = \psi_0 + \psi_t + a\dot{\psi}_t, \quad \rho_t = \rho_0 + b_1\dot{\psi}_t. \quad (9.7.13)$$

Таким образом, имеем при синхронизирующем сигнале

$$E(t) = E_0 \cos(\omega_c t + \psi_t)$$

синхронизованное колебание

$$x(t) = (R_0 + \rho_0 + b_1\dot{\psi}_t) \cos(\omega_c t + \psi_0 + \psi_t + a_1\dot{\psi}_t). \quad (9.7.14)$$

Соотношение (9.7.14) выражает искомые фазовые флуктуации синхронизованного колебания через фазовые флуктуации внешнего сигнала $E(t)$. Однако в этом случае можно пойти далее и рассмотреть форму спектральной линии синхронизованного колебания. Для этого рассмотрим подробнее (9.7.5). Флуктуации фазы ψ_t представим в виде

$$\psi_t = \int_0^t v_c(\xi) d\xi, \quad \dot{\psi}_t = v_c(t),$$

где $v_c(t)$ — заданные флуктуации частоты синхронизирующего сигнала, которые предположим стационарными и нормально распределенными (причем $\langle v_c \rangle = 0$). В этом случае (9.7.5) и (9.7.14) примут вид

$$\begin{aligned} E(t) &= E_0 \cos\left(\omega_c t + \int_0^t v_c(\xi) d\xi\right), \\ x(t) &= (R_0 + \rho_0) [1 + n v_c(t)] \cos\left[\omega_c t + \psi_0 + \int_0^t v_c(\xi) d\xi + a_1 v_c(t)\right], \\ n &= b_1 / (R_0 + \rho_0). \end{aligned} \quad (9.7.15)$$

С помощью результатов § 4.6 можно теперь найти форму спектральной линии для $E(t)$ и $x(t)$.

Согласно (4.6.6) и (4.6.7) для нахождения формы спектральной линии колебания, обладающего нормально распределенными флуктуациями амплитуды и частоты, необходимо знать

$$\Phi_\alpha(\tau), \Phi_\alpha^0(\tau), \Phi_\alpha^1(\tau), \chi(\tau).$$

Для синхронизирующего сигнала $E(t)$ нетрудно получить

$$\Phi_\alpha(\tau) \equiv \Phi_\alpha^0(\tau) \equiv \Phi_\alpha^1(\tau) \equiv 0, \quad \chi(\tau) = \int_0^\tau (\tau - \xi) \Phi_{v_c}(\xi) d\xi. \quad (9.7.16)$$

Для синхронизованного колебания $x(t)$ можно найти (для $\tau > 0$):

$$\begin{aligned}\Phi_\alpha(\tau) &= n^2 \Phi_{v_c}(\tau), \\ \Phi_{\alpha \Delta\varphi}^0(\tau) &= -na_1 [\Phi_{v_c}(0) - \Phi_{v_c}(\tau)],\end{aligned}\quad (9.7.17)$$

$$\Phi_{\alpha \Delta\varphi}^1(\tau) = n \int_0^\tau \Phi_{v_c}(\xi) d\xi,$$

$$\chi(\tau) = \int_0^\tau (\tau - \xi) \Phi_{v_c}(\xi) d\xi + a_1^2 [\Phi_{v_c}(0) - \Phi_{v_c}(\tau)]. \quad (9.7.18)$$

где $\Phi_{v_c}(\tau)$ — функция корреляции флуктуаций частоты синхронизирующего колебания.

Сравним теперь форму спектральной линии $W_x(\Omega)$ синхронизованного колебания с формой линии $W_E(\Omega)$ синхронизирующего сигнала. На основании (9.7.16) — (9.7.18) нетрудно видеть следующее. При симметричной $W_E(\Omega)$ форма линии $W_x(\Omega)$ в общем случае несимметрична. Это можно видеть из того, что в то время как для $E(t)$, согласно (4.6.7), $A^1(\tau) \equiv 0$, и, следовательно, нечетное слагаемое $W_E^1(\Omega) \equiv 0$, для $x(t)$ $A^1(\tau) \neq 0$ и $W_x^1 \neq 0$. Физически эта несимметрия $W_x(\Omega)$ связана с существованием корреляции между флуктуациями амплитуды и частоты для синхронизованного колебания (9.7.15).

Симметричная часть $W_x(\Omega)$ отличается от $W_E(\Omega)$. Это легко понять из различия $A^0(\tau)$ и $\chi(\tau)$ для $x(t)$ и для $E(t)$. Наиболее существенное влияние на это отличие оказывает, по-видимому, второе слагаемое в формуле (9.7.18), в то время как функции $\Phi_\alpha(\tau)$, $\Phi_{\alpha \Delta\varphi}(\tau)$ оказывают меньшее влияние. Это связано с тем, что пик спектральной линии колебания определяется главным образом флуктуациями частоты, а не амплитуды.

Таким образом, при очень медленных квазистатистических флуктуациях фазы внешнего сигнала формы линии сигналов $E(t)$ и $x(t)$ совпадают. При более быстрых флуктуациях фазы появляется существенное отличие формы линии колебания $x(t)$ от формы линии внешнего сигнала $E(t)$; так, например, появляется несимметрия.

3. Возьмем теперь в качестве примера частный случай изохронного генератора. Пусть в уравнении (9.7.1)

$$F(x, \dot{x}) = p\dot{x} - l(\dot{x})^3.$$

Этой нелинейной функции, как нетрудно проверить, соответствуют

$$\Psi(\omega, R) \equiv 0, \quad \Phi(\omega, R) = -\omega p R + \frac{3}{4} l \omega^3 R^3.$$

Стационарная частота и амплитуда автоколебаний генератора равны

$$\omega_0 = \omega_1, \quad R_0^2 = 4p/3l\omega_0^2.$$

Формулы (9.7.7) приводят к

$$H(\rho_t) = -2\omega_0 \Delta R_0 (1 + \rho_t/R_0),$$

$$B(\rho_t) = -p\omega_0 R_0 [2\rho_t/R_0 + 3(\rho_t/R_0)^2 + (\rho_t/R_0)^3],$$

$$C(\rho_t) = -2\omega_0 R_0 [1 + \rho_t/R_0].$$

При этом уравнения (9.7.8) остаются все еще достаточно сложными. Ограничимся случаем нулевой расстройки $\Delta=0$ (работа генератора в центре полосы синхронизации) и малого приращения амплитуды $\rho_t \ll R_0$. Последнее всегда будет иметь место при достаточно слабом внешнем сигнале $E(t)$. Тогда

$$H(\rho_t) \equiv 0, \quad B(\rho_t) = -2p\omega_0 \rho_t, \quad C(\rho_t) = -2\omega_0 R_0$$

и уравнения (9.7.8) примут вид

$$\dot{\varphi}_t = \omega_0 k \cos(\varphi_t - \psi_t), \quad \dot{\alpha} + p\alpha = \omega_0 k \sin(\varphi_t - \psi_t), \quad (9.7.19)$$

где $\alpha = \rho_t/R_0$, $k = -E_0/2R_0$. Из (9.7.19) нетрудно найти необходимое условие малости внешнего сигнала:

$$|k| \ll \frac{p}{\omega_0} \ll 1. \quad (9.7.20)$$

Напомним, что величина p есть прочность предельного цикла автогенератора.

4. Условие (9.7.20) наводит на мысль искать решение уравнений (9.7.19) в виде ряда по степеням k . Поскольку форма линии колебания генератора определяется в основном фазовыми флуктуациями, то мы пренебрежем здесь в синхронизованном колебании амплитудными флуктуациями $\alpha(t)$ и будем исследовать только первое уравнение (9.7.19), определяющее фазовые флуктуации. Будем искать решение этого уравнения в виде ряда

$$\varphi_t = \varphi_0 + k\varphi_{1t} + k^2\varphi_{2t} + \dots \quad (9.7.21)$$

Подставляя этот ряд в первое уравнение (9.7.19) и приравнявая члены при одинаковых степенях k , можно получить

$$\dot{\varphi}_0 = 0,$$

$$\dot{\varphi}_{1t} = \omega_0 \cos(\varphi_0 - \psi_t),$$

$$\dot{\varphi}_{2t} = -\omega_0 \varphi_{1t} \sin(\varphi_0 - \psi_t),$$

$$\dots \dots \dots$$

откуда имеем

$$\begin{aligned}\varphi_0 &= \text{const}, \\ \varphi_{1t} &= \omega_0 \int_0^t \cos(\varphi_0 - \psi_t) dt, \\ \varphi_{2t} &= -\omega_0 \int_0^t \varphi_{1t} \sin(\varphi_0 - \psi_t) dt, \\ &\dots\end{aligned}\tag{9.7.22}$$

Тем самым для фазовых флуктуаций φ_t имеем ряд

$$\begin{aligned}\varphi_t &= \varphi_0 + \omega_0 k \int_0^t \cos(\varphi_0 - \psi_x) dx - \\ &- \omega_0^2 k^2 \int_0^t \sin(\varphi_0 - \psi_x) \int_0^x \cos(\varphi_0 - \psi_y) dy dx + \dots\end{aligned}\tag{9.7.23}$$

Будем также считать начальное значение φ_0 случайной величиной, равномерно распределенной в интервале $(0, 2\pi)$.

С помощью (9.7.22) можно оценить условие сходимости (9.7.23). Если ввести в рассмотрение Π_ψ — ширину спектра флуктуаций фазы ψ_t , то после несложных вычислений можно получить, что последующий член в (9.7.23) будет много меньше (по модулю) предыдущего, если

$$|k| \ll \frac{\Pi_\psi}{\omega_0}.\tag{9.7.24}$$

Объединяя (9.7.20) и (9.7.24), получаем общее условие, накладываемое на k :

$$|k| \ll \min \left\{ \frac{p}{\omega_0}, \frac{\Pi_\psi}{\omega_0} \right\},$$

для ряда (9.7.23) вообще и для ограничения первым приближением (первые два члена ряда) в частности.

Оценим величину Π_ψ . По своему смыслу $\Pi_\psi^{-1} = \tau_0$, где τ_0 — время, в течение которого ψ_t меняется еще достаточно мало (по сравнению с единицей). Определим τ_0 соотношением

$$\langle \Delta \psi_{\tau_0}^2 \rangle = \langle (\psi_{t+\tau_0} - \psi_t)^2 \rangle = \frac{1}{10}.\tag{9.7.25}$$

С другой стороны, $\langle \Delta \psi_\tau^2 \rangle$ определяет $\Delta \Omega$ — ширину спектральной линии синхронизирующего колебания. Согласно (4.5.3)

$$\Delta \Omega = \frac{\pi}{\int_0^\infty e^{-1/2 \langle \Delta \psi_\tau^2 \rangle} d\tau}. \quad (9.7.26)$$

Нетрудно найти связь между Π_ψ и $\Delta \Omega$. Пусть, например, $\langle \Delta \psi_\tau^2 \rangle = D\tau$. Тогда на основании (9.7.25) имеем $\tau_0 = (10D)^{-1}$, а на основании (9.7.26) — $\Delta \Omega = \pi D/2$. В этом случае

$$\Pi_\psi = \frac{20}{\pi} \Delta \Omega.$$

Пусть теперь $\langle \Delta \psi_\tau^2 \rangle = Q\tau^2$. Аналогично будем иметь $\tau_0 = (10Q)^{-1/2}$, $\Delta \Omega = (2\pi Q)^{1/2}$ и

$$\Pi_\psi = \left(\frac{10}{2\pi} \right)^{1/2} \Delta \Omega.$$

Поскольку для любого реального генератора $\langle \Delta \psi_\tau^2 \rangle$ лежит между двумя рассмотренными значениями $\langle \Delta \psi_\tau^2 \rangle$, то можно в общем случае утверждать, что

$$\Pi_\psi = n \Delta \Omega,$$

где

$$\left(\frac{10}{2\pi} \right)^{1/2} \leq n \leq \frac{20}{\pi}.$$

Таким образом, Π_ψ по порядку величины близка к ширине спектральной линии синхронизирующего генератора.

5. Ограничимся далее подробным рассмотрением лишь первого приближения:

$$\varphi_t = \varphi_0 + \omega_0 k \int_0^t \cos(\varphi_0 - \psi_x) dx, \quad (9.7.27)$$

выражающего фазовые флуктуации синхронизованного колебания φ_t через фазовые флуктуации синхронизирующего сигнала ψ_t . Найдем некоторые характеристики φ_t . Рассмотрим приращение $\Delta \varphi_\tau = \varphi_{t+\tau} - \varphi_t$, которое играет основную роль в размытии спектральной линии колебания:

$$\begin{aligned} \Delta \varphi_t &= \omega_0 k \int_0^{t+\tau} \cos(\varphi_0 - \psi_x) dx = \\ &= \omega_0 k \cos \varphi_0 \int_0^t \cos \psi_x dx + \omega_0 k \sin \varphi_0 \int_0^t \sin \psi_x dx. \end{aligned} \quad (9.7.28)$$

Нетрудно видеть из (9.7.28), что $\langle \Delta \varphi_t \rangle = 0$, поскольку φ_0 и ψ_t независимы и φ_0 имеет равномерное распределение. Интенсивность приращения флуктуаций фазы равна

$$\chi(t) = \frac{\omega_0^2 k^2}{4} \int_0^t \int_0^t (\langle \cos \psi_x \cos \psi_y \rangle + \langle \sin \psi_x \sin \psi_y \rangle) dx dy.$$

Предполагая флуктуации фазы синхронизирующего сигнала нормально распределенными, с учетом формул (VI.8) после простых преобразований получаем

$$\chi(t) = \frac{\omega_0^2 k^2}{4} \int_0^t \int_0^t \exp \left[-\frac{1}{2} (\langle \psi_x^2 \rangle + \langle \psi_y^2 \rangle - 2 \langle \psi_x \psi_y \rangle) \right] dx dy. \quad (9.7.29)$$

Предположим теперь, что флуктуации фазы ψ_t порождаются дельта-коррелированными флуктуациями частоты (синхронизирующее колебание имеет «естественную» форму линии):

$$\psi_t = \int_0^t \nu_c(t) dt, \quad \Phi_{\nu_c}(\tau) = D \delta(\tau). \quad (9.7.30)$$

В этом случае

$$\langle \psi_t^2 \rangle = D |t|, \quad \langle \psi_x \psi_y \rangle = D \min \left\{ \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \right\}. \quad (9.7.31)$$

Подставляя (9.7.31) в (9.7.29), имеем окончательно (для $\tau > 0$)

$$\chi(\tau) = \frac{2\omega_0^2 k^2}{D^2} \left[\frac{D}{2} \tau - 1 + e^{-\frac{D}{2} \tau} \right]. \quad (9.7.32)$$

Если предположить, что флуктуации частоты ν_c синхронизирующего сигнала являются очень медленными (синхронизирующее колебание имеет «техническую» форму линии):

$$\Phi_{\nu_c}(\tau) = Q, \quad (9.7.33)$$

то, как нетрудно убедиться,

$$\langle \psi_t^2 \rangle = Qt^2, \quad \langle \psi_x \psi_y \rangle = Qxy. \quad (9.7.34)$$

Для этого случая из (9.7.29) получаем

$$\chi(\tau) = \frac{\omega_0^2 k^2}{4} \left[\sqrt{\frac{2\pi}{Q}} \tau \cdot F \left(\sqrt{\frac{Q}{2}} \tau \right) - \frac{2}{Q} + \frac{2}{Q} e^{-\frac{Q}{2} \tau^2} \right], \quad (9.7.35)$$

где

$$F(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

Сравнивая (9.7.32) и (9.7.35), можно обнаружить в этих формулах много общего. При достаточно малых τ

$$\chi(\tau) = \frac{\omega_0^2 k^2}{4} \tau^2$$

для обеих формул. При достаточно больших τ для (9.7.32) и (9.7.35) имеем соответственно

$$\chi(\tau) = \frac{\omega_0^2 k^2}{D} \tau,$$

$$\chi(\tau) = \frac{\omega_0^2 k^2 \sqrt{2\pi}}{4 \sqrt{Q}} \tau.$$

Подобное поведение, а именно пропорциональность τ^2 для малых τ и пропорциональность τ для больших τ , характерно для интенсивности приращения флуктуаций фазы всех *реальных* генераторов. Оно также дает основание предполагать, что в общем случае форма спектральной линии синхронизованного генератора слабо зависит от формы линии синхронизирующего генератора.

6. Найдем, наконец, в первом приближении функцию корреляции флуктуаций частоты синхронизованного генератора. Дифференцируя (9.7.27), нетрудно видеть, что

$$v(t) = \omega_0 k \cos(\varphi_0 - \psi_t).$$

Отсюда простыми вычислениями получаем

$$\Phi_v(\tau) = \frac{1}{2} \omega_0^2 k^2 \langle \cos \Delta\psi_\tau \rangle.$$

Поскольку, по предположению, ψ_t нормально, то

$$\Phi_v(\tau) = \frac{1}{2} \omega_0^2 k^2 \exp \left\{ -\frac{1}{2} \langle \Delta\psi_\tau^2 \rangle \right\}.$$

Для «естественных» и «технических» флуктуаций частоты синхронизирующего генератора получаем соответственно (см. (9.7.31) и (9.7.34)) для $\tau > 0$

$$\Phi_v(\tau) = \frac{1}{2} \omega_0^2 k^2 e^{-\frac{D}{2} \tau}, \quad (9.7.36)$$

$$\Phi_v(\tau) = \frac{1}{2} \omega_0^2 k^2 e^{-\frac{Q}{2} \tau}. \quad (9.7.37)$$

Таким образом, в то время как функции корреляции флуктуаций частоты синхронизирующего колебания изменяются очень сильно (от дельта-функции (9.7.30) до постоянной (9.7.33)),

функции корреляции флуктуаций частоты синхронизованного колебания (9.7.36), (9.7.37) изменяются не столь существенно, оправдывая вышесказанное предположение.

Отметим наконец, что, используя ряды (9.7.21), (9.7.23) и малость их последующих членов, мы фактически ограничили себя условием $\chi(\tau) \ll 1$. С учетом этого и должны рассматриваться полученные формулы.

§ 9.8. Влияние естественных шумов автогенераторов на их взаимную синхронизацию

В § 9.7 была рассмотрена задача синхронизации генератора квазимонохроматическим сигналом, причем генератор полагался бесшумным. Если генератор обладает шумами, то его синхронизация квазимонохроматическим сигналом фактически эквивалентна его синхронизации другим автогенератором, также обладающим шумами.

Представляет интерес поставить еще более общую задачу и рассмотреть поведение генераторов с шумами при их взаимной синхронизации. Решение этой задачи позволит решить также вопрос о ширине спектральной линии взаимно синхронизованных автогенераторов.

1. Рассмотрим два изохронных автогенератора, описываемых в свободном состоянии следующими уравнениями:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_{1x}^2 x = F_x(x, \dot{x}), \quad \frac{d^2y}{dt^2} + \omega_{1y}^2 y = F_y(y, \dot{y}).$$

Свободные автоколебания равны

$$x = R_{0x} \cos \omega_{1x} t, \quad y = R_{0y} \cos \omega_{1y} t.$$

Амплитуды автоколебаний находятся из уравнений

$$\Phi_x(\omega_{1x}, R_{0x}) = 0, \quad \Phi_y(\omega_{1y}, R_{0y}) = 0.$$

Пусть теперь эти генераторы обладают шумами, представленными функциями $E_1(t)$ и $E_2(t)$ и взаимно связаны. Предположим, что в этих взаимно связанных генераторах существует устойчивый одночастотный режим автоколебаний, обладающих медленно меняющимися фазами и амплитудами:

$$\begin{aligned} x &= R_x \cos(\omega_0 t + \varphi'_x), & \dot{x} &= -\omega_0 R_x \sin(\omega_0 t + \varphi'_x), \\ y &= R_y \cos(\omega_0 t + \varphi'_y), & \dot{y} &= -\omega_0 R_y \sin(\omega_0 t + \varphi'_y), \end{aligned}$$

где ω_0 — частота синхронизованных колебаний. Поскольку генераторы обладают разными парциальными частотами ω_{1x} , ω_{1y} , то существуют две расстройки

$$\Delta_x = \omega_0 - \omega_{1x}, \quad \Delta_y = \omega_0 - \omega_{1y}. \quad (9.8.1)$$

Предположим, что $\Delta_x, \Delta_y, |\omega_{1x} - \omega_{1y}|$ много меньше $\omega_0, \omega_{1x}, \omega_{1y}$. Уравнения системы запишем в виде

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x &= 2 \Delta_x \omega_0 x + F_x(x, \dot{x}) - \lambda_1 \frac{d^2 y}{dt^2} + \omega_0^2 E_1(t), \\ \frac{d^2 y}{dt^2} + \omega_0^2 y &= 2 \Delta_y \omega_0 y + F_y(y, \dot{y}) - \lambda_2 \frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 E_2(t). \end{aligned} \quad (9.8.2)$$

Здесь λ_1, λ_2 — коэффициенты связи между генераторами. Значения λ_1, λ_2 и их знаки определяются физическими условиями взаимосвязи. Они могут быть разными или равными (при симметричной связи обоих генераторов). Если канал взаимосвязи между генераторами один и тот же, то λ_1 и λ_2 обладают одинаковыми знаками. Если сигнал первого генератора попадает в контур второго генератора одним путем, а сигнал второго генератора в первый — другим, то λ_1 и λ_2 могут иметь в общем случае разные знаки. Будем полагать, что связи между генераторами достаточно малы, так что

$$|\lambda_1| \ll 1, \quad |\lambda_2| \ll 1.$$

Применяя к уравнениям (9.8.2) метод усреднения (см. § 5.2), нетрудно получить для $R_x, R_y, \varphi'_x, \varphi'_y$ соответствующие усредненные уравнения. Представляя $R_x = R_{0x}(1 + \alpha'_x)$, $R_y = R_{0y}(1 + \alpha'_y)$, где вследствие слабой взаимосвязи генераторов полагаем $|\alpha'_x| \ll 1, |\alpha'_y| \ll 1$ для $\alpha'_x, \alpha'_y, \varphi'_x, \varphi'_y$ можно найти следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha'_x}{dt} &= -p_x \alpha'_x - \omega_0 \varepsilon_1 (1 + \alpha'_y) \sin(\varphi'_x - \varphi'_y) + \frac{\omega_0}{2R_{0x}} E_{\perp 1}(t), \\ \frac{d\alpha'_y}{dt} &= -p_y \alpha'_y + \omega_0 \varepsilon_2 (1 + \alpha'_x) \sin(\varphi'_x - \varphi'_y) + \frac{\omega_0}{2R_{0y}} E_{\perp 2}(t), \\ \frac{d\varphi'_x}{dt} &= -\Delta_x + \omega_0 \varepsilon_1 \frac{1 + \alpha'_y}{1 + \alpha'_x} \cos(\varphi'_x - \varphi'_y) - \frac{\omega_0}{2R_{0x}} E_{\parallel 1}(t), \\ \frac{d\varphi'_y}{dt} &= -\Delta_y - \omega_0 \varepsilon_2 \frac{1 + \alpha'_x}{1 + \alpha'_y} \cos(\varphi'_x - \varphi'_y) - \frac{\omega_0}{2R_{0y}} E_{\parallel 2}(t). \end{aligned} \quad (9.8.3)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\varepsilon_1 = \frac{\lambda_1 R_{0y}}{2R_{0x}}, \quad \varepsilon_2 = \frac{\lambda_2 R_{0x}}{2R_{0y}}, \quad |\varepsilon_1| \ll 1, \quad |\varepsilon_2| \ll 1.$$

$$\begin{aligned} E_{\parallel 1}(t) &= e_{\parallel 1} \cos \varphi'_x + e_{\perp 1} \sin \varphi'_x, & E_{\perp 1}(t) &= e_{\perp 1} \cos \varphi'_x - e_{\parallel 1} \sin \varphi'_x, \\ E_{\parallel 2}(t) &= e_{\parallel 2} \cos \varphi'_y + e_{\perp 2} \sin \varphi'_y, & E_{\perp 2}(t) &= e_{\perp 2} \cos \varphi'_y - e_{\parallel 2} \sin \varphi'_y, \end{aligned} \quad (9.8.4)$$

где $e_{\parallel 1}$, $e_{\perp 1}$, $e_{\parallel 2}$, $e_{\perp 2}$ выражаются через $E_1(t)$, $E_2(t)$, как и ранее, p_x , p_y — прочностные предельных циклов.

Если шумы в автогенераторах отсутствуют, то детерминированные значения фаз и амплитуд взаимно синхронизованных генераторов α_{0x} , α_{0y} , φ_{0x} , φ_{0y} определяются, согласно (9.8.3), следующими уравнениями:

$$\begin{aligned}\frac{d\alpha_{0x}}{dt} &= -p_x \alpha_{0x} - \omega_0 \varepsilon_1 (1 + \alpha_{0y}) \sin \Phi, \\ \frac{d\alpha_{0y}}{dt} &= -p_y \alpha_{0y} + \omega_0 \varepsilon_2 (1 + \alpha_{0x}) \sin \Phi, \\ \frac{d\varphi_{0x}}{dt} &= -\Delta_x - \omega_0 \varepsilon_1 \frac{1 + \alpha_{0y}}{1 + \alpha_{0x}} \cos \Phi, \\ \frac{d\varphi_{0y}}{dt} &= -\Delta_y - \omega_0 \varepsilon_2 \frac{1 + \alpha_{0x}}{1 + \alpha_{0y}} \cos \Phi,\end{aligned}\tag{9.8.5}$$

где $\Phi = \varphi_{0x} - \varphi_{0y}$.

Уравнения (9.8.5) являются в общем случае достаточно сложными. Ограничиваясь такой слабой взаимной синхронизацией, что $\omega_0 |\varepsilon_1| \ll p_x$, $\omega_0 |\varepsilon_2| \ll p_y$, можно для анализа этих уравнений применить метод Р. В. Хохлова (см. [90, 91]). Согласно этому методу в первых двух уравнениях вследствие медленности изменения α_{0x} и α_{0y} можно пренебречь производными. Тогда получим (учитывая малость α_{0x} , α_{0y}):

$$\alpha_{0x} = -\frac{\omega_0 \varepsilon_1}{p_x} \sin \Phi, \quad \alpha_{0y} = \frac{\omega_0 \varepsilon_2}{p_y} \sin \Phi.\tag{9.8.6}$$

Подставляя эти значения во вторую пару уравнений, будем иметь

$$\begin{aligned}\frac{d\varphi_{0x}}{dt} &= -\Delta_x - \omega_0 \varepsilon_1 \cos \Phi - \omega_0^2 \varepsilon_1 \left(\frac{\varepsilon_2}{p_y} + \frac{\varepsilon_1}{p_x} \right) \sin 2\Phi, \\ \frac{d\varphi_{0y}}{dt} &= -\Delta_y - \omega_0 \varepsilon_2 \cos \Phi + \omega_0^2 \varepsilon_2 \left(\frac{\varepsilon_2}{p_y} + \frac{\varepsilon_1}{p_x} \right) \sin 2\Phi,\end{aligned}$$

откуда для Φ получаем уравнение

$$\frac{d\Phi}{dt} = -(\omega_{1y} - \omega_{1x}) + \omega_0 (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \cos \Phi - \omega_0^2 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \left(\frac{\varepsilon_1}{p_x} + \frac{\varepsilon_2}{p_y} \right) \sin 2\Phi.\tag{9.8.7}$$

Если при выводе (9.8.6) мы в правых частях первых двух уравнений пренебрегали α_{0x} и α_{0y} по сравнению с единицей, то при получении (9.8.7) эти приращения амплитуд учитывались. Причиной этому является то, что полученное вследствие этого учета последнее слагаемое в (9.8.7) при определенных условиях

необходимо принимать во внимание. Если $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$ и $|\varepsilon_2 - \varepsilon_1| \gg \gg \omega_0(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \left(\frac{\varepsilon_1}{p_x} + \frac{\varepsilon_2}{p_y} \right)$, то последнее слагаемое в (9.8.7) имеет высший порядок малости и его можно не учитывать (в соответствии с этим пренебрегать α_{0x} и α_{0y} в последних уравнениях системы (9.8.5)). Если же $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, то учет последнего члена необходим. Первый случай соответствует несимметричности взаимной синхронизации: например, при $\lambda_1 = \lambda_2$ мощности генераторов различны, или при равных мощностях различны коэффициенты связи λ_1 и λ_2 . Второй случай соответствует симметричной взаимной синхронизации. В этом случае в системе при изменении параметров генераторов наблюдаются скачки синхронной частоты ω_0 и амплитуд α_{0x} и α_{0y} . Для простоты рассмотрения мы ограничимся первым случаем, причем мощности генераторов и прочности предельных циклов будем считать одинаковыми ($p_x = p_y = p$, $R_{0x} = R_{0y} = R_0$), а коэффициенты связи различными.

Поскольку теперь $\varepsilon_1 = \lambda_1/2$, $\varepsilon_2 = \lambda_2/2$, то полагаем, что коэффициенты связи подчиняются неравенству

$$|\lambda_2 - \lambda_1| \gg \frac{\omega_0}{2p} (\lambda_1 + \lambda_2)^2. \quad (9.8.8)$$

В этом случае в правых частях (9.8.3) и (9.8.5) можно пренебречь α'_x , α'_y , α_{0x} , α_{0y} по сравнению с единицей.

Детерминированные значения амплитуд и фаз подчиняются теперь уравнениям:

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha_{0x}}{dt} &= -p\bar{\alpha}_{0x} - \omega_0\varepsilon_1 \sin \Phi, \\ \frac{d\alpha_{0y}}{dt} &= -p\alpha_{0y} + \omega_0\varepsilon_2 \sin \Phi, \\ \frac{d\Phi}{dt} &= \omega_{1x} - \omega_{1y} - \omega_0(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \cos \Phi. \end{aligned} \quad (9.8.9)$$

Согласно принятым предположениям α_{0x} , α_{0y} выражаются через Φ (см. (9.8.6)), поэтому устойчивость приращений амплитуды сводится к устойчивости разности фаз Φ .

Из последнего уравнения системы (9.8.9) легко видеть, что устойчивые значения стационарной разности фаз могут существовать лишь при $|\omega_{1x} - \omega_{1y}| < \omega_0|\varepsilon_1 - \varepsilon_2|$, а область их значений зависит от знака $\varepsilon_1 - \varepsilon_2$. При $\varepsilon_1 - \varepsilon_2 > 0$, $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ стационарные значения фаз расположены в пределах $-\pi < \Phi < 0$. При этом, согласно (9.8.6), $\alpha_{0x} > 0$, $\alpha_{0y} < 0$. Это значит, что первый генератор захватывается вторым. Если $\varepsilon_1 - \varepsilon_2 < 0$, $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$, то $0 < \Phi < \pi$ и захватывающим генератором является первый. Эти

обстоятельства, с другой стороны, можно получить, анализируя расстройки и частоту автоколебания.

Установившиеся значения α_{0x} , α_{0y} , Φ подчиняются уравнениям:

$$\begin{aligned} p\alpha_{0x} &= -\omega_0 \varepsilon_1 \sin \Phi, \\ p\alpha_{0y} &= \omega_0 \varepsilon_2 \sin \Phi, \\ \Delta_x &= -\omega_0 \varepsilon_1 \cos \Phi, \\ \Delta_y &= -\omega_0 \varepsilon_2 \cos \Phi. \end{aligned} \quad (9.8.10)$$

Учитывая, что одна из установившихся фаз (например, φ_{0y}) произвольна, нетрудно видеть, что уравнения (9.8.1) и (9.8.10) однозначно определяют шесть постоянных величин φ_{0x} , α_{0x} , α_{0y} , Δ_x , Δ_y , ω_0 .

2. Рассмотрим подробнее последнюю пару уравнений (9.8.10). Из них следует, что если, например, $|\varepsilon_1| < |\varepsilon_2|$, то частота синхронизованного колебания ω_0 находится ближе к ω_{0x} , чем к ω_{0y} .

Неравенству $|\varepsilon_1| < |\varepsilon_2|$ соответствует более слабое влияние второго генератора (с координатой y) на первый (с координатой x) по сравнению с влиянием первого на второй. Можно поэтому первый генератор считать захватывающим, а второй — захватываемым. Таким образом, частота синхронизованных колебаний расположена ближе к собственной (парциальной) частоте захватывающего генератора. При $|\varepsilon_1| \ll |\varepsilon_2|$ $\omega_0 \approx \omega_{0x}$, $|\alpha_{0x}| \ll |\alpha_{0y}|$ захватывающий генератор (первый) сохраняет амплитуду и частоту колебаний практически неизменными и полностью подчиняет себе второй генератор, который в этом случае может рассматриваться как генератор, синхронизируемый сильным сигналом.

Из последних уравнений системы (9.8.10) нетрудно получить следующее уравнение для частоты синхронных автоколебаний:

$$(\omega_0 - \omega_{1x})(\omega_0 - \omega_{1y}) = \omega_0^2 \varepsilon_1 \varepsilon_2 \cos^2 \Phi. \quad (9.8.11)$$

Здесь $\Phi = \Phi(\omega_0)$. Это уравнение имеет два положительных корня, ω_{01} , ω_{02} , близких к ω_{1x} и ω_{1y} . На рис. 9.31 для $\omega_{1x} < \omega_{1y}$

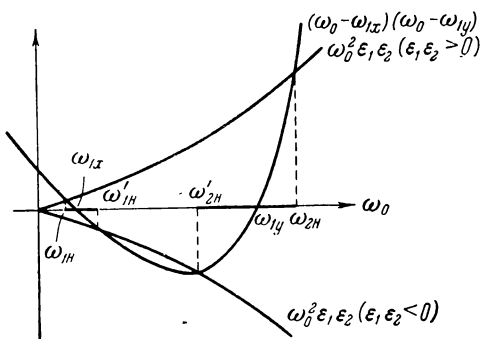


Рис. 9.31.

показаны графически интервалы, в которых располагаются корни ω_{01} , ω_{02} для случаев $\varepsilon_1 \varepsilon_2 > 0$ и $\varepsilon_1 \varepsilon_2 < 0$. Если взаимосвязь генераторов симметрична, то $\varepsilon_1 \varepsilon_2 > 0$ и мы всегда имеем два значения для частот синхронных колебаний ω_{01} , ω_{02} , расположенных вне интервала (ω_{1x} , ω_{1y}) парциальных частот генераторов (или, что то же самое, вне интервала парциальных частот консервативных систем генераторов), но внутри интервала нормальных частот ($\omega_{1н}$, $\omega_{2н}$) консервативных систем генераторов (нормальные частоты являются корнями уравнения (9.8.11) при $\cos^2 \Phi = 1$). Области возможных значений ω_{01} , ω_{02} на рис. 9.31 выделены жирными линиями на оси абсцисс. Если взаимосвязь генераторов не симметрична и $\varepsilon_1 \varepsilon_2 < 0$, то при достаточно большой величине $|\varepsilon_1 \varepsilon_2|$ синхронного режима может и не быть. Если же синхронный режим существует, то его возможные частоты лежат вне интервала нормальных частот ($\omega'_{1н}$, $\omega'_{2н}$).

Из двух возможных частот синхронного режима реализуется та, которая расположена ближе к нормальной частоте захватывающего генератора. Если разница между $|\varepsilon_1|$ и $|\varepsilon_2|$ невелика, то различие между захватывающим и захватываемым генераторами пропадает и установление той или иной синхронной частоты может определяться начальными условиями. При этом почти равновозможны два режима автоколебаний:

1) первый генератор является захватывающим, а второй захватываемым;

2) второй генератор является захватывающим, а первый — захватываемым.

Если собственные частоты автогенераторов равны $\omega_{0x} = \omega_{0y} = \omega_1$, то устойчивый синхронный режим возможен лишь при $\varepsilon_1 \varepsilon_2 > 0$. При этом в силу $\Delta_x = \Delta_y$ и неравных ε_1 и ε_2 из последних уравнений (9.8.10) следует, что $\cos \Phi = 0$, $\Phi = \pm \pi/2$. Таким образом, $\Delta_x = \Delta_y = 0$, $\omega_0 = \omega_1$. Это является совершенно естественным, так как генераторы, обладающие совпадающими частотами синхронизируются на этой же самой частоте. При этом обстоятельство — является ли первый генератор захватываемым или захватывающим — зависит, как и ранее, от знака ($\varepsilon_1 - \varepsilon_2$).

3. Пусть теперь $E_1(t)$ и $E_2(t)$ не равны тождественно нулю. Полагаем, что

$$\begin{aligned} \alpha'_x &= \alpha_{0x} + \alpha_x, & \alpha'_y &= \alpha_{0y} + \alpha_y, \\ \varphi'_x &= \varphi_{0x} + \varphi_x, & \varphi'_y &= \varphi_{0y} + \varphi_y. \end{aligned}$$

Здесь флуктуации амплитуд и фаз α_x , α_y , φ_x , φ_y порождаются шумами автогенераторов. Для них на основании (9.8.3) и

(9.8.10) можно получить следующие флуктуационные уравнения:

$$\begin{aligned}\frac{da_x}{dt} &= -p\alpha_x - p\alpha_{0x} [1 - \cos(\varphi_x - \varphi_y)] + \Delta_x \sin(\varphi_x - \varphi_y) + \frac{\omega_0}{2R_0} E_{\perp 1}(t), \\ \frac{da_y}{dt} &= -p\alpha_y - p\alpha_{0y} [1 - \cos(\varphi_y - \varphi_x)] + \Delta_y \sin(\varphi_y - \varphi_x) + \frac{\omega_0}{2R_0} E_{\perp 2}(t), \\ \frac{d\varphi_x}{dt} &= -\Delta_x [1 - \cos(\varphi_x - \varphi_y)] - p\alpha_{0x} \sin(\varphi_x - \varphi_y) - \frac{\omega_0}{2R_0} E_{\parallel 1}(t), \\ \frac{d\varphi_y}{dt} &= -\Delta_y [1 - \cos(\varphi_y - \varphi_x)] - p\alpha_{0y} \sin(\varphi_y - \varphi_x) - \frac{\omega_0}{2R_0} E_{\parallel 2}(t).\end{aligned}\quad (9.8.12)$$

Здесь в выражениях для $E_{\perp 1}$, $E_{\parallel 1}$, $E_{\perp 2}$, $E_{\parallel 2}$, заданных формулами (9.8.4), следует писать вместо φ'_x и φ'_y соответственно $\varphi_{0x} + \varphi_x$ и $\varphi_{0y} + \varphi_y$. Полученные уравнения (9.8.12) описывают поведение взаимно связанных томсоновских автогенераторов в самом общем случае.

В проводимом анализе мы ограничимся тем случаем, когда собственные шумы автогенераторов являются естественными. Случайные функции $E_1(t)$ и $E_2(t)$ имеют, следовательно, постоянную (в полосе автогенераторов) спектральную плотность, равную соответственно $S_{E_1}(\omega_0) = c_{01}$, $S_{E_2}(\omega_0) = c_{02}$. Тогда, как обычно, применяя метод статистической эквивалентности стохастических уравнений, можем функции $E_{\parallel}(t)$, $E_{\perp}(t)$, заданные формулами (9.8.4), заменить некоррелированными функциями $e_{\parallel} = e_{\parallel}(t)$, $e_{\perp} = e_{\perp}(t)$:

$$\begin{aligned}E_{\parallel 1}(t) &\rightarrow e_{\parallel 1}(t), & E_{\perp 1}(t) &\rightarrow e_{\perp 1}(t), \\ E_{\parallel 2}(t) &\rightarrow e_{\parallel 2}(t), & E_{\perp 2}(t) &\rightarrow e_{\perp 2}(t).\end{aligned}\quad (9.8.13)$$

Таким образом, воздействие естественных шумов автогенераторов на их взаимную синхронизацию описывается следующими уравнениями:

$$\begin{aligned}\frac{da_x}{dt} &= -p\alpha_x - p\alpha_{0x} [1 - \cos(\varphi_x - \varphi_y)] + \Delta_x \sin(\varphi_x - \varphi_y) + \frac{\omega_0}{2R_0} e_{\perp 1}(t), \\ \frac{da_y}{dt} &= -p\alpha_y - p\alpha_{0y} [1 - \cos(\varphi_x - \varphi_y)] - \Delta_y \sin(\varphi_x - \varphi_y) + \frac{\omega_0}{2R_0} e_{\perp 2}(t),\end{aligned}\quad (9.8.14)$$

$$\begin{aligned}\frac{d\varphi_x}{dt} &= -\Delta_x [1 - \cos(\varphi_x - \varphi_y)] - p\alpha_{0x} \sin(\varphi_x - \varphi_y) - \frac{\omega_0}{2R_0} e_{\parallel 1}(t), \\ \frac{d\varphi_y}{dt} &= -\Delta_y [1 - \cos(\varphi_x - \varphi_y)] + p\alpha_{0y} \sin(\varphi_x - \varphi_y) - \frac{\omega_0}{2R_0} e_{\parallel 2}(t).\end{aligned}$$

Рассмотрим тождественные автогенераторы, обладающие равными парциальными частотами ($\Delta_x = \Delta_y = 0$). Тогда, полагая

для определенности, что $\varepsilon_1 - \varepsilon_2 > 0$, $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$, будем иметь

$$\Phi = -\frac{\pi}{2}, \quad \alpha_{0x} = \frac{\omega_0 \varepsilon_1}{p}, \quad \alpha_{0y} = -\frac{\omega_0 \varepsilon_2}{p}.$$

Обратимся к фазовым флуктуациям, уравнения которых принимают теперь вид

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_x}{dt} &= -\omega_0 \varepsilon_1 \sin(\varphi_x - \varphi_y) - \frac{\omega_0}{2R_0} e_{\parallel 1}(t), \\ \frac{d\varphi_y}{dt} &= -\omega_0 \varepsilon_2 \sin(\varphi_x - \varphi_y) - \frac{\omega_0}{2R_0} e_{\parallel 2}(t). \end{aligned} \quad (9.8.15)$$

4. Разность фаз $\varphi_x - \varphi_y$ характеризует степень синхронизации автогенераторов. Если эта разность тождественно равна нулю, это означает полную привязку фазы одного генератора к фазе другого, и можно сказать, что в этом случае мы имеем полную синхронизацию. Если же $\varphi_x - \varphi_y$ может со временем стать сколь угодно большой, можно считать, что синхронизация между генераторами практически отсутствует. Поэтому степень синхронизации целесообразно оценивать по характеристикам $\varphi_x - \varphi_y$.

Будем считать, что между автогенераторами имеет место сильная синхронизация, если

$$\langle (\varphi_x - \varphi_y)^2 \rangle \ll 1. \quad (9.8.16)$$

В этом случае уравнения (9.8.15) можно линеаризовать:

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_x}{dt} &= -\omega_0 \varepsilon_1 (\varphi_x - \varphi_y) - \frac{\omega_0}{2R_0} e_{\parallel 1}(t), \\ \frac{d\varphi_y}{dt} &= -\omega_0 \varepsilon_2 (\varphi_x - \varphi_y) - \frac{\omega_0}{2R_0} e_{\parallel 2}(t). \end{aligned} \quad (9.8.17)$$

Разрешая эту систему относительно φ_x и φ_y , найдем

$$\frac{d^2 \varphi_{x,y}}{dt^2} + \omega_0 \varepsilon \frac{d\varphi_{x,y}}{dt} = -\frac{\omega_0}{2R_0} K_{x,y}(t), \quad (9.8.18)$$

где $\varepsilon = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$,

$$K_{x,y}(t) = \frac{de_{\parallel 1,2}}{dt} - \omega_0 (\varepsilon_2 e_{\parallel 1} - \varepsilon_1 e_{\parallel 2}). \quad (9.8.19)$$

Отсюда, полагая $\varphi_x(0) = \varphi_y(0) = \dot{\varphi}_x(0) = \dot{\varphi}_y(0) = 0$, найдем следующее решение для $\varphi_x(t)$, $\varphi_y(t)$:

$$\varphi_{x,y}(t) = -\frac{1}{2R_0 \varepsilon} \int_0^t [1 - e^{-\omega_0 \varepsilon \xi}] K_{x,y}(t - \xi) d\xi. \quad (9.8.20)$$

Дисперсия фазовых флуктуаций равна

$$\langle \varphi_{x,y}^2(t) \rangle = \frac{1}{4R_0^2 \epsilon^2} \int_0^t \int_0^t [1 - e^{-\omega_0 \epsilon \xi}] [1 - e^{-\omega_0 \epsilon \eta}] \Phi_{K_{x,y}}(\xi - \eta) d\xi d\eta. \quad (9.8.21)$$

Здесь на основании дельта-коррелированности и независимости $e_{\parallel 1}(t)$ и $e_{\parallel 2}(t)$

$$\Phi_{K_{x,y}}(\tau) = 4\pi [-c_{01,02} \delta''(\tau) + \omega_0^2 (\epsilon_2^2 c_{01} + \epsilon_1^2 c_{02}) \delta(\tau)]. \quad (9.8.22)$$

Подставляя (9.8.22) в (9.8.21), получим для $t \gg 1/\omega_0 \epsilon$

$$\langle \varphi_x^2(t) \rangle = \langle \varphi_y^2(t) \rangle = \left(\frac{\epsilon_2^2}{\epsilon^2} D_1 + \frac{\epsilon_1^2}{\epsilon^2} D_2 \right) t. \quad (9.8.23)$$

Таким образом, в линейном приближении дисперсии фазовых флуктуаций обоих генераторов равны *) и зависят как от собственных шумов, так и от шумов второго генератора.

Поскольку $\varphi_x(0) = \varphi_y(0) = 0$, то приращения фазы

$$\Delta \varphi = \varphi(t + \tau) - \varphi(t)$$

также имеют одинаковую дисперсию для обоих генераторов и легко видеть, что для $t, \tau \gg 1/\omega_0 \epsilon$

$$\chi(\tau) = \frac{1}{2} \langle \Delta \varphi_{x,y}^2 \rangle = \frac{1}{2} \left(\frac{\epsilon_2^2}{\epsilon^2} D_1 + \frac{\epsilon_1^2}{\epsilon^2} D_2 \right) \tau. \quad (9.8.24)$$

Мы имеем диффузионный закон распылания фазы, то, что было и для свободного генератора. Отличие поведения взаимно синхронизованных генераторов при сильной синхронизации по сравнению с поведением свободного генератора заключается в том, что теперь диффузия фазы синхронизованного колебания существенно зависит от шумов обоих генераторов и от условий их взаимосвязи.

Выясним условия существования сильной синхронизации и, следовательно, справедливости формулы (9.8.24). Обозначая $\varphi_x - \varphi_y = \varphi$, из (9.8.17) получим

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\omega_0 \epsilon \varphi - \frac{\omega_0}{2R_0} (e_{\parallel 1} - e_{\parallel 2}).$$

Отсюда видно, что для φ существует возвращающая сила $\omega_0 \epsilon$. Рассматривая достаточно большие моменты времени ($t \gg 1/\omega_0 \epsilon$),

*) Что и должно быть, поскольку при сильной синхронизации мы имеем фактически одно синхронное колебание.

найдем дисперсию φ :

$$\langle \varphi^2 \rangle = \frac{\pi \omega_0^2 (c_{01} + c_{02})}{2 R_0^2 \omega_0 \epsilon} = \frac{D_1 + D_2}{2 \omega_0 \epsilon}. \quad (9.8.25)$$

Условие сильной синхронизации сводится, таким образом, к условию

$$\mu \equiv \frac{2 \omega_0 \epsilon}{D_1 + D_2} \gg 1.$$

За условие слабой синхронизации естественно принять условие $\mu \ll 1$. Условие сильной синхронизации может быть записано также в виде

$$c_{01} \omega_0 \epsilon + c_{02} \omega_0 \epsilon \ll \frac{2}{\pi} (R_0 \epsilon)^2 = \frac{1}{2\pi} R_0^2 (\lambda_1 - \lambda_2)^2.$$

Левая часть неравенства представляет собой сумму мощности шумов автогенераторов, существующих в полосе $\omega_0 \epsilon$, являющейся фактически полосой синхронизации. Эти шумовые мощности и действуют в основном на фазы автогенераторов. Тем самым слева стоит полная мощность фазоактивных шумов автогенераторов.

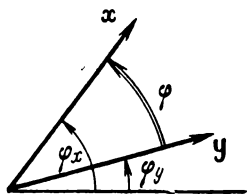


Рис. 9.32.

Величина $\frac{1}{2\pi} [R_0 (\lambda_1 - \lambda_2)]^2$ есть по существу мощность синхронизирующего сигнала, действующая в одном автогенераторе от другого (это особенно ясно видно в том случае, когда синхронизация является односторонней и, например, $\lambda_2 = 0$). Тем самым условие сильной синхронизации двух авто-

генераторов есть по существу условие малости мощности фазоактивных шумов генераторов по сравнению с мощностью синхронизирующего сигнала.

Интересной зависимостью является зависимость $\langle \varphi^2 \rangle$ от ϵ . Сильная синхронизация может стать слабой, если связи между тождественными автогенераторами приближаются к симметричным и $\epsilon \rightarrow 0$. В этом случае генераторы становятся эквивалентными, и какой из двух генераторов становится захватываемым, а какой захваченным зависит от случая. Фактически это и означает, что эффективная связь между ними как бы пропадает.

Полученные результаты позволяют следующим образом описать поведение фаз взаимно синхронизованных генераторов, обладающих малыми естественными шумами. Изобразим колебания генераторов векторами x и y (рис. 9.32). Тогда при $\mu \gg 1$ оба вектора при своих флуктуациях находятся все время вблизи друг друга. Их расхождение (фаза φ), имея среднее значение, равное нулю, обладает конечной малой дисперсией ($\langle \varphi^2 \rangle \ll 1$).

В то же время фазы самих векторов φ_x и φ_y , имея также нулевые значения в соответствии с (9.8.23), обладают диффузионным законом — их дисперсии неограниченно возрастают со временем.

Можно представить, что векторы \mathbf{x} и \mathbf{y} как будто связаны между собой упругой силой ($\sim \omega_0 \epsilon$) и в то же время не связаны ничем с нулевой осью. Держась вблизи друг друга, эти векторы могут «накручиваться» сколь угодно далеко в ту или другую сторону.

5. Рассмотрим теперь более общий случай произвольного μ , когда уравнения (9.8.14) нельзя линеаризовать. Для разности флуктуаций фаз $\varphi = \varphi_x - \varphi_y$ из (9.8.15) находим

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\omega_0 \epsilon \sin \varphi - \frac{\omega_0}{2R_0} [e_{\parallel 1}(t) - e_{\parallel 2}(t)]. \quad (9.8.26)$$

С этим уравнением мы уже встречались ранее. Оно описывает флуктуации фазы генератора с шумом, синхронизируемого монохроматическим сигналом. Используя результаты § 9.2, в отношении разности фаз φ можно утверждать следующее. Для произвольного μ и достаточно больших времен t разность фаз φ обладает диффузионным законом

$$\langle \varphi^2 \rangle = D_\infty t. \quad (9.8.27)$$

Согласно (9.2.42), сравнивая (9.2.2) с (9.8.26), находим значение коэффициента диффузии, равное

$$D_\infty = \frac{D_1 + D_2}{I_0^2(\mu)}. \quad (9.8.28)$$

Если фазоактивные шумы генератора малы по сравнению с мощностью сигнала от другого генератора, то $\mu \gg 1$ и, согласно (9.2.43), коэффициент диффузии

$$D_\infty = 4\pi\omega_0 \epsilon e^{-\frac{4\omega_0 \epsilon}{D_1 + D_2}} \quad (9.8.29)$$

является чрезвычайно малой величиной. В этом случае диффузией можно вообще пренебречь (за конечные времена наблюдения) и полагать справедливым условие (9.8.16).

Нетрудно оценить условия, накладываемые на времена наблюдения T , при которых возможно это пренебрежение:

$$T \ll \frac{1}{4\pi\omega_0 \epsilon} e^{\frac{4\omega_0 \epsilon}{D_1 + D_2}}. \quad (9.8.30)$$

Если фазоактивные шумы по мощности больше или сравнимы с мощностью сигнала от другого генератора, то разность фаз генераторов φ обладает заметным коэффициентом диффузии и векторы \mathbf{x} и \mathbf{y} (см. рис. 9.32) могут расходиться друг от

друга сколь угодно далеко за достаточно большое время. Синхронизация генераторов по фазе при этом становится весьма слабой. Она существует лишь в среднем, ибо $\langle \varphi \rangle = 0$. Эта ситуация будет иметь место, в частности, тогда, когда генераторы достаточно близки по всем параметрам (ε — мало), или в условиях связи, близкой к симметричной. В этом случае генераторы становятся все более независимыми друг от друга.

Если, наконец, $\frac{2\omega_0\varepsilon}{D_1+D_2} \ll 1$, то из (9.8.28) следует, что $D_\infty = D_1 + D_2$. Это означает, что векторы x и y диффундируют практически независимо друг от друга. Можно считать, что в этой ситуации между генераторами практически нет никакой синхронизации.

6. Выясним для произвольного μ поведение фаз φ_x и φ_y . Введем новую фазу $\psi = \varepsilon_2\varphi_x - \varepsilon_1\varphi_y$. Для нее из (9.8.15) нетрудно получить следующее уравнение:

$$\frac{d\psi}{dt} = -\frac{\omega_0}{2R_0} (\varepsilon_2 e_{\parallel 1} - \varepsilon_1 e_{\parallel 2}). \quad (9.8.31)$$

Это уравнение, как легко видеть, дает для фазы ψ диффузионный закон:

$$\langle \psi^2 \rangle = (\varepsilon_2^2 D_1 + \varepsilon_1^2 D_2) t. \quad (9.8.32)$$

Искомые фазы φ_x и φ_y можно выразить через φ и ψ :

$$\varphi_x = \frac{1}{\varepsilon} [\varepsilon_1 \varphi - \psi], \quad \varphi_y = \frac{1}{\varepsilon} [\varepsilon_2 \varphi - \psi].$$

Отсюда находим

$$\begin{aligned} \langle \varphi_x^2 \rangle &= \frac{1}{\varepsilon^2} [\varepsilon_1^2 \langle \varphi^2 \rangle + \langle \psi^2 \rangle] - 2 \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon^2} \langle \varphi \psi \rangle, \\ \langle \varphi_y^2 \rangle &= \frac{1}{\varepsilon^2} [\varepsilon_2^2 \langle \varphi^2 \rangle + \langle \psi^2 \rangle] - 2 \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon^2} \langle \varphi \psi \rangle. \end{aligned} \quad (9.8.33)$$

Отсюда следует, что коэффициенты диффузии фаз φ_x и φ_y получились различными. Это различие связано с тем, что один из генераторов является захватываемым, а другой — захватывающим и, с другой стороны, с разными интенсивностями шумов генераторов.

Если вернуться к линейному приближению (малые шумы), положив $\langle \varphi^2 \rangle \ll 1$, то (9.8.33) с учетом (9.8.32) сведется к (9.8.23) и разница в поведении φ_x и φ_y станет пренебрежимо малой.

Если рассмотреть случай слабой синхронизации, когда $\mu \ll 1$, то уравнения (9.8.15) принимают вид

$$\frac{d\varphi_x}{dt} = -\frac{\omega_0}{2R_0} e_{\parallel 1}(t), \quad \frac{d\varphi_y}{dt} = -\frac{\omega_0}{2R_0} e_{\parallel 2}(t), \quad (9.8.34)$$

и мы имеем

$$\langle \varphi_x^2 \rangle = D_1 t, \quad \langle \varphi_y^2 \rangle = D_2 t. \quad (9.8.35)$$

Точное вычисление среднего $\langle \varphi \psi \rangle$ в общем случае нелинейного уравнения для φ является достаточно трудной процедурой. Поэтому целесообразно ограничиться его приближенным значением.

В случае больших шумов, когда вместо (9.8.26) можно рассматривать

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{\omega_0}{2R_0} [e_{\parallel 1}(t) - e_{\parallel 2}(t)],$$

найти $\langle \varphi \psi \rangle$ легко. Расчет показывает, что

$$\langle \varphi \psi \rangle = (\varepsilon_2 D_1 + \varepsilon_1 D_2) t.$$

С другой стороны, при малых шумах $\langle \varphi \psi \rangle / t$ должно быть достаточно малым вследствие малости φ . Учитывая это, в качестве приближенного выражения для $\langle \varphi \psi \rangle$, справедливого при любом отношении фазоактивных шумов к мощности синхронизирующего сигнала, можно принять

$$\langle \varphi \psi \rangle = \frac{\varepsilon_2 D_1 + \varepsilon_1 D_2}{I_0^2(\mu)} t. \quad (9.8.36)$$

Для дисперсий фаз из (9.8.33), учитывая (9.8.27), получаем следующие окончательные выражения:

$$\langle \varphi_x^2 \rangle = D_x t, \quad \langle \varphi_y^2 \rangle = D_y t,$$

$$D_x = \frac{1}{\varepsilon^2} \{ D_1 [\varepsilon^2 I_0^{-2}(\mu) + \varepsilon_2^2 (1 - I_0^{-2}(\mu))] + D_2 \varepsilon_1^2 [1 - I_0^{-2}(\mu)] \}, \quad (9.8.37)$$

$$D_y = \frac{1}{\varepsilon^2} \{ D_2 [\varepsilon^2 I_0^{-2}(\mu) + \varepsilon_1^2 (1 - I_0^{-2}(\mu))] + D_1 \varepsilon_2^2 [1 - I_0^{-2}(\mu)] \}.$$

Легко видеть, что предельные случаи (9.8.35) и (9.8.23) для $\mu \ll 1$ и $\mu \gg 1$ соответственно получаются отсюда без труда.

7. Поскольку коэффициенты диффузии фаз получились различными для первого и второго генератора, то в общем случае различными будут и значения ширины спектральной линии $\Delta\Omega$. Для свободных автогенераторов

$$\Delta\Omega_1 = \frac{\pi D_1}{2}, \quad \Delta\Omega_2 = \frac{\pi D_2}{2}.$$

При наличии взаимной синхронизации имеем

$$\Delta\Omega_x = \frac{\pi D_x}{2}, \quad \Delta\Omega_y = \frac{\pi D_y}{2}.$$

Используя (9.8.37), нетрудно получить следующие общие выражения для ширины спектральной линии взаимно синхронизованных генераторов:

$$\begin{aligned}\Delta\Omega_x &= \frac{1}{\varepsilon^2} \{ [\varepsilon^2 I_0^{-2}(\mu) + \varepsilon_2^2 (1 - I_0^{-2}(\mu))] \Delta\Omega_1 + \varepsilon_1^2 (1 - I_0^{-2}(\mu)) \Delta\Omega_2 \}, \\ \Delta\Omega_y &= \frac{1}{\varepsilon^2} \{ [\varepsilon^2 I_0^{-2}(\mu) + \varepsilon_1^2 (1 - I_0^{-2}(\mu))] \Delta\Omega_2 + \varepsilon_2^2 (1 - I_0^{-2}(\mu)) \Delta\Omega_1 \}.\end{aligned}\quad (9.8.38)$$

Формула (9.8.38) позволяет получить значения $\Delta\Omega_x$ и $\Delta\Omega_y$ для любых значений μ . При слабой синхронизации, когда $\mu \ll 1$, как и должно быть, $\Delta\Omega_x = \Delta\Omega_1$, $\Delta\Omega_y = \Delta\Omega_2$. При сильной синхронизации значения $\Delta\Omega_x$ и $\Delta\Omega_y$ становятся одинаковыми:

$$\Delta\Omega = \Delta\Omega_x = \Delta\Omega_y = \frac{\varepsilon_2^2 \Delta\Omega_1 + \varepsilon_1^2 \Delta\Omega_2}{\varepsilon^2}. \quad (9.8.39)$$

Проследим за изменением $\Delta\Omega_x$ и $\Delta\Omega_y$ при изменении степени синхронизации между обоими генераторами. Для рассматриваемого нами случая $\varepsilon > 0$ первый генератор, описываемый координатой x , является захватываемым, а второй генератор с координатой y — захватывающим. Это обстоятельство отражено на рис. 9.33 тем, что более сильное воздействие указано жирной линией.

Пусть $\Delta\Omega_1 > \Delta\Omega_2$ — захватываемый генератор является

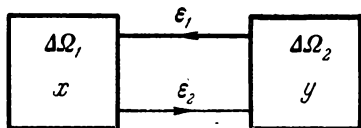


Рис. 9.33.

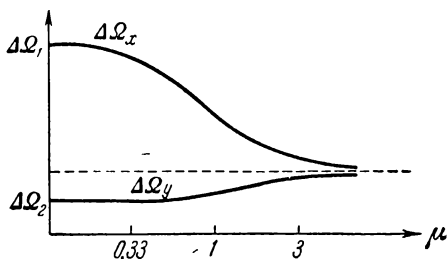


Рис. 9.34.

более «плохим», чем захватывающий. Зависимости $\Delta\Omega_x$ и $\Delta\Omega_y$ от μ показаны на рис. 9.34. Из этого рисунка следует, что при возрастании μ (при возрастании взаимосвязи между генераторами) ширина спектральной линии первого генератора начинает уменьшаться, стремясь к $\Delta\Omega$ (см. (9.8.39)), в то время как ширина линии второго генератора $\Delta\Omega_y$ *возрастает*, также стремясь к $\Delta\Omega$. Уменьшение $\Delta\Omega_x$ связано с тем, что этот «плохой» генератор, обладавший до синхронизации большими частотными флуктуациями, синхронизуется вторым генератором, флуктуации частоты которого были сравнительно малыми. Возрастание $\Delta\Omega_y$ связано с проникновением шумов первого генератора во второй, что имеет место, поскольку синхронизация взаим-

на. По этой же причине при $\mu \gg 1$, согласно (9.8.39), удельный вклад в $\Delta\Omega$ от второго генератора больше, чем от первого.

Если первый генератор ненамного «хуже» второго (если $1 < \Delta\Omega_1/\Delta\Omega_2 \ll \epsilon_1^2/\epsilon_2^2$), то ширина спектральной линии синхронизованной системы определяется в основном захватывающим генератором и $\Delta\Omega \approx \Delta\Omega_2 \epsilon_1^2/\epsilon^2$. Если первый генератор существенно «хуже» второго ($\Delta\Omega_1/\Delta\Omega_2 \gg \epsilon_1^2/\epsilon_2^2$), то результирующая ширина спектральной линии определяется первым генератором $\Delta\Omega = \Delta\Omega_1 \epsilon_2^2/\epsilon^2$ и при этом существенно ослаблена из-за синхронизирующего действия второго генератора.

Рис. 9.34 соответствует обычной синхронизации: генератор с малой $\Delta\Omega_2$ синхронизует генератор с большей $\Delta\Omega_1$. Из него видно, что для эффективной синхронизации достаточно брать $\mu \geq 3$.

Рис. 9.35 соответствует в каком-то смысле «паразитной» синхронизации, когда $\Delta\Omega_1/\Delta\Omega_2 < 1$. Из графиков этого рисунка видно, как быстро портится «хороший» генератор, испытывающий «паразитную» синхронизацию.

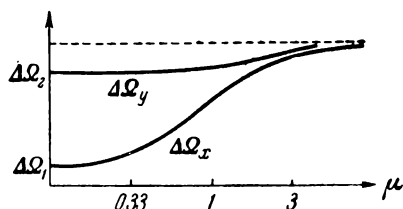


Рис. 9.35.

Если взаимной синхронизации подвержены генераторы, обладающие одинаковыми значениями ширины спектральной линии $\Delta\Omega_1 = \Delta\Omega_2 = \Delta\Omega^*$, то

$$\Delta\Omega_x = \Delta\Omega_y = \frac{\epsilon_1^2 - 2\epsilon_1\epsilon_2 I_0^{-2}(\mu) + \epsilon_2^2}{\epsilon_1^2 - 2\epsilon_1\epsilon_2 + \epsilon_2^2} \Delta\Omega^* \geq \Delta\Omega^*.$$

График этой зависимости показан на рис. 9.36. В этом случае

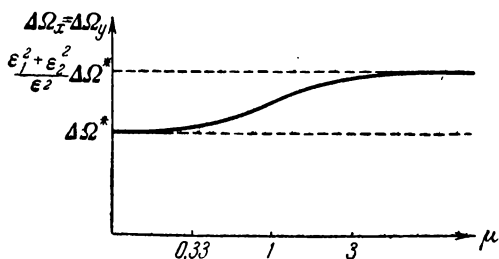


Рис. 9.36.

при $\mu > 0$ ширина линии всегда увеличивается. Это связано с взаимным проникновением шумов одного генератора в другой.

8. Обратимся к флуктуациям частоты генераторов. Начнем анализ их спектров со случая сильной синхронизации. Обращаясь к уравнению (9.8.18), нетрудно найти

$$S_{\varphi_{x,y}}(\Omega) [\Omega^2 + \omega_0^2 \varepsilon^2] \Omega^2 = \frac{\omega_0^2}{2\pi} (\varepsilon_2^2 D_1 + \varepsilon_1^2 D_2) + \frac{\Omega^2}{2\pi} D_{1,2}.$$

Учитывая, что $S_{\varphi_{x,y}}(\Omega) \Omega^2 = S_{v_{x,y}}(\Omega)$, получим

$$S_{v_{x,y}}(\Omega) = \frac{\frac{\omega_0^2}{2\pi} (\varepsilon_2^2 D_1 + \varepsilon_1^2 D_2) + \frac{\Omega^2}{2\pi} D_{1,2}}{\omega_0^2 \varepsilon^2 + \Omega^2}. \quad (9.8.39a)$$

Графики этих спектральных плотностей изображены на рис. 9.37 (для $D_2 < D_1$) и на рис. 9.38 (для $D_2 = D_1$).

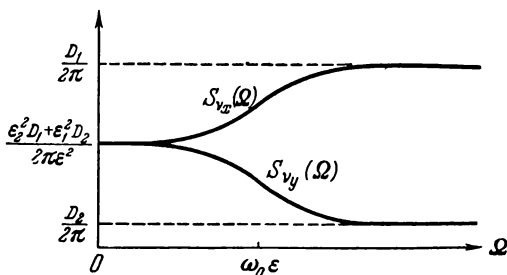


Рис. 9.37.

Из этих графиков видно, что взаимная синхронизация генераторов сказывается лишь на медленных флуктуациях частоты,

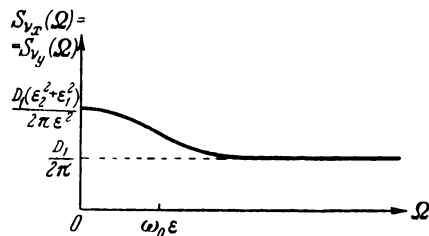


Рис. 9.38.

так же как это имело место ранее для обычной синхронизации. Другими словами, взаимная синхронизация «работает» так же сравнительно медленно, обладая «инерцией». Из (9.8.39a) следует, что постоянная времени синхронизации равна обратной величине полосы синхронизации $\approx (\omega_0 \varepsilon)^{-1}$. Чем больше связь между генераторами, тем больше $\omega_0 \varepsilon$ и тем «эффективнее» синхронизация с точки зрения флуктуаций частоты колебания.

Из рис. 9.37 следует также, что взаимная синхронизация генераторов, обладающих различными интенсивностями флуктуаций частоты, выравнивает их медленные компоненты. Поэтому для сильно шумящего генератора взаимная синхрониза-

§ 9.8]

ция «выгодна» — она уменьшает $S_v(0)$, а для слабо шумящего — «невыгодна» — она может существенно увеличить $S_v(0)$ (как, например, для $S_{v_y}(0)$ на рис. 9.37). Увеличение $S_v(0)$ для слабо шумящего генератора следует, как это уже говорилось, из-за проникновения в него шумов от сильно шумящего генератора.

9. Рассмотрение спектральной плотности флуктуаций частоты взаимно синхронизованных генераторов для случая нелинейных уравнений (9.8.15) (произвольное μ) можно провести лишь приближенно. Введем флуктуации частоты $v_\varphi = d\varphi/dt$ и $v_\psi = d\psi/dt$. Тогда

$$v_x = \frac{1}{\varepsilon} [\varepsilon_1 v_\varphi - v_\psi], \quad v_y = \frac{1}{\varepsilon} [\varepsilon_2 v_\varphi - v_\psi].$$

Отсюда

$$\begin{aligned} S_{v_x}(\Omega) &= \frac{1}{\varepsilon^2} [\varepsilon_1^2 S_{v_\varphi}(\Omega) - 2\varepsilon_1 S_{v_\varphi v_\psi}^0(\Omega) + S_{v_\psi}(\Omega)], \\ S_{v_y}(\Omega) &= \frac{1}{\varepsilon^2} [\varepsilon_2^2 S_{v_\varphi}(\Omega) - 2\varepsilon_2 S_{v_\varphi v_\psi}^0(\Omega) + S_{v_\psi}(\Omega)]. \end{aligned} \quad (9.8.40)$$

Спектральная плотность $S_{v_\psi}(\Omega)$ легко может быть найдена на основании (9.8.31):

$$S_{v_\psi}(\Omega) = \frac{1}{2\pi} (\varepsilon_2^2 D_1 + \varepsilon_1^2 D_2). \quad (9.8.41)$$

Спектральную плотность $S_{v_\varphi}(\Omega)$ можно получить из (9.2.50) заменой D на $D_1 + D_2$ и Δ_0 на $\omega_0 \varepsilon$ в соответствии с уравнениями (9.2.2) и (9.8.26):

$$S_{v_\varphi}(\Omega) = \frac{D_1 + D_2}{2\pi} \frac{\omega_0^2 \varepsilon^2 I_0^{-2}(\mu) + \Omega^2}{\omega_0^2 \varepsilon^2 + \Omega^2}. \quad (9.8.42)$$

Основная трудность в отыскании спектральных плотностей флуктуаций частоты — это определение $S_{v_\varphi v_\psi}^0(\Omega)$. Легко найти ее значение лишь в предельном случае сильной синхронизации, когда $\sin \varphi$ можно заменить на φ . Из уравнений (9.8.26) и (9.8.31), имеющих в этом случае вид

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} &= -\omega_0 \varepsilon \varphi - \frac{\omega_0}{2R_0} [e_{\parallel 1}(t) - e_{\parallel 2}(t)], \\ \frac{d\psi}{dt} &= -\frac{\omega_0}{2E_0} [\varepsilon_2 e_{\parallel 1}(t) - \varepsilon_1 e_{\parallel 2}(t)], \end{aligned}$$

нетрудно найти с помощью формулы (2.3.20)

$$S_{\varphi\psi}^0(\Omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{\varepsilon_2 D_1 + \varepsilon_1 D_2}{\omega_0^2 \varepsilon^2 + \Omega^2}.$$

Поскольку, как можно показать, $S_{\nu_\varphi \nu_\psi}^0(\Omega) = \Omega^2 S_{\varphi\psi}^0(\Omega)$, то имеем, таким образом, для $\mu \gg 1$

$$S_{\nu_\varphi \nu_\psi}^0(\Omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{\varepsilon_2 D_1 + \varepsilon_1 D_2}{\omega_0^2 \varepsilon^2 + \Omega^2} \Omega^2. \quad (9.8.43)$$

Для слабой синхронизации, когда $\mu \ll 1$, член $\omega_0 \varepsilon \sin \varphi$ можно считать малым. Приближенное решение (9.8.26) (для ν_φ) можно взять тогда в виде

$$\nu_\varphi = \omega_0 \varepsilon \sin \int_0^t \frac{\omega_0}{2R_0} [e_{\parallel 1}(\xi) - e_{\parallel 2}(\xi)] d\xi - \frac{\omega_0}{2R_0} [e_{\parallel 1}(\xi) - e_{\parallel 2}(\xi)].$$

Таким образом, $\nu_\varphi(t)$ является нестационарным процессом второй группы. Для отыскания спектральных характеристик необходимо, согласно гл. 1, найти совместную функцию корреляции $\Phi_{\nu_\varphi \nu_\psi}(\tau)$. Нетрудно найти совместную корреляционную функцию

$$\begin{aligned} K_{\nu_\varphi \nu_\psi}[t, t+\tau] &= \langle \nu_\varphi(t) \nu_\psi(t+\tau) \rangle = \\ &= -\frac{\omega_0}{2R_0} \omega_0 \varepsilon \langle [\varepsilon_2 e_{\parallel 1}(t+\tau) - \varepsilon_1 e_{\parallel 2}(t+\tau)] \sin \int_0^t \frac{\omega_0}{2R_0} [e_{\parallel 1}(\xi) - e_{\parallel 2}(\xi)] d\xi \rangle + \\ &\quad + (\varepsilon_2 D_1 + \varepsilon_1 D_2) \delta(\tau). \end{aligned}$$

Учитывая нормальность вероятностного распределения для $e_{\parallel 1}(t)$, $e_{\parallel 2}(t)$, с помощью формулы (VI.7) найдем

$$K_{\nu_\varphi \nu_\psi}[t, t+\tau] = [\varepsilon_2 D_1 + \varepsilon_1 D_2] \left\{ \delta(\tau) - \omega_0 \varepsilon e^{-\frac{1}{2} (D_1 + D_2) |\tau|} Q(t, \tau) \right\}.$$

Здесь $Q(t, \tau)$ является ограниченной функцией, равной единице для $|\tau| < |t|$ ($t > 0, \tau < 0$), $|\tau| < |t|$ ($t < 0, \tau > 0$) и нулю для остальных значений t и τ . Тем самым при усреднении по времени, согласно (1.7.10), получаем функцию корреляции

$$\Phi_{\nu_\varphi \nu_\psi}(\tau) = (\varepsilon_2 D_1 + \varepsilon_1 D_2) \delta(\tau).$$

Следовательно,

$$S_{\nu_\varphi \nu_\psi}^0(\Omega) = \frac{\varepsilon_2 D_1 + \varepsilon_1 D_2}{2\pi}. \quad (9.8.44)$$

Таково приближенное значение (оно тем точнее, чем меньше μ) совместной спектральной плотности флуктуаций частот ν_φ и ν_ψ .

Для произвольного μ точного значения $S_{\nu_\varphi \nu_\psi}^0(\Omega)$ найти не удастся. Поэтому аналогично тому, как мы поступали при нахождении $\langle \varphi\psi \rangle$, ограничимся принятием приближенного значе-

§ 9.8]

ния $S_{\nu_{\phi} \nu_{\psi}}^0(\Omega)$, совпадающего с точными в предельных случаях $\mu \ll 1$ и $\mu \gg 1$.

Анализ спектральной плотности флуктуаций частоты $S_{\nu}(\Omega)$ генератора, синхронизованного монохроматическим колебанием, заданной выражением (9.2.49), показывает, что для $\mu \gg 1$ и $\mu \ll 1$ спектральная плотность $S_{\nu}(\Omega)$ имеет значения, подобные (9.8.43) и (9.8.44). Эта аналогия дает основание представить приближенное выражение для зависимости $S_{\nu_{\phi} \nu_{\psi}}^0(\Omega)$ от μ следующей формулой:

$$S_{\nu_{\phi} \nu_{\psi}}^0(\Omega) = \frac{\varepsilon_2 D_1 + \varepsilon_1 D_2}{2\pi} \frac{\Omega^2 + \omega_0^2 \varepsilon^2 I_0^{-2}(\mu)}{\Omega^2 + \omega_0^2 \varepsilon^2}. \quad (9.8.45)$$

Собирая вместе (9.8.40) — (9.8.42), (9.8.45), получим следующие окончательные приближенные выражения для спектральных плотностей флуктуаций частоты обоих генераторов:

$$S_{\nu_x}(\Omega) = \frac{\omega_0^2 \{ D_1 [\varepsilon^2 I_0^{-2}(\mu) + \varepsilon_2^2 (1 - I_0^{-2}(\mu))] + D_2 \varepsilon_1^2 [1 - I_0^{-2}(\mu)] \} + D_1 \Omega^2}{2\pi (\omega_0^2 \varepsilon^2 + \Omega^2)},$$

$$S_{\nu_y}(\Omega) = \frac{\omega_0^2 \{ D_2 [\varepsilon^2 I_0^{-2}(\mu) + \varepsilon_1^2 (1 - I_0^{-2}(\mu))] + D_1 \varepsilon_2^2 [1 - I_0^{-2}(\mu)] \} + D_2 \Omega^2}{2\pi (\omega_0^2 \varepsilon^2 + \Omega^2)}. \quad (9.8.46)$$

Графики этих спектральных плотностей для $D_1 > D_2$ показаны на рис. 9.39, а для $D_2 = D_1$ — на рис. 9.40. Из этих графиков

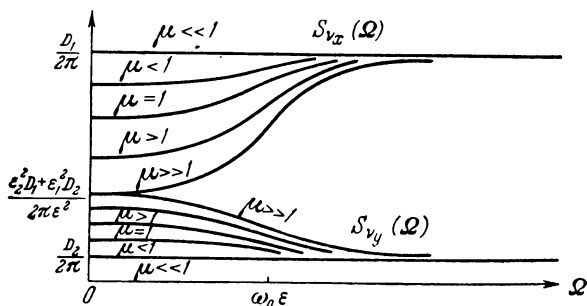


Рис. 9.39.

видно, как влияет постепенное увеличение синхронизации между генераторами (увеличение μ) на ход спектральных плотностей флуктуаций частоты. Это влияние, во-первых, имеет место только на частотах, меньших или сравнимых с $\omega_0 \varepsilon$ — полосой взаимной синхронизации (которая также зависит от μ при постоянных D_1 и D_2), и, во-вторых, приводит к тому, что в общем

случае спектральные плотности флуктуаций частоты обоих генераторов различны.

10. Проведенный выше анализ относится к общему случаю *взаимной синхронизации* автогенераторов, когда оба генератора, обладающие шумами, влияют друг на друга. Представляет несомненный интерес рассмотрение частного случая *односторонней синхронизации*, при котором один генератор синхронизируется другим, но сам на него не влияет. Эта ситуация наиболее часто встречается на практике.

На основании вышеизложенного не представляет никакого труда получить значения спектральной плотности

флуктуаций частоты и ширины спектральной линии генераторов для случая односторонней синхронизации. Предположим, что только второй генератор (захватывающий) действует на первый (захватываемый). При этом $\varepsilon_2 = 0$, $\varepsilon = \varepsilon_1 = 0$, $\mu = 2\omega_0 \varepsilon_1 / D_1$.

Согласно (9.8.46) в этом случае

$$S_{v_x}(\Omega) = \frac{\omega_0^2 \varepsilon_1^2 [D_1 I_0^{-2}(\mu) + D_2 (1 - I_0^{-2}(\mu))] + D_1 \Omega^2}{2\pi (\omega_0^2 \varepsilon_1^2 + \Omega^2)}, \quad S_{v_y}(\Omega) = \frac{D_2}{2\pi}.$$

Графики этих спектральных плотностей для $D_1 > D_2$ показаны на рис. 9.41. Как и должно быть, спектр флуктуаций частоты второго генератора не зависит от наличия синхронизации, в то время как спектр флуктуаций частоты первого генератора существенно зависит от степени синхронизации. Если синхронизация слабая, то синхронизируемый генератор почти не изменяет своих флуктуаций частоты. При увеличении степени синхронизации $S_{v_x}(0)$ начинает уменьшаться, и при сильной синхронизации, когда $\mu \gg 1$, $S_{v_x}(0) = S_{v_y}(0)$ — второй генератор полностью навязывает первому свои (медленные) флуктуации частоты. Наличие шумов первого генератора приводит лишь к достаточно быстрым (несинхронизируемым) флуктуациям частоты.

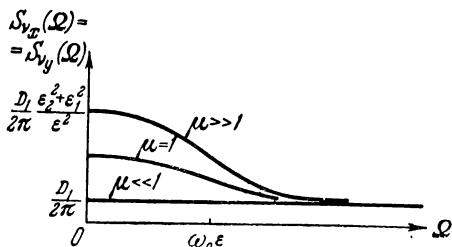


Рис. 9.40.

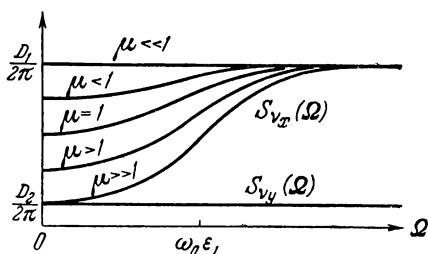


Рис. 9.41.

§ 9.8]

Из (9.8.38) нетрудно получить зависимости величины ширины спектральной линии генератора от μ для случая односторонней синхронизации

$$\Delta\Omega_x = \frac{\Delta\Omega_1}{I_0^2(\mu)} + [1 - I_0^2(\mu)] \Delta\Omega_2, \quad \Delta\Omega_y = \Delta\Omega_2. \quad (9.8.47)$$

Графики этих зависимостей даны на рис. 9.42. Из них хорошо виден характер уменьшения ширины спектральной линии синхронизируемого генератора в зависимости от степени синхронизации. Если при этом генераторы идентичны и $\Delta\Omega_1 = \Delta\Omega_2 = \Delta\Omega^*$, то из (9.8.47) следует, что $\Delta\Omega_x = \Delta\Omega_y = \Delta\Omega^*$ при любом μ : односторонняя синхронизация генераторов, обладающих одинаковой шириной спектральной линии, не изменяет ее.

11. Выше, при нахождении ширины спектральной

линии для обоих генераторов, мы полагали, что $\Delta\Omega_x = \frac{1}{2} \pi D_x$, $\Delta\Omega_y = \frac{1}{2} \pi D_y$. Эти формулы являются точными, как это следует из гл. 4, только для нормального вероятностного распределения флуктуаций фаз φ_x и φ_y . Для случаев сильной и слабой синхронизации, когда флуктуации фазы подчиняются линейным уравнениям (9.8.17) и (9.8.24), мы действительно имеем нормальное распределение для φ_x и φ_y . В случае произвольного μ уравнения для флуктуаций фаз являются нелинейными и, следовательно, вероятностное распределение фаз не является нормальным.

Поскольку в этом случае коэффициент диффузии фаз в общем случае не определяет ширину спектральной линии, то вышеуказанные формулы могут считаться только приближенными.

Если обратиться к § 9.3, где рассматривалась синхронизация генератора монохроматическим сигналом, то по аналогии с картиной спектра, указанной на рис. 9.17, можно следующим образом (рис. 9.43) качественно изобразить картину спектра генератора с шумом, синхронизируемого другим генератором с шумом (односторонняя синхронизация).

Пусть $\Delta\Omega_1 > \Delta\Omega_2$. При слабой синхронизации, когда $\mu \ll 1$, спектр первого генератора практически совпадает со спектром свободного генератора (рис. 9.43, а). При увеличении степени синхронизации часть спектральных компонент первого генератора, попадая в полосу синхронизации, преобразовывается в

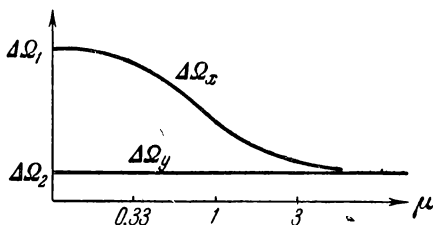


Рис. 9.42.

мощность спектральной линии, имеющей ширину $\Delta\Omega_2$ (в случае § 9.3 этой мощностью обладала монохроматическая линия). Спектр при этом имеет вид, показанный на рис. 9.43, б. При дальнейшем увеличении μ узкополосная спектральная линия, содержащаяся в спектре захваченного генератора, начинает играть все большую и большую роль (рис. 9.43, в). Наконец, при $\mu \gg 1$ спектр колебания состоит из узкополосной линии шириной $\Delta\Omega_2$ и пьедестала,

мощность которого существенно меньше мощности линии (рис. 9.43, г). В этом случае почти все спектральные компоненты первого генератора попадают в полосу синхронизации и «перерабатываются» в узкополосную линию.

Очевидно, что при $\mu \ll 1$ и при $\mu \gg 1$ мы имеем «чистую» спектральную линию с шириной соответственно $\Delta\Omega_1$ и $\Delta\Omega_2$. При $\mu \approx 1$ (этому примерно соответствует рис. 9.43, в) форма спектральной линии имеет сложный вид. Что считать за ее ширину? Формула (9.8.47) как раз и дает нам для этого

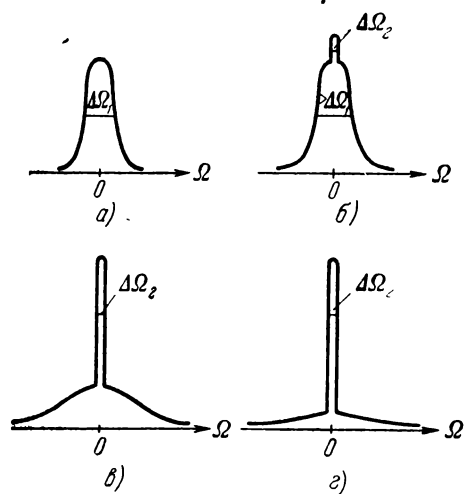


Рис. 9.43.

го случая значение $\Delta\Omega_x$, в которое с различными весами (зависящими от μ) входят $\Delta\Omega_1$ и $\Delta\Omega_2$.

Для случая взаимной синхронизации, когда оба генератора влияют друг на друга, картина спектра захваченного генератора (при $\Delta\Omega_1 > \Delta\Omega_2$) похожа на картину, изображенную на рис. 9.43, с той только разницей, что и узкополосная линия несколько увеличивает свою ширину при возрастании μ из-за влияния первого, сильно шумящего генератора.

Таким образом, формулы (9.8.38) для произвольного μ дают некоторую усредненную ширину спектральных линий генераторов, примерная форма которых дана на рис. 9.43.

Исходя из картин спектра, данных на рис. 9.23 и 9.24, можно совершенно аналогично качественно изобразить картины спектров взаимно синхронизованных генераторов с шумами, имеющих разные парциальные частоты, в зависимости от степени синхронизации μ .

ФЛУКТУАЦИИ В ЭЛЕКТРОННЫХ ГЕНЕРАТОРАХ СВЧ

Появившиеся в сороковых годах и получившие дальнейшее интенсивное развитие различные сверхвысокочастотные радиотехнические системы локации, навигации, телеметрии и т. п. потребовали большого внимания к различным генераторам СВЧ-диапазона. Повышение чувствительности подобных систем привело, в частности, к необходимости подробного изучения вопросов стабильности СВЧ-генераторов, а следовательно, и их шумов. Первые работы по изучению шумов и флуктуаций в различных СВЧ-генераторах относятся, по-видимому, к 1948 г; см. (1948 [1, 2], а также [93, 94]). В этих работах, имеющих в большинстве случаев экспериментальный характер, изучались зависимости «шумов» клистрона и магнетрона от режимов работы последних. При этом понятия «шумы клистрона» и «шумы магнетрона» вводились на основе представления спектра автоколебаний генераторов как спектра, состоящего из монохроматической линии и шумового пьедестала.

В 1954 г. в США состоялся специальный симпозиум, посвященный флуктуационным явлениям в генераторах СВЧ-диапазона. На секциях этого симпозиума были доложены результаты, главным образом экспериментальных исследований флуктуаций и шумов в клистронах, магнетронах и лампах обратной волны (1954 [5—12]). Однако большинство этих работ опять-таки опиралось на некорректные физические предпосылки с характере влияния шумов на автогенераторы: теоретические исследования флуктуаций в генераторах основывались на предположениях о том, что автоколебание генератора случайно модулируется по амплитуде и частоте шумами электронной системы и результат фильтруется селективными цепями генератора. При этом нелинейности автогенераторов совершенно не принимались во внимание.

Первое строгое рассмотрение флуктуаций в клистроне, как в автоколебательной системе, принадлежит И. Л. Берштейну (1956 [14]), получившему теоретические значения спектральной плотности амплитудных флуктуаций, коэффициента диффузии

приращения фазы и естественной ширины спектральной линии. Дальнейшие, более подробные и обстоятельные теоретические исследования естественных флуктуаций клистронного генератора, учитывающие корреляцию дробового шума в электронном потоке, рассматривающие режимы синхронизации и т. п., содержатся в работах Е. Н. Базарова, М. Е. Жаботинского (1959 [15]) и В. Н. Никонова (1959 [16]). Экспериментальные результаты исследования естественных флуктуаций в клистронах (1956 [12], 1959 [16], 1962 [8]) достаточно удовлетворительно подтвердили эти теоретические рассуждения. Таким образом, на сегодняшний день можно считать, что вопрос о естественных флуктуациях в клистроне решен достаточно удовлетворительно.

Гораздо сложнее и менее ясно дело обстоит с изучением флуктуационных явлений в магнетроне. Это связано с тем, что и в настоящее время фактически отсутствует общепринятая теория автоколебаний в магнетроне, без которой рассмотрение флуктуационных явлений становится практически беспочвенным. Тем не менее определенные результаты, хотя и сугубо приближенные, получены и в отношении флуктуаций в магнетронах. Ограничиваясь рассмотрением магнетрона как одночастотной автоколебательной системы и используя предложенный С. И. Бычковым [95] способ расчета наведенного тока, В. Н. Никонов [96] провел построение модели одночастотного стационарного режима магнетронного генератора. Это дало возможность далее В. Н. Никонову построить приближенную теорию естественных флуктуаций в магнетроне и проверить ее экспериментально (1962 [3]), обнаружив более или менее удовлетворительное совпадение теории с экспериментом. Эта работа В. Н. Никонова является, к сожалению, единственной, в которой сравнительно строго рассматривается воздействие естественных флуктуаций на процессы автоколебаний магнетрона.

Наконец, следует упомянуть работы по исследованию флуктуаций в генераторе на лампе обратной волны (1958 [7, 23]) и на лампе бегущей волны (1958 [22], 1962 [8]).

В настоящей главе мы ограничимся рассмотрением флуктуаций в режиме установившихся автоколебаний только для двух электронных генераторов СВЧ: отражательного клистрона и магнетрона.

§ 10.1. Общее уравнение одночастотного электронного генератора СВЧ

1. В настоящей главе рассматриваются флуктуации в простейших электронных генераторах СВЧ, которые в общем случае состоят из объемного резонатора и электронных потоков (зависящих от поля в резонаторе), возбуждающих резонатор.

При ограничении рассмотрения одночастотным режимом, т. е. автоколебаниями, имеющими одну фиксированную частоту, всю СВЧ-систему можно заменить некоторой эквивалентной системой, обладающей сосредоточенными параметрами. Объемный резонатор заменяется эквивалентным LCr колебательным контуром, а электронный поток — некоторым током, возбуждающим контур.

Рассмотрим систему, состоящую из произвольного замкнутого резонатора, возбуждаемого электронным потоком, в которой могут существовать автоколебания. Уравнения движения такой системы складываются прежде всего из уравнений поля:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} &= 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \\ \operatorname{div} \mathbf{H} &= 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho, \end{aligned} \quad (10.1.1)$$

с учетом определенных граничных условий на проводящей поверхности: равенства нулю тангенциальной составляющей электрического поля $\mathbf{E}_t = 0$ и нормальной составляющей магнитного поля $\mathbf{H}_n = 0$.

Реальный резонатор всегда обладает некоторыми потерями (которые мы будем полагать достаточно малыми), и поэтому свободные решения уравнений поля (при $\mathbf{j} = 0$, $\rho = 0$) всегда затухают. Поэтому с течением времени отличными от нуля являются лишь «вынужденные» решения, которые порождаются не равными нулю \mathbf{j} и ρ . Таким образом, уравнения (10.1.1) позволяют найти значения электромагнитного поля в резонаторе, порождаемого переменными токами и зарядами.

Для того чтобы в резонаторе существовал автоколебательный режим, необходима в сущности обратная связь, которая заключается в том, что токи и заряды должны в свою очередь зависеть (частично) от полей \mathbf{E} и \mathbf{H} . Другими словами, необходимо уравнение обратной связи. Для генераторов СВЧ, использующих объемные резонаторы, таким уравнением обратной связи является фактически уравнение Лоренца, описывающее движение электрона (нерелятивистское) в полях \mathbf{E} и \mathbf{H} :

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c} [\mathbf{v}\mathbf{H}]. \quad (10.1.2)$$

Здесь e — заряд электрона, \mathbf{v} — скорость движения электрона, непосредственно зависящая от переменных полей \mathbf{E} и \mathbf{H} .

Однако при объединении уравнений (10.1.1) и (10.1.2) мы еще не получим автоколебательного режима, так как не существует пока в нашей системе источника энергии, необходимого

для поддержания автоколебаний в резонаторе с потерями. Таким источником энергии может служить, например, движение электронов в некоторых постоянных во времени полях \mathbf{E}_0 , \mathbf{H}_0 , которые вводятся дополнительно в резонатор. Здесь имеется почти *) полная аналогия с ламповым генератором; для существования автоколебаний в нем между анодом и катодом должна существовать не только переменная составляющая электрического поля, но и постоянная составляющая (анодное напряжение). Тем самым, вводя полные поля $\mathbf{E}_\Sigma = \mathbf{E} + \mathbf{E}_0$, $\mathbf{H}_\Sigma = \mathbf{H} + \mathbf{H}_0$ вместо (10.1.2), мы должны записать

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = e\mathbf{E}_\Sigma + \frac{e}{c} [\mathbf{v}\mathbf{H}_\Sigma], \quad (10.1.3)$$

где \mathbf{v} — полная скорость движения электрона, определяющая как j , так и ρ . Объединяя (10.1.1) и (10.1.3), мы получаем общие уравнения генератора СВЧ, описывающие всевозможные автоколебательные режимы, существующие в нем.

2. Для рассмотрения полей \mathbf{E} и \mathbf{H} в резонаторе целесообразно применить метод собственных функций. Электрическое поле резонатора представим в виде $\mathbf{E} = \mathbf{E}' + \mathbf{E}^0$, где полагаем

$$\text{div } \mathbf{E}' = 0, \quad \text{rot } \mathbf{E}^0 = 0.$$

Тогда \mathbf{E}^0 есть потенциальная часть электрического поля, и можно ее представить как $\mathbf{E}^0 = -\text{grad } \Phi$, где Φ — потенциал поля. В этом случае для Φ получаем уравнение

$$\Delta \Phi = -4\pi\rho$$

с граничными условиями $\Phi = 0$ на поверхности резонатора.

Пусть нам известны собственные функции резонатора $\mathbf{E}_\mu(\mathbf{r})$, $\mathbf{H}_\mu(\mathbf{r})$, удовлетворяющие граничным условиям $\mathbf{E}_{\mu t} = 0$, $\mathbf{H}_{\mu n} = 0$, нормированные и ортогональные:

$$\int_V \mathbf{E}_\mu \mathbf{E}_\nu dV = \Gamma \delta_{\mu\nu}, \quad \int_V \mathbf{H}_\mu \mathbf{H}_\nu dV = \Gamma \delta_{\mu\nu},$$

где

$$\delta_{\mu\nu} = \begin{cases} 1, & \mu = \nu, \\ 0, & \mu \neq \nu, \end{cases}$$

dV — элемент объема резонатора V , по которому ведется интегрирование, Γ — некоторая единица длины.

*) Аналогия является полной для клистрона, для которого уравнение (10.1.2) фактически не содержит слагаемого $\frac{e}{c} [\mathbf{v}, \mathbf{H}]$, не позволяющего суперпозиции магнитного поля сопоставить суперпозицию скорости движения.

Поля \mathbf{H} и \mathbf{E}' могут быть разложены по собственным функциям резонатора

$$\mathbf{E}' = \sum_{\mu} e_{\mu}(t) \mathbf{E}_{\mu}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{H} = \sum_{\mu} h_{\mu}(t) \mathbf{H}_{\mu}(\mathbf{r}),$$

где амплитуды полей $e_{\mu}(t)$ и $h_{\mu}(t)$ полностью представляют \mathbf{E}' и \mathbf{H} в резонаторе и связаны соотношениями $e_{\mu} = -\frac{1}{\omega_{\mu}} \frac{dh_{\mu}}{dt}$; здесь ω_{μ} — частота μ -колебания.

Уравнения движения поля могут быть теперь записаны в терминах $e_{\mu}(t)$ и $h_{\mu}(t)$ и они принимают вид (см., например, [97])

$$\frac{d^2 i_{\mu}}{dt^2} + \omega_{\mu}^2 i_{\mu} = -\frac{\omega_{\mu}}{Q_{\mu}} \frac{di_{\mu}}{dt} + \omega_{\mu}^2 \int_V \mathbf{j} \mathbf{E}_{\mu}(\mathbf{r}) dV, \quad \mu = 1, 2, 3, \dots \quad (10.1.4)$$

Здесь Q_{μ} — добротность резонатора, соответствующая μ -колебанию; $i_{\mu} = i_{\mu}(t) = \frac{\omega_{\mu} \Gamma}{4\pi} h_{\mu}(t)$ — величина, имеющая размерность тока.

Уравнения (10.1.4) совместно с (10.1.3) представляют уравнения движения всей системы (резонатор + электронный поток) и из них следует, что общее движение может быть в общем случае представлено как в виде отдельных μ -колебаний, так и некоторых их совокупностей.

Во всякой многомодной реальной нелинейной системе с потерями всегда имеются условия, при которых колебания какого-либо типа возбуждаются «наиболее легко». Более того, при создании генераторов СВЧ синусоидальных колебаний специально стремятся обеспечить существование одночастотного режима, при котором система (10.1.4) и (10.1.3) допускает существование устойчивого автоколебательного режима с частотой, близкой к одной из нормальных частот системы.

Предполагая существование одночастотного режима, близкого по частоте к ω_1 , можно вместо системы (10.1.4) взять одно уравнение (записывая i вместо i_1 , Q вместо Q_1)

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \omega_1^2 i = -\frac{\omega_1}{Q} \frac{di}{dt} + \omega_1^2 \int_V \mathbf{j} \mathbf{E}_1(\mathbf{r}) dV. \quad (10.1.5)$$

В уравнении обратной связи (10.1.3), во-первых, можно в $\mathbf{E}_{\Sigma} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}' + \mathbf{E}^0$ опустить \mathbf{E}^0 , если пренебрегать влиянием пространственного заряда (например, расталкиванием электронов в потоке), а во-вторых, следует вместо \mathbf{E}' и \mathbf{H} подставлять

$$\mathbf{E}' = -\frac{4\pi}{\omega_1^2} \frac{1}{\Gamma} \mathbf{E}_1(\mathbf{r}) \frac{di}{dt} \quad \text{и} \quad \mathbf{H} = \frac{4\pi}{\omega_1} \frac{1}{\Gamma} \mathbf{H}_1(\mathbf{r}) i(t). \quad (10.1.6)$$

Вычисляя плотность тока j и подставляя ее в (10.1.5), нетрудно убедиться в том, что интеграл является фактически функцией (в общем случае нелинейной) от $i(t)$ и $di(t)/dt$, и тем самым (10.1.5) может быть записано в обычном виде как для обычной автоколебательной системы с одной степенью свободы:

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \omega_1^2 i = F\left(i, \frac{di}{dt}\right). \quad (10.1.7)$$

Будем полагать объемный резонатор достаточно высокодобротным, а нелинейности, создаваемые электронным пучком, достаточно малыми, тогда наша система будет близка к консервативной и функция $F(i, di/dt)$, в которую входят потери и нелинейности, будет мала в полном соответствии с § 5.2.

Имея уравнения (10.1.5) и (10.1.6), нетрудно видеть, что всю рассматриваемую систему (резонатор + электронный поток) можно (для одночастотного режима) заменить эквивалентным колебательным контуром с добротностью Q , собственной частотой ω_1 и волновым сопротивлением ρ_1 . При этом i можно рассматривать как ток в цепи контура, который возбуждается

«внешним» током, равным $\int_V j E_1 dV$.

3. До сих пор мы оставляли в стороне рассмотрение флуктуаций, существующих в электронном генераторе СВЧ, обсудим теперь их источники. В генераторах СВЧ-диапазона существуют, прежде всего, тепловые флуктуации, описываемые формулой Найквиста, до тех пор, пока не учитываются квантовые эффекты. Наличие тепловых шумов резонатора вследствие существования его потерь приводит к существованию флуктуационного электромагнитного поля с компонентами $E_{фл}$, $H_{фл}$. Поэтому можно было бы уже в уравнении поля (10.1.1), помимо j и ρ , ввести флуктуационные тепловые сторонние ЭДС (токи и заряды) методом, разработанным в [22], а затем их соответственно вышеизложенному преобразовать, в результате чего в правую часть (10.1.7) вошел бы дополнительный флуктуационный тепловой член. Однако это слагаемое может быть написано сразу, поскольку известны все параметры эквивалентного колебательного контура и в том числе сопротивление его потерь $r = \rho_1/Q$, которое дает всю информацию о тепловых шумах, соответствующих уравнению (10.1.5).

Кроме тепловых шумов, генерируемых стенками резонатора, имеются шумы в электронном потоке. К ним относятся дробовой шум и фликкерный шум. Вследствие этого вместо j следует писать $j + j_{др} + j_{ф}$ и в правую часть (10.1.7) войдут слагаемые

§ 10.2]

$$\omega_1^2 \int_V \mathbf{j}_{\text{др}} \mathbf{E}_1 dV + \omega_1^2 \int_V \mathbf{j}_{\text{ф}} \mathbf{E}_1 dV. \text{ Таким образом, будем иметь}$$

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \omega_1^2 i = F\left(i, \frac{di}{dt}\right) + \omega_1^2 E(t), \quad (10.1.8)$$

где $E(t)$ включает в себя все три шума и является достаточно малой случайной функцией. Полученное уравнение уже полностью соответствует основному уравнению § 5.2, анализ его нам известен, и, таким образом, при принятых предположениях вся специфика одночастотных генераторов СВЧ заключается в виде функций $F(i, di/dt)$ и $E(t)$.

Отметим, что если имеются флуктуации тех или иных параметров генераторов СВЧ, то в силу их малости, как это имело место и для других генераторов, они войдут в правую часть (10.1.8) в виде $\mathcal{E}(t, i, di/dt)$.

§ 10.2. Уравнения движения и флуктуационные уравнения отражательного клистрона

Наиболее распространенным типом клистрона является отражательный клистрон, обладающий одним объемным резонатором, который пронизывается электронным потоком дважды.

1. Рассмотрим обычный отражательный клистрон, в котором характерные геометрические размеры резонатора много меньше длины волны возбуждаемого в нем собственного колебания. Тогда эти колебания можно считать квазистационарными. Среди них мы рассмотрим для простоты такие, в которых электрическое и магнитное поля можно считать раздельно локализованными. Тем самым можно рассматривать сосредоточенную емкость и сосредоточенную индуктивность. Такой подход существенно упрощает рассмотрение и вместе с тем сохраняет ценность основных выводов и на более общий случай.

Электронный поток обычно пронизывает ту часть резонатора, которая является по существу конденсатором — сосредоточенной емкостью. Схема такого клистрона изображена на рис. 10.1. Ось z выбираем по направлению электронного потока и будем считать, что плоскость конденсатора перпендикулярна оси z . В этом случае \mathbf{E}_1 имеет составляющую только вдоль оси z . Условие квазистационарности означает, что в пределах конденсатора напряженность электрического поля \mathbf{E}_1 постоянна. Из условия нормировки можно найти ее величину. Выбирая за постоянную

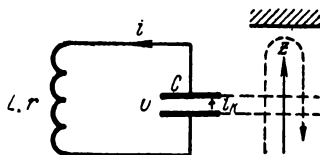


Рис. 10.1.

нормировки $\Gamma = s_0/d$, где s_0 — площадь пластин, а d — расстояние между пластинами, нетрудно получить

$$s_0/d = \Gamma = \int_V E_1^2 dV = E_1^2 \int_V dV = E_1^2 s_0 d.$$

Отсюда получаем $E_1 = 1/d$. Тем самым интеграл в правой части (10.1.5) запишется в виде

$$\int_V \frac{j_z(t, \mathbf{r})}{d} dV.$$

Предположим, во-первых, что в электронном потоке все электроны движутся параллельно оси z , а движениями электронов в направлении, перпендикулярном оси z можно пренебречь. Во-вторых, пренебрежем электронами, оседающими на сетках конденсатора. В-третьих, пренебрежем кулоновским взаимодействием между электронами в потоке. И в-четвертых, пренебрежем временем пролета электронов между сетками. При этом электронный поток при своем движении через конденсатор (к отражателю и обратно) практически не изменяется, и тогда

$$\frac{1}{d} \int_V j_z(t, \mathbf{r}) dV = \frac{s_e}{d} \int_0^d j_z(z, t) dz = s_e j_z(t) = i_k(t).$$

Здесь s_e — площадь поперечного сечения пучка электронов, $i_k(t)$ — полный конвекционный ток, проходящий через конденсатор.

Таким образом, вместо (10.1.5) имеем

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \omega_1^2 i = -\frac{\omega_1}{Q} \frac{di}{dt} + \omega_1^2 i_k(t). \quad (10.2.1)$$

Следовательно, уравнение движения отражательного клистрона эквивалентно уравнению движения обычного колебательного контура, возбуждаемого конвекционным током, текущим между обкладками конденсатора.

2. Уравнение (10.2.1) есть прямое уравнение; теперь необходимо найти уравнение обратной связи, выражающее зависимость конвекционного тока i_k от тока через контур i или, например, от напряжения на конденсаторе u .

Вследствие того, что электронный поток пронизывает конденсатор дважды, причем второй раз в обратном направлении и с некоторым запаздыванием, полный конвекционный ток, равный алгебраической сумме токов, зависит в данный момент времени от напряжения на конденсаторе в некоторый предшествующий момент времени, причем, если напряжение на конденса-

торе v , например, не изменяется во времени, то $i_k(t) \equiv 0$, так как в любой момент времени часть конвекционного тока, связанная с электронами, возвращающимися от отражателя, полностью компенсируется другой частью, связанной с электронами, направляющимися к отражателю.

Рассматривая движение электронов в пространстве резонатор — отражатель, где имеется тормозящее электрическое поле, можно найти следующую связь между моментом времени t_1 (моментом прохождения электронами сеток конденсатора при движении к отражателю) и моментом времени t (моментом прохождения теми же электронами сеток конденсатора при обратном движении от отражателя):

$$t = t_1 + \tau_0 + av(t_1), \quad \tau_0 = 2 \sqrt{\frac{2m_e U_a}{e}} \frac{l}{U_0}, \quad a = \frac{\tau_0}{2U_a}. \quad (10.2.2)$$

Здесь m_e , e — масса и заряд электрона; τ_0 — время пролета электрона от резонатора к отражателю (на расстояние l) и обратно при равенстве нулю напряжения на конденсаторе; U_a — напряжение на резонаторе относительно катода; U_0 — постоянное напряжение на резонаторе клистрона относительно отражателя.

Обозначим ток, текущий от катода к резонатору, через I_0 , этот ток является постоянным во времени и $I_0 dt_1$ есть количество заряда, поступавшее в конденсатор от катода за время dt_1 . Ток, текущий от отражателя к резонатору обратно, I_k содержит переменную составляющую, ибо он промодулирован переменным напряжением v . Произведение $I_k(t) dt$ есть заряд, вышедший из конденсатора в направлении от отражателя за время dt . Тогда, предполагая, что все электроны, летящие к отражателю, возвращаются обратно, можно записать закон сохранения заряда в виде

$$I_0 dt_1 = I_k(t) dt.$$

Отсюда можно найти переменную составляющую конвекционного тока $i_k(t)$, возбуждающего контур:

$$i_k(t) = I(v) = I_k - I_0 = I_0 \left[\frac{1}{\frac{dt}{dt_1}} - 1 \right] = I_0 \left[\frac{1}{1 + a \left(\frac{dv}{dt} \right)_{t=t_1}} - 1 \right]. \quad (10.2.3)$$

Эта формула действительно показывает, что $i_k(t)$ отличен от нуля только в случае существования переменного напряжения между пластинами конденсатора; для $v = \text{const}$, как уже отмечалось, $i_k = 0$.

То, что i_k в момент t определяется производной dv/dt в предшествующий момент времени $t_1 < t$ объясняется задержкой,

связанной с пролетом электронов от резонатора к отражателю и обратно. Таким образом, обратная связь в клистроне есть обратная связь с задержкой.

Рассмотрим теперь флуктуации в клистроне. Учет тепловых шумов дает ЭДС тепловых шумов $\mathcal{E}_T(t)$ в эквивалентной схеме рис. 10.2 со спектральной плотностью, соответствующей сопротивлению потерь r .

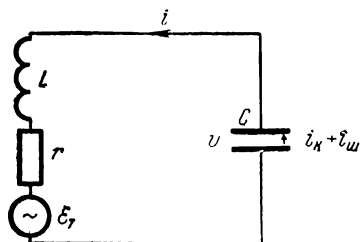


Рис. 10.2.

Дробовой шум имеет место как в электронном потоке, идущем к отражателю, так и в обратном потоке. Из-за задержки дробовой шум в отраженном потоке является уже другим, и поэтому он не вычитается полностью из дробового шума прямого потока. Тем самым можно

говорить об интерференции для каждой фурье-компоненты дробового шума. Эта интерференция существенно зависит от времени пролета (1959 [16]).

Аналогичная интерференция имеет место и для фликкерного шума электронного потока.

Обозначим случайную составляющую прямого конвекционного тока через $i_{ш}(t)$, а обратного — $i'_{ш}(t)$. Случайный конвекционный ток, подходящий к резонатору от катода в момент t_1 , равен $i_{ш}(t_1)$, а случайный конвекционный ток, выходящий из резонатора в момент t , равен $i'_{ш}(t)$. На основании закона сохранения заряда $i_{ш}(t_1) dt_1 = i'_{ш}(t) dt$. Отсюда нетрудно получить следующее значение полного случайного тока, возбуждающего резонатор в момент t :

$$j_{ш} = j_{ш}(t, v) = i'_{ш}(t) - i_{ш}(t) = \frac{i_{ш}(t_1)}{1 + \frac{\tau_0}{2U_a} \left(\frac{dv}{dt} \right)_{t=t_1}} - i_{ш}(t). \quad (10.2.4)$$

3. Теперь можно, наконец, написать полные уравнения движения. Записывая их в виде системы двух уравнений первого порядка, для схемы рис. 10.2 получим

$$L \frac{di}{dt} + ri = -\mathcal{E}_T + v, \quad C \frac{dv}{dt} + i = i_k + j_{ш}. \quad (10.2.5)$$

Исключая из этих уравнений ток через индуктивность i , получим

$$LC \frac{d^2v}{dt^2} + rC \frac{dv}{dt} + v = L \frac{d}{dt} I(v) + rI(v) + L \frac{d}{dt} j_{ш} + rj_{ш} + \mathcal{E}_T.$$

Введя обозначения

$$\omega_1^2 = 1/LC, \quad v = x, \quad F(x, \dot{x}) = L\omega_1^2 \frac{d}{dt} I(x) + r\omega_1^2 I(x) - rC\omega_1^2 \dot{x},$$

$$E = E(t, x) = L \frac{dj_m}{dt} + rj_m + \mathcal{E}_r,$$

будем иметь окончательно

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_1^2 x = F(x, \dot{x}) + \omega_1^2 E(t, x).$$

Применяя к этому уравнению результаты, полученные в § 5.2, можно сразу написать, во-первых, уравнения для установившихся значений амплитуды R_0 и поправки на частоту $\Delta\omega_0$ автоколебаний:

$$\Phi(\omega_1, R_0) = 0, \quad \Delta\omega_0 = -\frac{1}{2\omega_1 R_0} \Psi(\omega_1, R_0)$$

и, во-вторых, флуктуационные уравнения ($\psi = \omega_0 t + \varphi$):

$$\frac{d\alpha}{dt} = -p\alpha - \frac{\omega_1}{2R_0} \frac{2}{T_1} \int_{t-T_1}^t E(\xi, x) \sin \psi d\xi, \quad (10.2.6)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = -q\alpha - \frac{\omega_1}{2R_0} \frac{2}{T_1} \int_{t-T_1}^t E(\xi, x) \cos \psi d\xi.$$

Найдем функции $\Phi(\omega_1, R)$ и $\Psi(\omega_1, R)$. Согласно § 5.2

$$\Phi(\omega_1, R) =$$

$$\Psi(\omega_1, R) =$$

$$= \frac{2}{T_1} \int_{T_1} \left\{ L\omega_1^2 \frac{d}{dt} I(R \cos \psi) + r\omega_1^2 I(R \cos \psi) + rC\omega_1^3 R \sin \psi \right\} \frac{\sin \psi}{\cos \psi} dt.$$

Нетрудно проверить, что для функции $I(v)$

$$\begin{aligned} \frac{2}{T_1} \int_{T_1} \frac{dI}{dt} \sin \psi dt &= -\omega_1 \frac{2}{T_1} \int_{T_1} I \cos \psi dt, \\ \frac{2}{T_1} \int_{T_1} \frac{dI}{dt} \cos \psi dt &= \omega_1 \frac{2}{T_1} \int_{T_1} I \sin \psi dt. \end{aligned} \quad (10.2.7)$$

Принимая во внимание (10.2.3), нетрудно получить

$$\begin{aligned} \frac{2}{T_1} \int_{T_1} I(R \cos \psi) \left\{ \frac{\sin \psi}{\cos \psi} \right\} dt &= 2 \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} I(R \cos \psi) \left\{ \frac{\sin \psi}{\cos \psi} \right\} d\psi = \\ &= 2I_0 \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{1}{1 - s \sin \psi_1} \left\{ \frac{\sin \psi}{\cos \psi} \right\} dt, \end{aligned}$$

где $s = a\omega_1 R$, $\psi_1 = \omega_0 t_1 + \varphi$. Совершая замену переменных и учитывая (10.2.2), найдем окончательно

$$\begin{aligned} \frac{1}{T_1} \int_{T_1} I(R \cos \psi) \sin \psi dt &= \\ &= 2I_0 \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \sin(\xi + \theta + s \cos \xi) d\xi = 2I_0 \cos \theta J_1(s), \end{aligned} \quad (10.2.8)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{T_1} \int_{T_1} I(R \cos \psi) \cos \psi dt &= \\ &= 2I_0 \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \cos(\xi + \theta + s \cos \xi) d\xi = -2I_0 \sin \theta J_1(s), \end{aligned}$$

где $\theta = \omega_1 \tau_0$, $J_1(s)$ — функция Бесселя первого рода первого порядка.

Вводя добротность резонатора клистрона $Q = L\omega_1/2 = 1/r\omega_1 C$, волновое сопротивление $Z_B = L\omega_1 = 1/\omega_1 C$, обозначая $Z_B I_0 = U_1$, используя (10.2.7) и (10.2.8), получим окончательно

$$\begin{aligned} \Phi(\omega_1, R) &= \omega_1^2 \frac{R}{Q} + \omega_1^2 2U_1 \left[\sin \theta + \frac{1}{Q} \cos \theta \right] J_1(a\omega_1 R), \\ \Psi(\omega_1, R) &= \omega_1^2 2U_1 \left[\cos \theta - \frac{1}{Q} \sin \theta \right] J_1(a\omega_1 R). \end{aligned}$$

Таким образом, уравнение для R_0 и выражение для $\Delta\omega_0$ принимают вид

$$\begin{aligned} R_0 &= -2QU_1 \left[\sin \theta + \frac{1}{Q} \cos \theta \right] J_1(a\omega_1 R_0), \\ \Delta\omega_0 &= -\frac{\omega_1 U_1}{R_0} \left[\cos \theta - \frac{1}{Q} \sin \theta \right] J_1(a\omega_1 R_0). \end{aligned} \quad (10.2.9)$$

На основании (5.2.17) нетрудно найти прочность предельного цикла и неизохронность клистрона:

$$\begin{aligned} p &= \omega_1 \left[\frac{1}{2Q} + a\omega_1 U_1 \left(\sin \theta + \frac{1}{Q} \cos \theta \right) J_1'(a\omega_1 R_0) \right], \\ q &= -\frac{\omega_1 U_1}{R_0} \left[\cos \theta - \frac{1}{Q} \sin \theta \right] [J_1(a\omega_1 R_0) - a\omega_1 R_0 J_1'(a\omega_1 R_0)]. \end{aligned} \quad (10.2.10)$$

Здесь $J_1'(s)$ — производная функция Бесселя по аргументу.

Рассмотрим теперь флуктуационные члены в уравнениях (10.2.6). Поскольку ЭДС тепловых шумов $\mathcal{E}_\tau(t)$ не зависит от x , то

$$\begin{aligned}\frac{2}{T_0} \int_{t-T_0}^t \mathcal{E}_\tau(\xi) \sin \psi d\xi &= (-e_\perp \cos \varphi + e_\parallel \sin \varphi), \\ \frac{2}{T_0} \int_{t-T_0}^t \mathcal{E}_\tau(\xi) \cos \psi d\xi &= (e_\parallel \cos \varphi + e_\perp \sin \varphi),\end{aligned}$$

где $e_\parallel = e_\parallel(t)$ и $e_\perp = e_\perp(t)$ определены через $\mathcal{E}_\tau(t)$ согласно (5.2.15). С шумами $j_\text{ш}(t, v)$ тока через конденсатор дело обстоит сложнее, поскольку они зависят от $(dx/dt)_{t-t_1}$. Производя громоздкие, но в сущности простые вычисления, можно найти:

$$\begin{aligned}\frac{2}{T_1} \int_{t-T_1}^t j_\text{ш}(\xi, x) \sin \psi d\xi &\equiv Z_b^{-1} F_s(t, \varphi) = \\ &= d_0 I_{\parallel 0}(t - \tau_0) + I_{\perp 1}(t) \cos \varphi - I_{\parallel 1}(t) \sin \varphi + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ [-c_n I_{\perp n}(t - \tau_0) + d_n I_{\parallel n}(t - \tau_0)] \cos n \left(\varphi - \frac{\pi}{2} \right) + \right. \\ &\quad \left. + [c_n I_{\parallel n}(t - \tau_0) + d_n I_{\perp n}(t - \tau_0)] \sin n \left(\varphi - \frac{\pi}{2} \right) \right\}, \\ &- \frac{2}{T_1} \int_{t-T_1}^t j_\text{ш}(\xi, x) \cos \psi d\xi \equiv Z_b^{-1} F_c(t, \varphi) = \\ &= b_0 I_{\parallel 0}(t - \tau_0) + I_{\parallel 1}(t) \cos \varphi + I_{\perp 1}(t) \sin \varphi + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ [-a_n I_{\perp n}(t - \tau_0) + b_n I_{\parallel n}(t - \tau_0)] \cos n \left(\varphi - \frac{\pi}{2} \right) + \right. \\ &\quad \left. + [a_n I_{\parallel n}(t - \tau_0) + b_n I_{\perp n}(t - \tau_0)] \sin n \left(\varphi - \frac{\pi}{2} \right) \right\}.\end{aligned}\tag{10.2.11}$$

Здесь введены следующие обозначения ($n = 1, 2, 3, \dots$):

$$\begin{aligned}I_{\parallel 0}(t) &= \frac{1}{T_1} \int_{t-T_1}^t 2i_\text{ш}(\xi) d\xi, \quad I_{\parallel n}(t) = \frac{1}{T_1} \int_{t-T_1}^t 2i_\text{ш}(\xi) \cos n\omega_0 \xi d\xi, \\ I_{\perp n}(t) &= -\frac{1}{T_1} \int_{t-T_1}^t 2i_\text{ш}(\xi) \sin n\omega_0 \xi d\xi,\end{aligned}\tag{10.2.12}$$

$$\begin{aligned}
 b_0 &= \sin \theta J_1(s_0), \quad d_0 = b_0 \operatorname{ctg} \theta, \quad s_0 = a\omega_1 R_0 \approx a\omega_0 R_0, \\
 a_n &= \cos \theta [(-1)^{n-1} J_{n-1}(s_0) - J_{n+1}(s_0)], \\
 b_n &= \sin \theta [(-1)^{n-1} J_{n-1}(s_0) + J_{n+1}(s_0)], \\
 c_n &= -a_n \operatorname{tg} \theta, \quad d_n = b_n \operatorname{ctg} \theta.
 \end{aligned} \tag{10.2.13}$$

Нетрудно видеть, что $I_{\parallel n}(t)$ и $I_{\perp n}(t)$ являются, как всегда, функциями медленными по сравнению с $\cos \omega_0 t$. Учитывая (10.2.7) и собирая вместе все слагаемые, найдем

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{T_1} \int_{t-T_1}^t E(\xi, x) \sin \psi d\xi &= F_c(t, \varphi) + \frac{r}{Z_B} F_s(t, \varphi) - e_{\perp} \cos \varphi + e_{\parallel} \sin \varphi, \\
 \frac{1}{T_1} \int_{t-T_1}^t E(\xi, x) \cos \psi d\xi &= F_s(t, \varphi) - \frac{r}{Z_B} F_c(t, \varphi) + e_{\parallel} \cos \varphi + e_{\perp} \sin \varphi.
 \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в (3.2.14), найдем окончательные флуктуационные уравнения клистрона:

$$\begin{aligned}
 \frac{da}{dt} &= -pa + \frac{\omega_1}{2R_0} (e_{\perp} \cos \varphi - e_{\parallel} \sin \varphi) - \\
 &\quad - \frac{\omega_1}{2R_0} \left[F_c(t, \varphi) + \frac{1}{Q} F_s(t, \varphi) \right], \\
 v = \frac{d\varphi}{dt} &= -qa - \frac{\omega_1}{2R_0} (e_{\parallel} \cos \varphi + e_{\perp} \sin \varphi) - \\
 &\quad - \frac{\omega_1}{2R_0} \left[F_s(t, \varphi) - \frac{1}{Q} F_c(t, \varphi) \right].
 \end{aligned} \tag{10.2.14}$$

Эти уравнения отличаются от флуктуационных уравнений обычного генератора в основном тем, что кроме флуктуационных компонент, спектр которых лежит вблизи частоты ω_0 , присутствуют компоненты, спектр которых лежит как вблизи нулевой частоты, так и вблизи всех гармоник. Другими словами, в амплитудные и фазовые флуктуации клистрона дают вклад все компоненты шума $i_{\text{ш}}(t)$, спектр которых лежит вблизи $n\omega_0$, $n=0, 1, 2, \dots$ Причина этого заключается в том, что шум $i_{\text{ш}}(t)$ нелинейно модулирован колебательным напряжением на эквивалентной емкости резонатора клистрона.

Кроме того, наличие запаздывающей обратной связи приводит к зависимости флуктуационных функций F_c и F_s не только от t , но и от τ_0 .

4. Рассмотрим статистические свойства случайных функций, стоящих в правой части (10.2.14).

В § 5.2 были найдены функции корреляции и спектральные плотности случайных функций $e_{\parallel}(t)$ и $e_{\perp}(t)$. Обратимся теперь

к $I_{\parallel n}(t)$ и $I_{\perp n}(t)$, где $n=0, 1, 2, 3, \dots$. Выделим особо случай $n=0$ и начнем с него. Итак (учитывая, что $\omega_0 \approx \omega_1$),

$$I_{\parallel 0}(t) = \frac{1}{T_0} \int_{t-T_0}^t 2i_{\text{ш}}(\xi) d\xi = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} i_{\text{ш}}(y+t-T_0) dy,$$

где T_0 — период автоколебания, $i_{\text{ш}}(t)$ — случайная стационарная функция с нулевым средним значением, функцией корреляции $\Phi_{\text{ш}}(\tau)$ и спектральной плотностью $S_{\text{ш}}(\omega)$. Перемножая и усредняя, получим

$$\begin{aligned} K_{\parallel 0}[t, t+\tau] &= \langle I_{\parallel 0}(t) I_{\parallel 0}(t+\tau) \rangle = \\ &= \frac{4}{T_0^2} \int_0^{T_0} \int_0^{T_0} \Phi_{\text{ш}}(\tau+y-x) dx dy \equiv \Phi_{\parallel 0}(\tau). \end{aligned}$$

Таким образом, $I_{\parallel 0}(t)$ — стационарная случайная функция. Выражая функцию корреляции через $S_{\text{ш}}(\omega)$, найдем

$$\Phi_{\parallel 0}(\tau) = 4 \int_{-\infty}^{+\infty} S_{\text{ш}}(\omega) \frac{2}{\omega^2 T_0^2} [1 - \cos \omega T_0] \cos \omega \tau d\omega.$$

Таким образом, точное значение $S_{\parallel 0}(\omega)$ — спектральной плотности функции $I_{\parallel 0}(t)$, равной фурье-сопряженной от $\Phi_{\parallel 0}(\tau)$, равно

$$S_{\parallel 0}(\omega) = 4S_{\text{ш}}(\omega) \frac{2}{\omega^2 T_0^2} [1 - \cos \omega T_0].$$

Поскольку нас интересует поведение $S_{\parallel 0}(\omega)$ в полосе частот ω , где $\omega T_0 \ll 1$, то вместо точного значения $S_{\parallel 0}(\omega)$ можно взять следующее приближенное:

$$S_{\parallel 0}(\omega) = 4S_{\text{ш}}(\omega). \quad (10.2.15)$$

Тем самым приближенное значение функции корреляции

$$\Phi_{\parallel 0}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} 4S_{\text{ш}}(\omega) \cos \omega \tau d\omega = 4\Phi_{\text{ш}}(\tau). \quad (10.2.16)$$

Если, в частности, $S_{\text{ш}}(\omega) = S_0$, то

$$S_{\parallel 0}(\omega) = 4S_0, \quad \Phi_{\parallel 0}(\tau) = 8\pi S_0 \delta(\tau). \quad (10.2.17)$$

Перейдем теперь к случаю произвольного n .

$$I_{\parallel n}(t) = \frac{2}{T_0} \int_{t-T_0}^t i_{\text{ш}}(\xi) \cos \omega_0 n \xi d\xi = \\ = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} i_{\text{ш}}(y+t-T_0) \cos n\omega_0(y+t-T_0) dy,$$

$$I_{\perp n}(t) = -\frac{1}{T_0} \int_{t-T_0}^t 2i_{\text{ш}}(\xi) \sin \omega_0 n \xi d\xi = \\ = -\frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} i_{\text{ш}}(y+t-T_0) \sin n\omega_0(y+t-T_0) dy.$$

Перемножая и усредняя, получим (отбрасывая, как и в § 5.2, осциллирующие члены):

$$\langle I_{\parallel n}(t) I_{\parallel n}(t+\tau) \rangle = \\ = \frac{2}{T_0^2} \int_0^{T_0} \int_0^{T_0} \Phi_{\text{ш}}(\tau+y-x) \cos n\omega_0(\tau+y-x) dy dx \equiv \Phi_{\parallel n}(\tau) = \Phi_{\perp n}(\tau),$$

$$\langle I_{\parallel n}(t) I_{\parallel m}(t+\tau) \rangle = \langle I_{\parallel n}(t) I_{\perp m}(t+\tau) \rangle = \\ = \Phi_{\parallel n m} = \Phi_{\parallel n \perp m} = \Phi_{\perp n \perp m} = 0 \quad (n \neq m),$$

$$\langle I_{\parallel n}(t) I_{\perp n}(t+\tau) \rangle = \\ = -\frac{2}{T_0^2} \int_0^{T_0} \int_0^{T_0} \Phi_{\text{ш}}(\tau+y-x) \sin n\omega_0(\tau+y-x) dx dy = \\ = \Phi_{\parallel \perp n}(\tau) = -\Phi_{\perp \parallel n}(\tau).$$

При этом нетрудно показать, что $\Phi_{\parallel \perp n}(\tau)$ есть нечетная функция τ и, следовательно,

$$\Phi_{\parallel \perp n}^1(\tau) = -\frac{2}{T_0^2} \int_0^{T_0} \int_0^{T_0} \Phi_{\text{ш}}(\tau+y-x) \sin n\omega_0(\tau+y-x) dx dy, \\ \Phi_{\parallel \perp n}^0(\tau) \equiv 0.$$

Таким образом, функции $I_{\parallel n}(t)$ и $I_{\perp n}(t)$ можно считать стационарными.

Если теперь в этих формулах $\Phi_{\text{ш}}$ выразить через $S_{\text{ш}}(\omega)$, то будем иметь (ограничиваясь опять-таки приближенными значениями согласно вышесказанному)

$$\begin{aligned}\Phi_{\parallel n}(\tau) &= \Phi_{\perp n}(\tau) = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} [S_{\text{ш}}(n\omega_0 + \omega) + S_{\text{ш}}(n\omega_0 - \omega)] \cos \omega \tau d\omega, \\ \Phi_{\parallel \perp n}^1(\tau) &= \int_{-\infty}^{+\infty} [S_{\text{ш}}(n\omega_0 + \omega) - S_{\text{ш}}(n\omega_0 - \omega)] \sin \omega \tau d\omega.\end{aligned}\quad (10.2.18)$$

Следовательно, спектральные плотности $I_{\parallel n}(t)$ и $I_{\perp n}(t)$ равны ($n=1, 2, 3, \dots$)

$$\begin{aligned}S_{\parallel n}(\omega) &= S_{\perp n}(\omega) = S_{\text{ш}}(n\omega_0 + \omega) + S_{\text{ш}}(n\omega_0 - \omega), \\ S_{\parallel \perp n}^1(\omega) &= S_{\text{ш}}(n\omega_0 + \omega) - S_{\text{ш}}(n\omega_0 - \omega), \quad S_{\parallel \perp n}^0(\omega) \equiv 0.\end{aligned}\quad (10.2.19)$$

Если, в частности, $S_{\text{ш}}(\omega) = S_0 = \text{const}$, то

$$\begin{aligned}S_{\parallel n}(\omega) &= S_{\perp n}(\omega) = 2S_0, \quad S_{\parallel \perp n}^{0,1}(\omega) = 0, \\ \Phi_{\parallel n}(\tau) &= \Phi_{\perp n}(\tau) = 4\pi S_0 \delta(\tau), \quad \Phi_{\parallel \perp n}^{0,1}(\tau) = 0.\end{aligned}\quad (10.2.20)$$

Заметим, что при любой форме спектра $S_{\text{ш}}(\omega)$ мы получили статистическую независимость между любыми случайными функциями $I_{\parallel n}(t)$, $I_{\perp n}(t)$, $I_{\parallel m}(t)$, $I_{\perp m}(t)$, взятыми для разных значений индексов n и m . Это связано с тем, что части спектра $S_{\text{ш}}(\omega)$, порождающие эти случайные функции, не перекрываются.

5. Обратимся к динамическим характеристикам клистрона. Из первого уравнения (10.2.9) можно найти условие самовозбуждения, которое принимает вид

$$-\theta \left[\sin \theta + \frac{1}{Q} \cos \theta \right] > \frac{2U_a}{QU_1}. \quad (10.2.21)$$

Это неравенство определяет зоны возбуждения — области значений θ , где существуют устойчивые автоколебания с амплитудой R_0 . Неравенство (10.2.21) является точным. Его можно заменить следующим приближенным (если учесть, что $Q \gg 1$ и что $2U_a$ и U_1 имеют одинаковый порядок):

$$-\sin \theta > 0.$$

Таким образом, нетрудно видеть, что зоны генерации лежат между $\pi + 2\pi n$ и $2\pi + 2\pi n$, где $n=0, 1, 2, \dots$ — номер зоны генерации. Из второго уравнения (10.2.9) следует, что при

$$\cos \theta - \frac{1}{Q} \sin \theta = 0$$

поправка на частоту равна нулю и клистрон можно считать изохронным генератором. Корень этого уравнения θ_n , лежащий внутри n -й зоны генерации, назовем центром зоны генерации. Нетрудно видеть, что

$$\theta_n = \frac{3\pi}{2} - \frac{1}{Q} + 2\pi n, \quad \cos \theta_n = -\frac{1}{Q}, \quad \sin \theta_n = -1. \quad (10.2.22)$$

Амплитуда автоколебания, равная нулю на границах зон генерации, обладает максимумом, находящимся где-то внутри зон. Приближенно можно полагать, что она максимальна в центре зон, причем ее значение в центре зоны зависит от номера зоны генерации.

Объединяя обе формулы (10.2.9), поправку на частоту можно записать в виде

$$\Delta\omega_0 = \frac{\omega_1}{2Q} T(\theta), \quad T(\theta) = \frac{\cos \theta - \frac{1}{Q} \sin \theta}{\sin \theta + \frac{1}{Q} \cos \theta}. \quad (10.2.23)$$

Можно показать, что функция $T(\theta)$ максимальна на краях зон генерации, принимая значения $\pm \frac{QU_1}{2U_a} \theta$, равные соответственно $\frac{QU_1}{2U_a} (\pi + 2\pi n)$ и $-\frac{QU_1}{2U_a} (2\pi + 2\pi n)$, и равна нулю в центре зон. Ее вид показан на рис. 10.3.

Хотя $\Delta\omega_0$ от R_0 непосредственно не зависит, клистрон вне центра зон генерации нельзя считать изохронным генератором, ибо все же зависимость $\Delta\omega_0$ от R_0 имеется через посредство θ .

Из (10.2.10) можно найти следующее соотношение между q и p :

$$q = p2Q \frac{\Delta\omega_0}{\omega_1} = pT(\theta). \quad (10.2.24)$$

Слева и справа от центра зоны генерации неизохронность имеет разные знаки.

Найдем теперь приближенные значения R_0 и p в центре

n -й зоны генерации. Первое уравнение в (10.2.9) в центре n -й зоны генерации примет вид

$$R_0 = 2QU_1 J_1(s_n), \quad s_n = \frac{\theta_n R_0}{2U_a}.$$

Умножая на $\theta_n/2U_a$ левую и правую части, нетрудно получить

$$J_1(s_n) = s_n A, \quad A = U_a/(U_1 Q \theta_n). \quad (10.2.25)$$

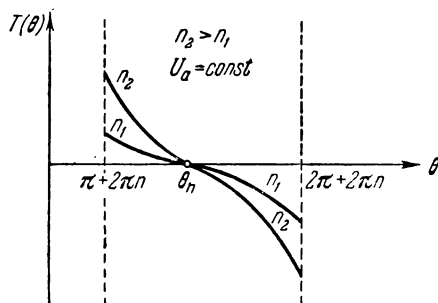


Рис. 10.3.

Поскольку $A \ll 1$ для любого n , то в качестве корня (10.2.25) можно взять наименьший корень уравнения

$$J_1(s_n) = 0,$$

который равен 3,82. Таким образом, в центре n -й зоны имеем приближенно

$$s_n \approx 3,82, \quad R_0 = 7,64 \frac{U_a}{\theta_n} \approx \frac{7,64 U_a}{\frac{3\pi}{2} + 2\pi n}. \quad (10.2.26)$$

Отсюда следует, что с возрастанием номера зоны генерации амплитуда автоколебаний клистрона в центре зоны уменьшается.

Принимая во внимание, что $J'_1(3,82) = -0,38$, из (10.2.10) нетрудно найти следующее значение прочности предельного цикла для центра зон генерации:

$$p = p_n = \frac{\omega_1}{2Q} + \omega_1 0,2 \frac{U_1}{U_a} \theta_n = \omega_1 \left[\frac{1}{2Q} + 0,38 a \omega_1 U_1 \right]. \quad (10.2.27)$$

Таким образом, прочность предельного цикла в центре зоны возрастает с ростом номера зоны. Для клистронов можно считать выполненным неравенство

$$\frac{\omega_1}{2Q} \ll \omega_1 0,2 \frac{U_1}{U_a} \theta_n.$$

В этом случае

$$p_n \approx \omega_1 0,2 \frac{U_1}{U_a} \theta_n = 0,38 \omega_1^2 a U_1. \quad (10.2.28)$$

§ 10.3. Естественные флуктуации отражательного клистрона

1. Пусть в клистронном генераторе существуют только тепловые шумы $\mathcal{E}_T(t)$ и дробовые шумы $i(t) = i_{\text{др}}(t)$, являющиеся дельта-коррелированными и независимыми.

Согласно § 5.2 и формуле (10.2.20) независимыми и дельта-коррелированными будут также $e_{\parallel}(t)$, $e_{\perp}(t)$ и компоненты I , которые для разных n и m независимы, а для $n = m$ дельта-коррелированы. Таким образом, все медленные случайные функции, входящие в (10.2.14), дельта-коррелированы и независимы между собой. Вследствие этого к (10.2.14) можно применить метод уравнения ЭФП, распространив его (что можно сделать без особого труда на основании п. 8 § 1.9) на случай любого числа дельта-коррелированных случайных функций ξ , η , удовлетворяющих всем нужным условиям.

Рассчитаем в первом приближении коэффициенты K_{ij} , пользуясь формулами (1.9.28) — (1.9.33). Поскольку $Q \gg 1$, то пренебрежем слагаемыми $Q^{-1}F_s$ и $Q^{-1}F_c$ в правых частях (10.2.14).

Прежде всего получаем

$$K_{10}(\alpha, \varphi) = -p\alpha, \quad K_{01}(\alpha, \varphi) = -q\alpha.$$

Для нахождения других коэффициентов вычислим сначала корреляционные функции K_{II} , K_{HH} , K_{IH} , где через $I = I(\alpha, \varphi, e_{\parallel}, e_{\perp}, I_{\parallel n}, I_{\perp n})$ и $H = H(\alpha, \varphi, e_{\parallel}, e_{\perp}, I_{\parallel n}, I_{\perp n})$ обозначены правые части уравнений (10.2.14) для α и φ соответственно.

После простых, но громоздких вычислений, используя формулы (10.2.17) и (10.2.20), можно получить:

$$\begin{aligned} K_{II}[\alpha, \varphi, \tau] &= p^2\alpha^2 + \frac{\omega_1^2}{4R_0^2} D_{\tau}\delta(\tau) + \\ &+ \frac{\omega_1^2}{4R_0^2} D_{\text{др}} \left\{ \delta(\tau) \left[1 + 2b_0^2 + \sum_1^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \right] - a_1 [\delta(\tau - \tau_0) + \delta(\tau + \tau_0)] \right\}, \\ K_{HH}[\alpha, \varphi, \tau] &= q^2\alpha^2 + \frac{\omega_1^2}{4R_0^2} D_{\tau}\delta(\tau) + \\ &+ \frac{\omega_1^2}{4R_0^2} D_{\text{др}} \left\{ \delta(\tau) \left[1 + 2d_0^2 + \sum_1^{\infty} (c_n^2 + d_n^2) \right] - d_1 [\delta(\tau - \tau_0) + \delta(\tau + \tau_0)] \right\}, \\ K_{IH}[\alpha, \varphi, \tau] &= pq\alpha^2 + \\ &+ \frac{\omega_1^2}{4R_0^2} D_{\text{др}} \left\{ \delta(\tau) \left[2b_0d_0 + \sum_1^{\infty} (a_nc_n + b_nd_n) \right] - c_1\delta(\tau - \tau_0) \right\}, \end{aligned} \quad (10.3.1)$$

где

$$D_{\tau} = 4\pi S_{\tau}(\omega) = 4kTr, \quad D_{\text{др}} = Z_s^2 4\pi S_{\text{др}}(\omega) = 2Z_s^2 eI_0 \Gamma^2 = \frac{2eI_0 \Gamma^2}{\omega_1^2 C^2}.$$

Отсюда нетрудно найти:

$$\begin{aligned} K_{20}(\alpha, \varphi) &= \frac{\omega_1^2}{4R_0^2} D_{\tau} + \frac{\omega_1^2}{4R_0^2} D_{\text{др}} \left[1 + 2b_0^2 + \sum_1^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \right], \\ K_{02}(\alpha, \varphi) &= \frac{\omega_1^2}{4R_0^2} D_{\tau} + \frac{\omega_1^2}{4R_0^2} D_{\text{др}} \left[1 + 2d_0^2 + \sum_1^{\infty} (c_n^2 + d_n^2) \right], \\ K_{11}(\alpha, \varphi) &= \frac{\omega_1^2}{4R_0^2} D_{\text{др}} \left[2b_0d_0 + \sum_1^{\infty} (a_nc_n + b_nd_n) \right]. \end{aligned}$$

Поскольку ни один из коэффициентов K_{ij} не зависит от φ , то уравнениями, статистически эквивалентными (10.2.14), будут,

например, линейные уравнения, получаемые из (10.2.14) при подстановке в правых частях значения $\varphi = \pi/2$:

$$\frac{d\alpha}{dt} = -p\alpha + \frac{\omega_1}{2R_0} F_{\parallel}(t), \quad \frac{d\varphi}{dt} = -q\alpha + \frac{\omega_1}{2R_0} F_{\perp}(t), \quad (10.3.2)$$

где

$$\begin{aligned} F_{\parallel}(t) &= e_{\parallel}(t) - Z_b \left[b_0 I_{\parallel 0}(t - \tau_0) + I_{\perp 1}(t) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_1^{\infty} (-a_n I_{\perp n}(t - \tau_0) + b_n I_{\parallel n}(t - \tau_0)) \right], \\ F_{\perp}(t) &= e_{\perp}(t) - Z_b \left[d_0 I_{\parallel 0}(t - \tau_0) - I_{\parallel 1}(t) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_1^{\infty} (-c_n I_{\perp n}(t - \tau_0) + d_n I_{\parallel n}(t - \tau_0)) \right]. \end{aligned} \quad (10.3.3)$$

С этими уравнениями мы и будем теперь иметь дело. Функции корреляции случайных процессов $F_{\perp}(t)$ и $F_{\parallel}(t)$ равны, как легко видеть,

$$\begin{aligned} \Phi_{\perp}(\tau) &= [K_{HH}[\alpha, \varphi, \tau] - q^2 \alpha^2] \frac{4R_0^2}{\omega_1^2}, \\ \Phi_{\parallel}(\tau) &= [K_{II}[\alpha, \varphi, \tau] - p^2 \alpha^2] \frac{4R_0^2}{\omega_1^2}, \\ \Phi_{\parallel \perp}(\tau) &= [K_{IH}[\alpha, \varphi, \tau] - pq \alpha^2] \frac{4R_0^2}{\omega_1^2}, \end{aligned}$$

где K_{II} , K_{HH} , K_{IH} даны формулами (10.3.1). Нетрудно найти четную и нечетную части функции корреляции $\Phi_{\parallel \perp}(\tau)$:

$$\begin{aligned} \Phi_{\parallel \perp}^0(\tau) &= \left\{ \frac{1}{2} [K_{IH}[\alpha, \varphi, \tau] + K_{IH}[\alpha, \varphi, -\tau]] - pq \alpha^2 \right\} \frac{4R_0^2}{\omega_1^2}, \\ \Phi_{\parallel \perp}^1(\tau) &= \left\{ \frac{1}{2} [K_{IH}[\alpha, \varphi, \tau] - K_{IH}[\alpha, \varphi, -\tau]] - pq \alpha^2 \right\} \frac{4R_0^2}{\omega_1^2}. \end{aligned}$$

Принимая во внимание значения a_n , b_n , c_n , d_n , заданные формулами (10.2.13), используя следующие две формулы для функций Бесселя:

$$J_0^2(z) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} J_k^2(z) = 1, \quad J_1^2(z) + 2 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k J_k(z) J_{k+2}(z) = J_2(2z),$$

можно после громоздких, но несложных вычислений найти:

$$\begin{aligned} 1 + 2b_0^2 + \sum_1^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) &= 2 - J_2(2a\omega_0 R_0) \cos 2\omega_1 \tau_0, \\ 1 + 2d_0^2 + \sum_1^{\infty} (c_n^2 + d_n^2) &= 2 + J_2(2a\omega_0 R_0) \cos 2\omega_1 \tau_0, \\ 2b_0 d_0 + \sum_1^{\infty} (a_n c_n + b_n d_n) &= J_2(2a\omega_0 R_0) \sin 2\omega_1 \tau_0. \end{aligned}$$

Подставляя эти суммы в (10.3.1), найдем следующие окончательные выражения для функций корреляции:

$$\begin{aligned} \Phi_{\parallel}(\tau) &= D_{\tau} \delta(\tau) + D_{\text{др}} \delta(\tau) [2 - J_2(2s_0) \cos 2\theta] - \\ &\quad - D_{\text{др}} [\delta(\tau - \tau_0) + \delta(\tau + \tau_0)] \cos \theta [J_0(s_0) - J_2(s_0)], \\ \Phi_{\perp}(\tau) &= D_{\tau} \delta(\tau) + D_{\text{др}} \delta(\tau) [2 + J_2(2s_0) \cos 2\theta] - \\ &\quad - D_{\text{др}} [\delta(\tau - \tau_0) + \delta(\tau + \tau_0)] \cos \theta [J_0(s_0) + J_2(s_0)], \\ \Phi_{\parallel \perp}^0(\tau) &= D_{\text{др}} \delta(\tau) \sin 2\theta J_2(2s_0) + \\ &\quad + D_{\text{др}} [\delta(\tau - \tau_0) + \delta(\tau + \tau_0)] \frac{\sin \theta}{2} [J_0(s_0) - J_2(s_0)], \\ \Phi_{\parallel \perp}^1(\tau) &= D_{\text{др}} [\delta(\tau - \tau_0) - \delta(\tau + \tau_0)] \frac{\sin \theta}{2} [J_0(s_0) - J_2(s_0)]. \quad (10.3.4) \end{aligned}$$

Совершая фурье-преобразования, нетрудно получить соответствующие им спектральные плотности:

$$\begin{aligned} S_{\parallel}(\omega) &= \frac{1}{2\pi} [D_{\tau} + D_{\text{др}} [2 - J_2(2s_0) \cos 2\theta]] - \\ &\quad - D_{\text{др}} \frac{\cos \theta}{\pi} [J_0(s_0) - J_2(s_0)] \cos \omega \tau_0, \\ S_{\perp}(\omega) &= \frac{1}{2\pi} [D_{\tau} + D_{\text{др}} [2 + J_2(2s_0) \cos 2\theta]] - \\ &\quad - D_{\text{др}} \frac{\cos \theta}{\pi} [J_0(s_0) + J_2(s_0)] \cos \omega \tau_0, \\ S_{\parallel \perp}^0(\omega) &= \frac{D_{\text{др}}}{2\pi} \sin 2\theta J_2(2s_0) + D_{\text{др}} \frac{\sin \theta}{2\pi} [J_0(s_0) - J_2(s_0)] \cos \omega \tau_0, \\ S_{\parallel \perp}^1(\omega) &= D_{\text{др}} \frac{\sin \theta}{2\pi} [J_0(s_0) - J_2(s_0)] \sin \omega \tau_0. \quad (10.3.5) \end{aligned}$$

Прежде чем делать дальнейшие расчеты, обсудим полученные результаты. Вид функций $F_{\parallel}(t)$ и $F_{\perp}(t)$, определенных формулами (10.3.3), показывает, что в амплитудные и фазовые флуктуации клистрона дает свой вклад не только та часть дробового шума, спектр которой расположен в районе частоты

автоколебания ω_0 , но и те части шума, спектры которых расположены в районах $n\omega_0$ ($n=0, 1, 2, \dots$). Это новый эффект, которого не было для обычных генераторов. Он является следствием модуляции автоколебаниями электронного потока, пронизывающего конденсатор клистрона. Периодическая нестационарность дробового шума привела к тому, что функции корреляции случайных процессов $F_{\parallel}(t)$ и $F_{\perp}(t)$, действующих на амплитуду и фазу автоколебаний обыкновенным для автогенератора образом (ср. уравнение (10.3.2) с (5.3.8)), зависят от параметров клистрона и параметров автоколебания (a, ω_1, R_0, θ). Это значит, что и статистические характеристики флуктуаций амплитуды, и частоты клистрона должны сильно зависеть от режима его работы.

Как хорошо известно, модуляция белого шума не меняет его характера, т. е. модулированный белый шум остается белым шумом, а изменяться может лишь величина его спектральной плотности. Это находит свое отражение в существовании слагаемого $D_{\text{др}} [2 \pm J_2(2a\omega_0 R) \cos 2\theta] \delta(\tau)$ в формулах для функций корреляции. Двойка в скобке связана с тем, что сказываются интенсивности дробового шума в прямом и отраженном потоках, а $\pm J_2(2a\omega_0 R) \cos 2\theta$ отражает влияние режима вследствие наличия модуляции электронного потока (без модуляции $a=0$).

Последние слагаемые в Φ_{\parallel} и Φ_{\perp} , которые пропорциональны $[\delta(\tau - \tau_0) + \delta(\tau + \tau_0)]$, связаны с интерференцией шумов в прямом и отраженном потоках. Это же является и причиной появления не равных нулю совместных функций корреляции $\Phi_{\parallel \perp}^{0,1}$, которые для обычного генератора тождественно равны нулю.

Таким образом, особенности принципа действия клистрона отражаются и в его шумовых характеристиках.

Наличие интерференции сказывается на спектральных плотностях S_{\parallel} , S_{\perp} , $S_{\parallel \perp}$ весьма интересным образом. Помимо слагаемых, не зависящих от частоты, имеется слагаемое, пропорциональное $\cos \omega\tau_0$, причем «глубина модуляции» спектральных плотностей зависит от $\theta = \omega_0\tau_0$. В центре зон генерации «модуляции» нет у S_{\parallel} и S_{\perp} , а у $S_{\parallel \perp}^0$ она максимальна. Что же касается совместной спектральной плотности $S_{\parallel \perp}^1(\omega)$, то она вообще пропорциональна $\sin \omega\tau_0$ и «амплитуда» ее максимальна в центре зон генерации клистрона.

Заметим, наконец, что если в Φ_{\parallel} и Φ_{\perp} дают свой вклад и дробовые, и тепловые шумы, то совместные функции корреляции и спектральные плотности порождаются только дробовыми шумами.

2. Амплитудные флуктуации. Рассмотрим первое уравнение (10.3.2). На основании (10.3.4) и (2.2.29) нетрудно

найти следующую функцию корреляции естественных амплитудных флуктуаций клистрона (для $\tau > 0$):

$$\Phi_{\alpha}(\tau) = \frac{\omega_1^2}{8pR_0^2} \{ [D_{\tau} + D_{\text{др}}(2 - J_2(2s_0) \cos 2\theta)] e^{-p\tau} - D_{\text{др}} \cos \theta [J_0(s_0) - J_2(s_0)] [e^{-p|\tau - \tau_0|} + e^{-p(\tau + \tau_0)}] \}.$$

Общий вид зависимости Φ_{α} от τ показан на рис. 10.4. Поскольку для реальных генераторов $p \ll \omega_0$, а для клистрона $\omega_0 \tau_0$ для

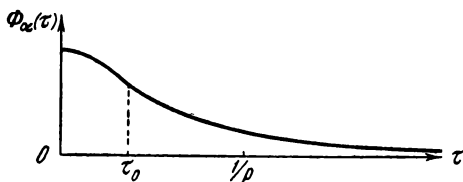


Рис. 10.4.

первой зоны генерации не более 2π , то $p\tau_0 \ll 1$. При этом точную формулу для $\Phi_{\alpha}(\tau)$ можно заменить следующей приближенной:

$$\Phi_{\alpha}(\tau) = \frac{\omega_1^2}{8R_0^2 p} \{ D_{\tau} + D_{\text{др}} Q_3(\theta, s_0) \} e^{-p|\tau|}, \quad (10.3.6)$$

где $Q_3(\theta, s_0) = 2 - J_2(2s_0) \cos 2\theta - 2 [J_0(s_0) - J_2(s_0)] \cos \theta$.

Интенсивность амплитудных флуктуаций клистрона равна

$$\langle \alpha^2 \rangle = \frac{\omega_1^2}{8R_0^2 p} \{ D_{\tau} + D_{\text{др}} Q_3(\theta, s_0) \} \quad (10.3.7)$$

и, следовательно, довольно сильно зависит от режима работы клистрона и, в частности, от номера зоны генерации.

Совершая фурье-преобразование (10.3.6), находим приближенное значение спектральной плотности амплитудных флуктуаций клистрона:

$$S_{\alpha}(\Omega) = \frac{p \langle \alpha^2 \rangle / \pi}{\Omega^2 + p^2} = \frac{\omega_1^2 [D_{\tau} + D_{\text{др}} Q_3(\theta, s_0)]}{8\pi R_0^2 (\Omega^2 + p^2)}, \quad (10.3.8)$$

полностью совпадающей по форме со спектральной плотностью амплитудных флуктуаций LC-генератора. Эту формулу, естественно, можно получить и из точной (которая находится согласно (10.3.5) и (2.2.32)), полагая $\cos \Omega \tau_0 = 1$, поскольку из всего спектра $S_{\parallel}(\Omega)$ знаменатель «вырезает» низкочастотную часть шириной p .

Исследуем теперь зависимость амплитудных флуктуаций от режима клистрона более подробно. Поскольку p максимально примерно в центре зоны и спадает до нуля на краях, от $\theta - \theta_n$ зависит прежде всего ширина спектра амплитудных флуктуаций. Она максимальна в центре зоны и становится сколь угодно малой на краях. Рассмотрим зависимость $S_\alpha(0) = \frac{1}{\pi} \frac{\langle \alpha^2 \rangle}{p}$ от $\theta - \theta_n$. Принимая во внимание (10.2.21), (10.2.22) и (10.3.7), найдем

$$S_\alpha(0) = \frac{1}{64\pi} \frac{-\sin \theta}{U_1^2 \left[-\sin \theta - 2 \frac{U_a}{U_1} Q^{-1} \theta^{-1} \right]^3} [D_r + D_{ap} Q_3(\theta, s_0)]. \quad (10.3.9)$$

Примерный вид зависимости $S_\alpha(0)$ от $\theta - \theta_n$ показан на рис. 10.5. Пунктиром показаны граничные значения $\theta - \theta_n$, на которых прочность предельного цикла обращается в нуль, а $S_\alpha(0) \rightarrow \infty$. На граничных значениях θ интенсивность амплитудных флуктуаций $\langle \alpha^2 \rangle$ также становится сколь угодно большой. Расходимость $\langle \alpha^2 \rangle$ связана с тем, что при $p=0$ уравнение для амплитудных флуктуаций принимает вид $\frac{d\alpha}{dt} = \frac{\omega_1}{4R_0^2} F_{\parallel}(t)$, а его

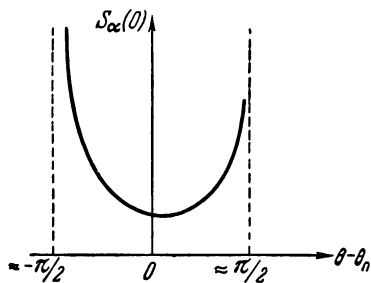


Рис. 10.5.

решение, при дельта-коррелированной $F_{\parallel}(t)$, является нестационарной случайной функцией, дисперсия которой возрастает по диффузионному закону. Такая ситуация имеет место и для обычного автогенератора на пороге самовозбуждения. И в этом отношении клистрон полностью подобен LC -генератору, ибо границы зон генерации — это и есть границы, пороги самовозбуждения.

Из формулы (10.3.9) нетрудно увидеть несимметричную зависимость $S_\alpha(0)$ от $\theta - \theta_n$, что и отражено на рис. 10.5. При отрицательных значениях $\theta - \theta_n$ $S_\alpha(0)$ возрастает заметно быстрее, чем при положительных значениях $\theta - \theta_n$. Это связано с тем, что прочность предельного цикла, определяемая первой формулой (10.2.10), также несимметрична относительно $\theta - \theta_n$ и принимает меньшие значения при отрицательных $\theta - \theta_n$, чем при таких же положительных. Заметим, что это обстоятельство находит свое отражение в том известном из эксперимента факте, что амплитудные флуктуации клистрона при расстройке его от центра зоны на половинную мощность заметно больше для $\theta < \theta_n$, чем для $\theta > \theta_n$.

Поскольку значение прочности предельного цикла в центре зон пропорционально θ_n , то с возрастанием номера зоны пропорционально ему возрастает ширина спектра амплитудных флуктуаций, а максимальное значение спектральной плотности $S_\alpha(\theta)$, пропорциональное

$$D_T + D_{др} [2 + J_2(2s_0)] \approx D_T + D_{др} [2 + J_2(7,62)],$$

практически не зависит от n . Следовательно, для большого θ_n интенсивность амплитудных флуктуаций $\langle \alpha^2 \rangle$ возрастает пропорционально n .

3. Частотные флуктуации. Рассмотрим второе уравнение (10.3.2). На основании (10.3.4) и (2.3.11) находим функцию корреляции флуктуаций частоты клистрона $\nu = d\varphi/dt$ ($\tau > 0$):

$$\begin{aligned} \Phi_\nu(\tau) = & q^2 \Phi_\alpha(\tau) + \frac{\omega_1^2}{4R_0^2} \Phi_\perp(\tau) - \\ & - \frac{\omega_1^2}{4R_0^2} q D_{др} \left\{ \sin 2\theta J_2(2s_0) e^{-\rho\tau} + \sin \theta [J_0(s_0) - J_2(s_0)] \times \right. \\ & \left. \times \left[e^{-\rho(\tau+\tau_0)} + \begin{pmatrix} e^{-\rho(\tau_0-\tau)}, & \tau < \tau_0 \\ 1/2, & \tau = \tau_0 \\ 0, & \tau > \tau_0 \end{pmatrix} \right] \right\}. \end{aligned}$$

При $q \neq 0$ эта формула является весьма громоздкой и сложной для анализа. Можно только указать на наличие разрыва в ней в точке $\tau = \tau_0$.

Более обозримой является спектральная плотность флуктуаций частоты, которую нетрудно записать с помощью (2.3.20) на основании (10.3.5):

$$\begin{aligned} S_\nu(\Omega) = & q^2 S_\alpha(\Omega) + \frac{\omega_1^2}{4R_0^2} S_\perp(\Omega) - \\ & - \frac{\omega_1^2}{4R_0^2 \pi} \frac{q D_{др}}{\Omega^2 + p^2} \{ p \sin 2\theta J_2(2s_0) + \sin \theta [J_0(s_0) - J_2(s_0)] \times \\ & \times [p \cos \Omega \tau_0 + \Omega \sin \Omega \tau_0] \}. \end{aligned}$$

Эту точную формулу можно заменить следующей приближенной, учитывая, что $\rho\tau_0 \ll 1$, и принимая во внимание (10.2.20):

$$S_\nu(\Omega) = \frac{p \langle \alpha^2 \rangle \operatorname{ctg}^2 \theta}{\pi \left(1 + \frac{\Omega^2}{p^2} \right)} - \frac{\omega_1^2}{4R_0^2} \frac{D_{др} \operatorname{ctg} \theta Q_2(\theta, s_0)}{\pi \left(1 + \frac{\Omega^2}{p^2} \right)} + \frac{\omega_1^2}{4R_0^2} S_\perp(\Omega). \quad (10.3.10)$$

Здесь введено обозначение

$$Q_2(\theta, s_0) = J_2(2s_0) - \sin 2\theta + [J_0(s_0) - J_2(s_0)] \sin \theta.$$

Первые два слагаемых этой формулы отражают влияние амплитудных флуктуаций клистрона на частотные и стремятся к нулю при возрастании Ω/ρ . Последнее слагаемое (см. (10.3.5)) содержит член, не зависящий от частоты, и член, пропорциональный $\cos \Omega\tau_0$. Примерный вид $S_v(\Omega)$ при произвольном θ показан на рис. 10.6.

Можно показать, что спектральная плотность $S_v(0)$ внутри зоны генерации ведет себя аналогично $S_\alpha(0)$ — она минимальна в центре и неограниченно возрастает при приближении к краям зоны генерации. Напомним, что все исследуемые спектральные плотности, в том числе и $S_v(\Omega)$ справедливо представляются соответствующими формулами только для частот $\Omega \ll \omega_0$. Поэтому кривая $S_v(\Omega)$, показанная на рис. 10.6, будет справедливой лишь при условии, что частота автоколебаний много больше $2\pi/\tau_0$, например, $\omega_0 > 8 \cdot 2\pi/\tau_0$. Это означает, что $\theta > 2\pi \cdot 8$ и что, следовательно, клистрон работает по крайней мере в восьмой зоне генерации. Если же, например, клистрон работает в первой зоне генерации, то следует рассматривать $S_v(\Omega)$, заданную формулой (10.3.10), только для $|\Omega| \ll \ll 3\pi/2\tau_0$. Если клистрон работает в центре зон генерации, то неизохронность равна нулю и влияние амплитудных флуктуаций на частотные пропадает. При этом

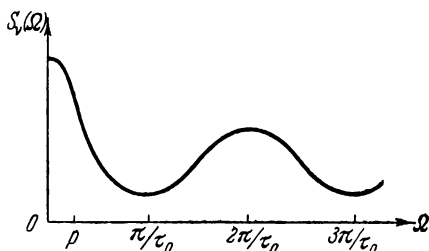


Рис. 10.6.

$$S_v(\Omega) = \frac{\omega_1^2}{8R_0^2\pi} \{D_\tau + D_{\text{др}} [2 - J_2(2s_0)]\}.$$

Таким образом, в центре зон генерации спектральная плотность флуктуаций частоты является постоянной и $v(t)$ можно считать белым шумом. Если рассматривать зависимость $S_v(\Omega)$ от номера зон, то последняя формула примет вид (полагая $R_0^2 \approx 60U_a^2/\theta_n^2$)

$$S_v(\Omega) = \frac{\omega_1^2}{8 \cdot 60U_a^2} \{D_\tau + D_{\text{др}} [2 - J_2(7,62)]\} \theta_n^2. \quad (10.3.11)$$

Следовательно, $S_v(\Omega)$ сильно возрастает с увеличением номера зоны и это увеличение $S_v(\Omega)$ с ростом n фактически обязано соответственному уменьшению R_0^2 .

4. Корреляция амплитудных и частотных флуктуаций. Рассмотрим совместные функции корреляции

и спектральные плотности. Из уравнений (10.3.2) на основании (2.3.19) нетрудно получить (для $\tau > 0$)

$$\Phi_{av}^0(\tau) = q\Phi_a(\tau) + \frac{\omega_1^2}{8R_0^2} D_{\text{дп}} \left\{ \sin 2\theta J_2(2s_0) e^{-p\tau} + \sin \theta [J_0(s_0) - J_2(s_0)] \times \right. \\ \left. \times \left[e^{-p(\tau+\tau_0)} + \begin{pmatrix} e^{-p(\tau_0-\tau)}, & \tau < \tau_0 \\ 1/2, & \tau = \tau_0 \\ 0, & \tau > \tau_0 \end{pmatrix} \right] \right\},$$

$$\Phi_{av}^1(\tau) = -\frac{\omega_1^2 D_{\text{дп}}}{8R_0^2} \left\{ \sin 2\theta J_2(2s_0) e^{-p\tau} + \sin \theta [J_0(s_0) - J_2(s_0)] \times \right. \\ \left. \times \left[e^{-p(\tau+\tau_0)} - \begin{pmatrix} e^{-p(\tau_0-\tau)}, & \tau < \tau_0 \\ 1/2, & \tau = \tau_0 \\ 0, & \tau > \tau_0 \end{pmatrix} \right] \right\}.$$

Характерной чертой этих функций корреляции является то, что они существуют не только в случае неизохронности генератора, но и при $q=0$, что является следствием существования корреляции между $F_{\parallel}(t)$ и $F_{\perp}(t)$.

Совместные спектральные плотности S_{av}^0 и S_{av}^1 могут быть найдены или соответствующими фурье-преобразованиями Φ_{av}^0 и Φ_{av}^1 , или непосредственно, на основании (2.3.21):

$$S_{av}^0(\Omega) = -qS_a(\Omega) + \frac{\omega_1^2 D_{\text{дп}}}{4R_0^2} \frac{1}{2\pi(\Omega^2 + p^2)} \{ p \sin 2\theta J_2(2s_0) + \\ + \sin \theta [J_0(s_0) - J_2(s_0)] [p \cos \Omega\tau_0 + \Omega \sin \Omega\tau_0] \},$$

$$S_{av}^1(\Omega) = -\frac{\omega_1^2 D_{\text{дп}}}{4R_0^2} \frac{1}{2\pi(\Omega^2 + p^2)} \{ \Omega \sin 2\theta J_2(2s_0) + \\ + \sin \theta [J_0(s_0) - J_2(s_0)] [\Omega \cos \Omega\tau_0 - p \sin \Omega\tau_0] \}.$$

Полученные точные формулы можно заменить приближенными, учитывая, что $p\tau_0 \ll 1$:

$$S_{av}^0(\Omega) = \frac{\omega_1^2}{8\pi R_0^2(\Omega^2 + p^2)} [pD_{\text{дп}}Q_2(\theta, s_0) - q[D_{\tau} + D_{\text{дп}}Q_3(\theta, s_0)]], \\ S_{av}^1(\Omega) = -\frac{\omega_1^2 D_{\text{дп}}Q_2(\theta, s_0)}{8\pi R_0^2} \frac{\Omega}{\Omega^2 + p^2}. \quad (10.3.12)$$

Этим приближенным формулам соответствуют приближенные функции корреляции ($\tau > 0$)

$$\begin{aligned}\Phi_{av}^0(\tau) &= \left\{ -q \langle \alpha^2 \rangle + \frac{\omega_1^2 D_{др}}{8R_0^2} Q_2(\theta, s_0) \right\} e^{-p\tau}, \\ \Phi_{av}^1(\tau) &= -\frac{\omega_1^2 D_{др}}{8R_0^2} Q_2(\theta, s_0) e^{-p\tau}.\end{aligned}\quad (10.3.13)$$

Нетрудно показать, что для фиксированной частоты Ω совместные спектральные плотности минимальны в центре зон генерации и неограниченно возрастают при приближении к границам вследствие изменения внутри зоны R_0^2 и p . В центре зон генерации ($p \approx \omega_1 \frac{U_1}{2U_a} \theta_n$)

$$\begin{aligned}S_{av}^0(\Omega) &\approx \frac{\omega_1 D_{др}}{8\pi 30 U_a U_1} [J_2(3,82) - J_0(3,82)] \theta_n \frac{1}{1 + \Omega^2/p^2}, \\ S_{av}^1(\Omega) &\approx -\frac{\omega_1 D_{др}}{8\pi 30 U_a U_1} [J_2(3,82) - J_0(3,82)] \theta_n \frac{\Omega/p}{1 + \Omega^2/p^2}.\end{aligned}\quad (10.3.14)$$

С увеличением номера зоны увеличивается, во-первых, абсолютная величина спектральных плотностей и, во-вторых, ширина спектров.

5. Естественная ширина спектральной линии. Выше мы получили выражение для $S_v(\Omega)$, из которого следует, что ширина спектра флуктуаций частоты много больше $S_v(0)$. В этом случае, согласно § 4.5, ширина спектральной линии равна $\Delta\Omega = \pi^2 S_v(0)$.

Таким образом, естественная ширина спектральной линии отражательного клистрона дается следующей формулой:

$$\begin{aligned}\Delta\Omega &= \frac{\pi\omega_1^2}{8R_0^2} \left\{ \frac{q^2}{p^2} [D_\tau + D_{др} Q_3(\theta, s_0)] - \right. \\ &\quad \left. - \frac{2q}{p} D_{др} Q_2(\theta, s_0) + D_\tau + D_{др} Q_1(\theta, s_0) \right\},\end{aligned}\quad (10.3.15)$$

где

$$Q_1(\theta, s_0) = 2 + J_2(2s_0) \cos 2\theta - 2[J(s_0) + J_2(s_0)] \cos \theta.$$

Нетрудно видеть, что $\Delta\Omega$ сильно изменяется внутри зоны генерации; она минимальна в центре и неограниченно возрастает при приближении к краям. В центре n -й зоны генерации ширина спектральной линии равна на основании (10.3.11)

$$\Delta\Omega = \Delta\Omega_{ц} \approx \frac{\pi^2 \omega_1^2}{8 \cdot 60 U_a^2} \{D_\tau + D_{др} [2 - J_2(7,62)]\} \theta_n^2 \quad (10.3.16)$$

и, как видно, сильно возрастает с ростом номера зоны.

Распишем более подробно выражение для $\Delta\Omega_{\text{ц}}$. Подставляя значения $D_{\text{т}}$ и $D_{\text{др}}$, получим

$$\Delta\Omega_{\text{ц}} = \frac{\pi\omega_1^2}{4R_0^2} \{2kTr + eI_0\Gamma^2 Q^2 r^2 [2 - J_2(7,62)]\}.$$

Вычисляя квадратные скобки и выражая ширину спектральной линии в герцах, будем иметь

$$\Delta F_{\text{ц}} = \frac{\omega_1^2}{8R_0^2} \{2kTr + 2,2eI_0\Gamma^2 Q^2 r^2\}.$$

Поскольку для клистрона величина R_0^2 не может быть непосредственно измерена, удобнее $\Delta F_{\text{ц}}$ выразить через мощность колебания. Обозначая через $P_{\text{г}}$ колебательную мощность, будем

иметь $P_{\text{г}} = \frac{R_0^2}{2Z_{\text{ое}}}$, где $Z_{\text{ое}} = Q^2 r = QZ_{\text{в}} = Q/\omega_1 C$ — резонансное сопротивление контура (резонатора). Итак, в центре зоны

$$\Delta F_{\text{ц}} = \frac{\omega_1^2}{8P_{\text{г}}} \left[\frac{kT}{Q^2} + 1,1eI_0\Gamma^2 r \right] = \frac{\omega_1}{8P_{\text{г}}QC} \left[\frac{kT}{Z_{\text{ое}}} + 1,1eI_0\Gamma^2 \right]. \quad (10.3.17)$$

Нетрудно оценить относительный вклад дробового и теплового шума в естественную ширину спектральной линии

$$\frac{\text{дроб.}}{\text{тепл.}} = \frac{1,1eI_0\Gamma^2}{kT} \frac{Q}{\omega_1 C}. \quad (10.3.18)$$

6. Естественная форма спектральной линии. Поскольку у отражательного клистрона амплитудные и частотные флуктуации коррелированы во всех точках зон генерации, то форма линии, следовательно, всегда будет несимметричной. Она будет складываться из узкополосного пика и пьедестала, как и для обычного неизохронного LC -генератора. Рассмотрим ее более подробно с помощью результатов, полученных в § 4.6. Прежде всего заметим, что условие $\langle \alpha^2 \rangle \ll 1$ выполнено. На основании (4.6.22) и (10.3.12) нетрудно получить

$$\tilde{S}_{\alpha \Delta\Phi}^0(\Omega) = \frac{\omega_1^2 D_{\text{др}} Q_2(\theta, s_0)}{8\pi R_0^2 (\Omega^2 + p^2)}, \quad (10.3.19)$$

$$\tilde{S}_{\alpha \Delta\Phi}^1(\Omega) = \frac{\omega_1^2}{8\pi R_0^2} \left[-\frac{2}{p} [D_{\text{т}} + D_{\text{др}} Q_3(\theta, s_0)] + D_{\text{др}} Q_2(\theta, s_0) \right] \frac{\Omega/p}{\Omega^2 + p^2}.$$

Сравнивая эти спектральные плотности с (10.3.8), видим, что S_{α} и $\tilde{S}_{\alpha \Delta\Phi}^{0,1}$ одного порядка малости.

В таком случае естественная форма спектральной линии клистрона состоит из узкополосного почти симметричного пика и

несимметричного пьедестала и ее компоненты определяются, согласно § 4.6, формулами (4.6.26):

$$W_x^0(\Omega) = W_{x\chi}^0(\Omega) + \frac{R_0^2}{2} S_a(\Omega),$$

$$W_z^1(\Omega) = -2C^1 W_{x\chi}^1(\Omega) + \frac{R_0^2}{2} 2\tilde{S}_a^1 \Delta\varphi(\Omega),$$

где $W_{x\chi}^0(\Omega)$, $W_{x\chi}^1(\Omega)$ определены формулами (4.6.16),

$$C^1 = -\pi S_{av}^0(0) = \frac{\omega_1^2}{8R_0^2 p} \left[\frac{q}{p} [D_\tau + D_{dp} Q_3(\theta, s_0)] - D_{dp} Q_2(\theta, s_0) \right]. \quad (10.3.20)$$

Рассмотрим теперь функцию $\chi(\tau)$, приближенное значение которой, соответствующее (10.3.10), равно ($\tau > \theta$)

$$\chi(\tau) = A[p\tau - 1 + e^{-p\tau}] + Bp\tau, \quad (10.3.20a)$$

где

$$A = A(\theta) = \frac{\omega_1^2}{8R_0^2 p} \left\{ \frac{q^2}{p^2} [D_\tau + D_{dp} Q_3(\theta, s_0)] - 2 \frac{q}{p} D_{dp} Q_2(\theta, s_0) \right\},$$

$$B = B(\theta) = \frac{\omega_1^2}{8R_0^2 p} [D_\tau + D_{dp} Q_1(\theta, s_0)].$$

Величины A и B сравнимы по порядку величины с $\langle \alpha^2 \rangle$ (см. (10.3.7)). При $p\tau \ll 1$ $\chi(\tau) = Bp\tau$, при $p\tau \gg 1$ $\chi(\tau) = (A+B)p\tau - A$. Здесь диффузия уходов фазы растет быстрее из-за неизохронности генератора. Поскольку величины A и B зависят от θ , то они принимают различные значения в разных точках зон генерации. Это приводит к изменению формы линии. Таким образом, форма спектральной линии клистрона сильно зависит от положения θ в зонах генерации.

Вычисляя $W_{x\chi}^0$ и $W_{x\chi}^1$ с помощью (II.13) и ограничиваясь первыми членами суммы, в силу малости A и B нетрудно получить

$$W_{x\chi}^0(\Omega) = \frac{R_0^2}{2\pi} \frac{\Delta\Omega\pi [p^2 + E\Omega^2]}{[(\Delta\Omega\pi)^2 + \Omega^2][p^2 + \Omega^2]}, \quad W_{x\chi}^1(\Omega) = \frac{R_0^2}{2\pi} \frac{\Omega}{(\Delta\Omega\pi)^2 + \Omega^2}, \quad (10.3.21)$$

где $\Delta\Omega$ — ширина спектральной линии дается формулой (10.3.15), $E = B/(A+B) = E(\theta)$. Поскольку E имеет порядок единицы, то форма пика, даваемая слагаемым $W_{x\chi}^1(\Omega)$, мало отличается от резонансной формы, что и должно быть, так как в составе

флуктуаций частоты имеется дельта-коррелированная компонента. Напомним, что резонансная форма является лишь приближенной формой, в действительности, из-за конечности $\langle v^2 \rangle$ крылья $W_{x\chi}^0(\Omega)$ должны спадать быстрее чем Ω^{-2} .

Отклонение $W_{x\chi}^0(\Omega)$ от точно резонансной формы связано с неизохронностью клистрона в общем случае. В центре зоны генерации $A=0$, вследствие $q=0$, $E=1$, и форма пика получается чисто резонансной.

Собирая вместе все слагаемые, находим окончательные выражения для компонент формы спектральной линии отражательного клистрона

$$\begin{aligned} W_x^0(\Omega) &= \frac{R_0^2}{2\pi} \left\{ \frac{\Delta\Omega\pi [p^2 + E\Omega^2]}{[(\Delta\Omega\pi)^2 + \Omega^2][p^2 + \Omega^2]} + \langle \alpha^2 \rangle \frac{p}{p^2 + \Omega^2} \right\}, \\ W_x^1(\Omega) &= -\frac{R_0^2}{2\pi} 2C^1 \left\{ \frac{\Omega}{(\Delta\Omega\pi)^2 + \Omega^2} + \frac{\Omega}{p^2 + \Omega^2} \right\}. \end{aligned} \quad (10.3.22)$$

Величина $C^1 = C^1(\theta)$ по порядку величины сравнима с $\langle \alpha^2 \rangle$. Из этих формул следует, что пик является с большой степенью точности симметричным, а пьедестал заметно несимметричен.

Вообще говоря, можно ожидать, что при каком-либо θ (находящемся внутри зоны генерации) форма спектральной линии будет строго симметричной. Это будет при $C^1(\theta^*) = 0$. На основании (10.3.20) и (10.2.20) легко показать, что это значение θ^* должно быть корнем уравнения

$$\left[J_0\left(\frac{R_0}{2U_a} \theta\right) - J_2\left(\frac{R_0}{2U_a} \theta\right) \right] \cos^2 \theta - \left[2 - J_2\left(\frac{R_0}{U_a} \theta\right) \right] \cos \theta + 1 = 0.$$

Поскольку коэффициент при $\cos^2 \theta$ не превышает единицы, а коэффициент при $\cos \theta$ близок к двойке, можно ожидать, что корень этого уравнения удовлетворяет неравенству $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n < \theta < 2\pi n$, т. е. лежит внутри зоны генерации.

7. Для обычного режима отражательного клистрона оценим численно ширину спектральной линии и интенсивность амплитудных флуктуаций для центра зоны генерации.

Пусть имеем следующие основные параметры клистрона: колебательная мощность в центре зоны генерации $P_r = 10^{-2}$ вт, $Q = 2 \cdot 10^3$, $C = 2 \cdot 10^{-12}$ ф, $I_0 = 10^{-2}$ а, $T = 300^\circ \text{K}$, $\Gamma^2 = 0,2$, $\omega_1 = = 2\pi \cdot 10^{10}$.

Оценим прежде всего удельную роль тепловых и дробовых шумов. Согласно (10.3.18) имеем

$$\frac{\text{дроб.}}{\text{тепл.}} = \frac{1,1eI_0\Gamma^2}{kT} \frac{Q}{\omega_1 C} = \frac{2,5}{25} \frac{2 \cdot 10^3}{10^{-2}} = 1,4 \cdot 10^3.$$

Таким образом, в данном случае тепловыми шумами по сравнению с дробовыми можно пренебречь. Это пренебрежение допустимо для всех клистронов, обладающих достаточно высоким резонансным сопротивлением резонатора $Z_{0e} \geq 150 \text{ ом}$.

Таким образом, абсолютное значение естественной ширины линии клистрона равно (см. (10.3.17))

$$\Delta F_{\text{ц}} = \frac{\omega_1}{8P_r Q C} 1,1 e I_0 \Gamma^2 = 0,07 \text{ гц},$$

относительное:

$$\delta F = \frac{\Delta F_{\text{ц}}}{f_0} = 7 \cdot 10^{-12}.$$

Сравним это значение с δF для LC -генератора. Согласно (5.5.10) для LC -генератора с контуром в анодной цепи, где основную роль играют также дробовые шумы, $\delta F = 1,6 \cdot 10^{-15}$. Таким образом, разница более трех порядков. Однако эта разница объясняется в основном разными значениями ω_1 , взятыми для LC -генератора и для клистрона. Если бы LC -генератор мог работать на частоте $\omega_1 = 2\pi \cdot 10^{10}$ и обладать добротностью контура $Q = 2 \cdot 10^3$, то, согласно (5.5.7), он бы имел $\delta F = 0,4 \cdot 10^{-12}$, т. е. величину того же порядка. Оставшаяся небольшая разница связана с различной мощностью генераторов.

Таким образом, с точки зрения естественной ширины спектральной линии клистронный генератор ничем в сущности не отличается от обычного LC -генератора.

Интенсивность амплитудных флуктуаций в центре зоны генерации и в пренебрежении тепловыми шумами равна, согласно (10.3.7),

$$\langle \alpha^2 \rangle = \frac{\omega_1^2}{8R_0^2 p} 2e I_0 \Gamma^2 Q^2 r^2 \cdot 1,8 = \frac{1,8}{8p} \frac{\omega_1}{P_r Q C} e I_0 \Gamma^2.$$

Прочность предельного цикла равна для центра зоны, согласно (10.2.28),

$$p = 0,38 \omega_1^2 a U_1 = 0,38 \omega_1 s \frac{I_0}{R_0 \omega_1 C} = 0,38 \omega_1 \frac{2I_0}{\sqrt{P_r Q \omega_1 C}}.$$

Подставляя численные значения, получим

$$p \approx 2\pi \cdot 0,38 \cdot 10^8, \quad \frac{p}{\omega_1} \approx 0,38 \cdot 10^{-2}.$$

Интенсивность амплитудных флуктуаций клистронного генератора в центре зоны синхронизации равна, следовательно,

$$\langle \alpha^2 \rangle = \frac{1,8 \Delta F_{\text{ц}}}{1,1 p} \approx 5,3 \cdot 10^{-10}, \quad \frac{\Delta R}{R_0} \approx \sqrt{\langle \alpha^2 \rangle} = 2,3 \cdot 10^{-5}.$$

§ 10.4. Технические флуктуации отражательного клистрона

Рассмотрим теперь влияние фликкерного шума и флуктуаций параметров на флуктуации амплитуды и частоты клистрона. Фликкерный шум, как уже говорилось выше, может действовать как непосредственно, так и через посредство флуктуаций параметров, к которым он приводит. Начнем анализ с изучения непосредственного влияния фликкерного шума на клистрон.

1. Общее флуктуационное уравнение клистрона (10.2.14) учитывает, как уже отмечалось, воздействие компонент шума, имеющих спектр в области нулевых частот и частот $\omega_n n$, где $n=1, 2, \dots$. Для дробового шума, роль которого рассматривалась в предыдущем параграфе, все эти компоненты существуют. Если теперь считать, что в токе, текущем через резонатор клистрона, имеется только низкочастотный шум, то будет отлична от нуля только компонента $I_{\parallel 0}(t)$.

Итак, вместо (10.2.14) имеем следующие флуктуационные уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{dt} &= -p\alpha - \frac{\omega_1}{2R_0} Z_b I_{\parallel 0}(t - \tau_0) \left[\sin \theta + \frac{1}{Q} \cos \theta \right] J_1(s_0), \\ \frac{d\varphi}{dt} &= -q\alpha - \frac{\omega_1}{2R_0} Z_b I_{\parallel 0}(t - \tau_0) \left[\cos \theta - \frac{1}{Q} \sin \theta \right] J_1(s_0), \end{aligned} \quad (10.4.1)$$

где случайная функция $I_{\parallel 0}(t)$ определяется теперь через фликкерный шум, а ее спектральная плотность дается формулой (10.2.15).

Поскольку эта случайная функция единственная, стоящая в правых частях (10.4.1), то время задержки τ_0 , стоящее в ее аргументе, никакой роли не играет. Поэтому (см. (10.2.12)) вместо $I_{\parallel 0}(t - \tau_0)$ можно писать $2I_0 \delta i_\Phi(t)$, где $\delta i_\Phi(t)$ — относительные флуктуации фликкерного шума катодного тока.

Принимая во внимание (10.2.9), нетрудно получить следующие уравнения для флуктуаций амплитуды и частоты клистрона, порождаемых непосредственным действием фликкерного шума электронного потока:

$$\frac{d\alpha}{dt} = -p\alpha + \frac{\omega_1}{2Q} \delta i_\Phi(t), \quad \nu = \frac{d\varphi}{dt} = T(\theta) \frac{d\alpha}{dt}. \quad (10.4.2)$$

Из второго уравнения следует, что $\varphi(t) = T(\theta)\alpha(t)$ — фазовые флуктуации пропорциональны амплитудным, причем в центре зоны генерации фазовые флуктуации отсутствуют, поскольку $T(\theta)$ обращается в нуль.

Из (10.4.2) нетрудно получить следующие спектральные плотности:

$$S_a(\Omega) = \frac{\omega_1^2}{4Q^2} \frac{S_\Phi(\Omega)}{p^2 + \Omega^2}, \quad S_v(\Omega) = T^2(\theta) \frac{\omega_1^2}{4Q^2} \frac{\Omega^2}{p^2 + \Omega^2} S_\Phi(\Omega),$$

$$S_{av}^0(\Omega) = 0, \quad S_{av}^1(\Omega) = -T(\theta) \frac{\omega_1^2}{4Q^2} \frac{\Omega}{p^2 + \Omega^2} S_\Phi(\Omega). \quad (10.4.3)$$

Отсюда видно, что непосредственное действие фликкерного шума клистрона всегда имеет место для амплитудных флуктуаций, в то время как флуктуации частоты возникают только при неизохронном режиме колебания клистрона, когда $\theta \neq \theta_n$. В центре зон генерации флуктуации частоты отсутствуют.

Если спектральная плотность фликкерного шума имеет вид

$$S_\Phi(\Omega) = \frac{A_\Phi}{2\pi |\Omega|^\gamma}, \quad 0 < \gamma < 1,$$

то нетрудно видеть, что $\lim_{\Omega \rightarrow 0} \frac{S_v(\Omega)}{\Omega} = 0$. Это говорит о том, что и в неизохронном режиме работы клистрона непосредственное влияние фликкерного шума *не уширяет* его спектральной линии.

Причина этого обстоятельства заключается в следующем. Предположим, что имеют место сколь угодно медленные флуктуации тока клистрона ΔI_0 . Тогда из (10.2.9) и (10.2.23) следует, что ΔI_0 вызовут медленные флуктуации амплитуды колебания ΔR_0 и в то же время не приведут к флуктуациям частоты, ибо поправка на частоту $\Delta\omega_0$ не зависит от I_0 . Следовательно, согласно (10.4.3), флуктуации частоты клистрона порождаются лишь быстрыми компонентами фликкерного шума.

2. Перейдем теперь к флуктуациям параметров клистрона. Начнем рассмотрение с флуктуаций емкости. Фликкерный шум, порождая флуктуации величины пространственного заряда в резонаторе, ведет к флуктуациям эквивалентной емкости резонатора.

Вместо (10.2.5) имеем теперь следующие уравнения движения клистрона, обладающего флуктуациями эквивалентной емкости резонатора:

$$L \frac{di}{dt} + ri = v, \quad C(t) \frac{dv}{dt} + \frac{dC(t)}{dt} v + i = I(v).$$

Относительные флуктуации емкости считаем малыми. Сохраняя обозначение C для $\langle C(t) \rangle$, имеем

$$C(t) = C[1 + \delta C], \quad \langle \delta C^2 \rangle \ll 1.$$

Уравнение движения клистрона с флуктуирующей емкостью контура принимает вид ($x=v$):

$$\ddot{x} + \omega_1^2 x = F(x, \dot{x}) + \omega_1^2 \mathcal{G}(t, x, \dot{x}),$$

где $F(x, \dot{x})$ сохраняет прежнее значение (см. § 10.2), а

$$\mathcal{G}(t, x, \dot{x}) = R_0 \left\{ \left[\delta C - \frac{1}{Q\omega_1} \frac{d}{dt} \delta C - \frac{1}{\omega_1^2} \frac{d^2}{dt^2} \delta C \right] \cos \psi + \right. \\ \left. + \left[Q^{-1} \delta C + \frac{2}{\omega_1} \frac{d}{dt} \delta C \right] \sin \psi \right\}.$$

Принимая во внимание медленность $\delta C(t)$ по сравнению с $\cos \omega_0 t$, получим, согласно (5.2.31), следующие флуктуационные уравнения:

$$\frac{d\alpha}{dt} = -p\alpha - \frac{1}{2} \left[\Pi \delta C + 2 \frac{d}{dt} \delta C \right], \quad v = \frac{d\varphi}{dt} = -q\alpha - \frac{\omega_1}{2} \delta C. \quad (10.4.4)$$

Эти уравнения почти полностью совпадают с (6.3.10) — флуктуационными уравнениями обычного LC -генератора с контуром в аноде. Несовпадение относится к члену $-q\alpha$ (рассмотренный LC -генератор являлся изохронным) и к члену $2 \frac{d}{dt} \delta C$, который входит в (6.3.10) без двойки.

Лишняя двойка в (10.4.4) связана с тем, что в § 6.3 флуктуационные уравнения записывались для флуктуаций

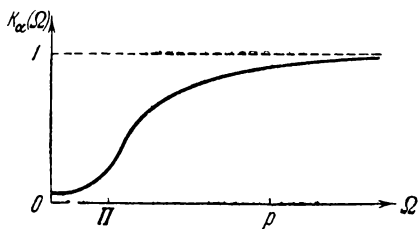


Рис. 10.7.

амплитуды и фазы тока, протекающего через индуктивность контура ($x=\Gamma$), а уравнения (10.4.4) записаны для флуктуаций амплитуды и фазы напряжения на конденсаторе контура ($x=v$). Если бы емкость конденсатора не флуктуировала, а была постоянной, то, разумеется, никакой разницы не могло и быть.

Из первого уравнения (10.4.4) легко найти спектральную плотность флуктуаций амплитуды

$$S_\alpha(\Omega) = K_\alpha(\Omega) S_{\delta C}(\Omega), \quad K_\alpha(\Omega) = \frac{1}{4} \frac{4\Omega^2 + \Pi^2}{\Omega^2 + p^2}.$$

График функции $K_\alpha(\Omega)$ — коэффициента передачи от флуктуаций емкости к флуктуациям амплитуды клистрона — изображен на рис. 10.7, где учтено то обстоятельство, что в центре зон генерации $p \gg \Pi$ (см. (10.2.28)) *). Низкочастотные флуктуации

*) Напомним, что для обычных LC -генераторов мы имели $\Pi \gg p$ и для них вид коэффициента передачи был совершенно иной (см. рис. 6.2).

емкости ($\Omega \ll p$) влияют на флуктуации амплитуды клистрона несколько ослабленно по сравнению с высокочастотными компонентами. Это связано с относительно высокой добротностью резонатора клистрона. Чем выше Q , тем меньшее влияние на амплитуду клистрона оказывают медленные флуктуации эквивалентной емкости резонатора.

Быстрые флуктуации емкости ($\Omega > p$), напротив, почти полностью переходят в амплитудные флуктуации клистрона, и можно просто полагать, что для них $\alpha = \delta C$. Таким образом, для флуктуаций емкости инерционности клистрона не существует. Это связано с тем, что в флуктуационные уравнения входит член, пропорциональный dC/dt , и его величина и влияние тем больше, чем выше частота флуктуаций емкости.

Для рассмотрения формы и ширины технической спектральной линии клистрона в центре зоны синхронизации, когда $q=0$, можно привлечь результаты, полученные в § 6.4. Ограничимся для простоты случаем фликкерных флуктуаций емкости, обладающих спектральной плотностью

$$S_{\delta C}(\Omega) = \frac{A_C}{2\pi |\Omega|^{0,99}}.$$

Чтобы для нашего случая можно было воспользоваться формулами п. 5 § 6.4, в них следует сделать следующую замену:

$$A_C \rightarrow 4A_C, \quad \omega_0 \rightarrow \frac{1}{2} \omega_1, \quad \Pi \rightarrow \frac{1}{2} \Pi, \quad d \rightarrow 1,$$

которая, кстати, никак не отразится на характеристиках, связанных только с флуктуациями частоты. Форма пика спектральной линии клистрона будет очень близка к доплеровской с шириной, равной

$$\Delta\Omega = 7\omega_1 \sqrt{A_C}.$$

Уравнение крыльев спектральной линии примет следующий вид:

$$W_x(\Omega) = \frac{R_0^2}{2} \frac{A_C}{8\pi\Omega^{0,99}} \frac{\omega_1^2 + \Omega^2}{\Omega^2}.$$

3. Помимо флуктуаций емкости, шумы, существующие в электронном потоке, могут приводить к флуктуациям времени пролета электронов от резонатора к отражателю и обратно. Зависимость этого времени от скорости, с которой электроны покидают резонатор, и от напряжения на отражателе имеет вид $\tau = \frac{2m_{el}}{eU_0} v$. При этом $\tau_0 = \frac{2m_{el}}{eU_0} v_0$, где v_0 — скорость, с которой электроны подлетают к резонатору. Эта скорость зависит как

от напряжения на резонаторе U_a , так и от начальной скорости v_n , с которой электроны покидают катод. Выше мы эту начальную скорость не учитывали совсем и имели $v_0 = \sqrt{\frac{2eU_a}{m_e}}$.

Предположим теперь, что имеется некоторая начальная скорость и она флуктуирует. Ее флуктуации считаем медленными по сравнению с $\cos \omega_0 t$. Рассчитаем, к каким флуктуациям амплитуды и фазы клистрона она приводит. Обозначим относительные флуктуации начальной скорости электронов через $\delta v = \Delta v_n(t)/v_n$. Тогда

$$\tau_0 = \frac{2m_e l}{eU_0} (v_0 + v_n).$$

Нетрудно видеть, что флуктуации начальной скорости приводят к флуктуациям угла пролета и $\frac{d\theta}{dv_n} = \omega_1 \frac{2m_e l}{eU_0} = \frac{0}{v_0 + v_n} \approx \frac{\theta}{v_0}$, поскольку $v_n \ll v_0$.

На основании § 6.1 можно получить следующие выражения для флуктуационных уравнений, соответствующих флуктуациям начальной скорости:

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{dt} &= -p\alpha - \frac{v_n}{2\omega_1 R_0} \left[\frac{d\Phi(\omega_1, R)}{dv_n} \right]_{R_0} \delta v, \\ \frac{d\varphi}{dt} &= -q\alpha - \frac{v_n}{2\omega_1 R_0} \left[\frac{d\Psi(\omega_1, R)}{dv_n} \right]_{R_0} \delta v, \end{aligned}$$

где производные равны

$$\frac{d\Phi(\omega_1, R)}{dv_n} = \frac{d\Phi(\omega_1, R)}{d\theta} \frac{\theta}{v_0}, \quad \frac{d\Psi(\omega_1, R)}{dv_n} = \frac{d\Psi(\omega_1, R)}{d\theta} \frac{\theta}{v_0}.$$

Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi}{d\theta} &= \omega_1^2 2U_1 \left\{ \left[\cos \theta - \frac{1}{Q} \sin \theta \right] J_1(s) + \frac{s}{\theta} \left[\sin \theta + \frac{1}{Q} \cos \theta \right] J_1'(s) \right\}, \\ \frac{d\Psi}{d\theta} &= \omega_1^2 2U_1 \left\{ - \left[\sin \theta + \frac{1}{Q} \cos \theta \right] J_1(s) + \frac{s}{\theta} \left[\cos \theta - \frac{1}{Q} \sin \theta \right] J_1'(s) \right\}. \end{aligned}$$

Из формул (10.2.9) и (10.2.10) нетрудно получить

$$\begin{aligned} \left[\cos \theta - \frac{1}{Q} \sin \theta \right] J_1(s_0) &= - \frac{\Delta\omega_0 R_0}{\omega_1 U_1}, \\ \left[\sin \theta + \frac{1}{Q} \cos \theta \right] J_1(s_0) &= - \frac{R_0}{2QU_1}, \\ \left[\cos \theta - \frac{1}{Q} \sin \theta \right] J_1'(s_0) &= \frac{q - \Delta\omega_0}{a\omega_1^2 U_1}, \\ \left[\sin \theta + \frac{1}{Q} \cos \theta \right] J_1'(s_0) &= \frac{p - \omega_1/2Q}{a\omega_1^2 U_1}. \end{aligned}$$

Используя эти выражения, находим

$$\begin{aligned}\left(\frac{d\Phi}{d\theta}\right)_{R_0} &= 2\omega_1 R_0 \left[-\Delta\omega_0 + \frac{1}{\theta} \left(p - \frac{\omega_1}{2Q} \right) \right], \\ \left(\frac{d\Psi}{d\theta}\right)_{R_0} &= 2\omega_1 R_0 \left[\frac{\omega_1}{2Q} + \frac{1}{\theta} (q - \Delta\omega_0) \right].\end{aligned}$$

Собирая вместе все слагаемые, получаем окончательные флуктуационные уравнения

$$\begin{aligned}\frac{d\alpha}{dt} &= -p\alpha + \frac{v_n}{v_0} \left[\Delta\omega_0\theta - p + \frac{\omega_1}{2Q} \right] \delta v, \\ v &= \frac{d\varphi}{dt} = -q\alpha + \frac{v_n}{v_0} \left[\Delta\omega_0 - q - \frac{\omega_1}{2Q} \theta \right] \delta v.\end{aligned}\quad (10.4.5)$$

Эти уравнения показывают, во-первых, что флуктуации начальной скорости электронов (мы здесь, разумеется, предполагаем для простоты, что все электроны обладают одинаковыми начальными скоростями) действительно приводят к флуктуациям амплитуды и частоты автоколебания клистрона, во-вторых, что это влияние тем меньше, чем меньше v_n/v_0 — отношение средней начальной скорости электронов к скорости, создаваемой напряжением резонатора (скорости рассматриваются у резонатора).

Зависимость флуктуационного члена в (10.4.5) от p , q , $\Delta\omega_0$ означает, что влияние флуктуаций начальных скоростей существенно зависит от значения θ , т. е. от положения рабочей точки в зоне генерации. В центре зон генерации имеем

$$\frac{d\alpha}{dt} = -p_n\alpha - \frac{v_n}{v_0} p_n \delta v, \quad v = -\frac{v_n}{v_0} \frac{1}{2} \Pi\theta_n \delta v. \quad (10.4.6)$$

Из этих уравнений следует, что флуктуации амплитуды и частоты существенно зависят от номера зоны генерации, сильно возрастая с возрастанием номера зоны. Спектр флуктуаций частоты полностью совпадает со спектром флуктуаций начальной скорости, а с точки зрения амплитудных флуктуаций клистрон *инерционен* по отношению к флуктуациям начальной скорости.

Если предположить, что флуктуации начальной скорости носят фликкерный характер и, например,

$$S_{\delta v}(\Omega) = \frac{A_v}{2\pi |\Omega|^{0.99}},$$

то техническая ширина спектральной линии клистрона в центре зон генерации будет равна

$$\Delta\Omega = 7 \frac{v_n}{v_0} Q^{-1} \theta_n \omega_1 \sqrt{A_v}.$$

Полученная ширина спектральной линии зависит от номера зоны генерации и от добротности резонатора, чего не было для случая флуктуаций эквивалентной емкости клистрона.

4. Поскольку угол пролета электронов θ и $s = \theta R / 2U_a$ зависят от величин напряжений питания клистрона U_a и U_0 , то флуктуации последних также должны приводить к флуктуациям амплитуды и частоты. Можно показать, что соответствующие флуктуационные уравнения примут вид

$$\begin{aligned}\frac{d\alpha}{dt} &= -p\alpha - \frac{1}{2\omega_1 R_0} \left[U_a \frac{d\Phi}{dU_a} \delta U_1 + U_0 \frac{d\Phi}{dU_0} \delta U_2 \right], \\ \frac{d\varphi}{dt} &= -q\alpha - \frac{1}{2\omega_1 R_0} \left[U_a \frac{d\Psi}{dU_a} \delta U_1 + U_0 \frac{d\Psi}{dU_0} \delta U_2 \right],\end{aligned}$$

где $\delta U_1 = \Delta U_a(t)/U_a$, $\delta U_2 = \Delta U_0/U_0$. Принимая во внимание, что $d\theta/dU_a = \theta/2U_a$, $d\theta/dU_0 = -\theta/U_0$, $\partial s/\partial U_a = -s/U_1$, $\partial s/\partial U_0 = 0$, можно найти

$$\begin{aligned}\frac{d\Phi}{dU_a} &= -\frac{\omega_1 R_0}{U_a} \left[\Delta\omega_0 \theta + p - \frac{\omega_1}{2Q} \right], \quad \frac{d\Phi}{dU_0} = \frac{2\omega_1 R_0}{U_0} \left[\Delta\omega_0 \theta - p + \frac{\omega_1}{2Q} \right], \\ \frac{d\Psi}{dU_a} &= \frac{\omega_1 R_0}{U_a} \left[\frac{\omega_1}{2Q} \theta - q + \Delta\omega_0 \right], \quad \frac{d\Psi}{dU_0} = -\frac{2\omega_1 R_0}{U_0} \left[\frac{\omega_1}{2Q} \theta + q - \Delta\omega_0 \right].\end{aligned}$$

Предполагая, что и резонатор, и отражатель клистрона питаются от одного источника напряжения, обладающего флуктуациями, мы должны положить пропорциональность $\Delta U_a(t)$ и $\Delta U_0(t)$ или равенство относительных флуктуаций $\Delta U_a/U_a = \Delta U_0/U_0$. Обозначая относительные флуктуации напряжения источника питания $\delta U_1 = \delta U_2 = \delta U$, будем иметь, объединяя предыдущие формулы, следующие флуктуационные уравнения:

$$\begin{aligned}\frac{d\alpha}{dt} &= -p\alpha + \frac{3}{2} \left[p - \frac{1}{2} \Pi - \frac{\Delta\omega_0}{3} \theta \right] \delta U, \\ v = \frac{d\varphi}{dt} &= -q\alpha + \frac{3}{2} \left[q - \Delta\omega_0 + \frac{\omega_1}{2Q} \frac{\theta}{3} \right] \delta U.\end{aligned}\tag{10.4.7}$$

В центре зон генерации

$$\frac{d\alpha}{dt} = -p_n \alpha + \frac{3}{2} p_n \delta U, \quad v = \frac{\theta_n}{4} \Pi \delta U.\tag{10.4.8}$$

Из (10.4.7) и (10.4.8) следует, что и в этом случае, во-первых, флуктуации амплитуды и частоты клистрона сильно зависят от положения рабочей точки в зоне генерации и, во-вторых, в центрах зон сильно зависят от номера зоны, возрастая с возрастанием номера зоны.

Рассмотрим характер изменения амплитудных флуктуаций клистрона внутри зоны генерации. Пренебрегая для простоты

рассмотрения слагаемым $\frac{1}{2} \Pi$ в квадратной скобке первого уравнения (10.4.7), находим следующее значение спектральной плотности амплитудных флуктуаций:

$$S_{\alpha}(\Omega) = K_{\alpha}(\Omega) S_{\delta c}(\Omega), \quad K_{\alpha}(\Omega) = \frac{9}{4} \frac{\left[p - \frac{\Delta\omega_0}{3} \theta\right]^2}{\Omega^2 + p^2}.$$

Коэффициент передачи $K_{\alpha}(\Omega)$ существенно зависит от положения рабочей точки в зоне генерации, принимая где-то внутри нулевое значение. Зависимость

$$K_{\alpha}(0) = \frac{9}{4} \left[1 - \frac{\Delta\omega_0 \theta}{3p}\right]^2$$

от θ показана на рис. 10.8. Значение θ^* , при котором $K_{\alpha}(0) = 0$, является корнем уравнения

$$\begin{aligned} \frac{U_1}{2U_a} \left(\sin \theta + \frac{1}{Q} \cos \theta\right) J_1'\left(\theta \frac{R_0}{2U_a}\right) = \\ = \frac{\omega_1}{2Q} \frac{1}{3} T(\theta). \end{aligned}$$

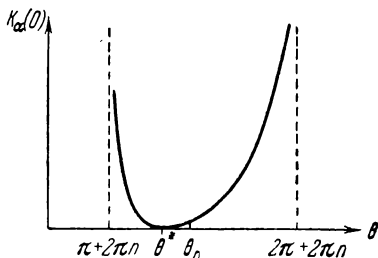


Рис. 10.8.

Таким образом, возможен такой режим клистрона, при котором флуктуации питающих напряжений не вызывают амплитудных флуктуаций. В этом режиме достигается компенсация, при которой воздействие флуктуаций питания на амплитуду через θ компенсируется воздействием через s , поскольку θ и s зависят от U_a и U_0 различным образом.

Пусть спектральная плотность относительных флуктуаций напряжения источника питания равна (см. табл. 1 на стр. 141)

$$S_{\delta U}(\Omega) = \frac{A_U}{2\pi\Omega^2}.$$

Тогда для центра зон генерации имеем

$$S_v(\Omega) = \frac{\theta_n^2 \omega_1^2 A_U}{16Q^2 2\pi\Omega^2}.$$

Техническая ширина спектральной линии в этом случае равна на основании (4.5.52)

$$\Delta\Omega(t_0) = \frac{\theta_n \omega_1}{2\sqrt{2}Q} \sqrt{\pi A_U t_0} \quad (10.4.9)$$

и зависит от номера зоны генерации и добротности резонатора клистрона.

5. В любом реальном клистроне рассмотренные выше флуктуации емкости, начальной скорости электронов и питающих

напряжений всегда имеют место одновременно. Учитывая степень их корреляции, нетрудно найти спектральные плотности флуктуаций амплитуды и частоты клистрона, обязанные совместно влиянию флуктуаций вышеупомянутых параметров, и вычислить какие-либо другие флуктуационные характеристики клистрона.

Ограничимся анализом ширины спектральной линии. На основании рассмотренных выше частных случаев мы можем записать (полагая некоррелированность флуктуаций емкости, начальной скорости электронов и питающих напряжений) спектральную плотность общих флуктуаций частоты:

$$S_v(\Omega) = \frac{\omega_1^2 A_C}{8\pi |\Omega|^{0,99}} + \left(\frac{v_n}{v_0}\right)^2 \frac{\omega_1^2 \theta_n^2 A_v}{Q^2 8\pi |\Omega|^{0,99}} + \frac{\theta_n^2 \omega_1^2 A_U}{16Q^2 2\pi \Omega^2}.$$

Закон изменения полученной спектральной плотности с частотой не постоянен. На достаточно больших частотах $S_v(\Omega) \sim \Omega^{-0,99}$, на малых частотах $S_v(\Omega) \sim \Omega^{-2}$. Поскольку ширина пика спектральной линии определяется поведением спектральной плотности флуктуаций частоты при сколь угодно малых значениях Ω , то, очевидно, что с возрастанием времени наблюдения рано или поздно (это зависит от соотношения слагаемых в $S_v(\Omega)$) определяющими флуктуациями будут флуктуации питающих напряжений, а ширина линии будет задаваться формулой (10.4.9).

Только в том случае, если источники питания клистрона можно считать идеальными (для всех реальных времен наблюдения t_0 флуктуациями δU можно пренебречь по сравнению с флуктуациями δC и δv), мы получим

$$\delta F = \sqrt{49A_C + 49\left(\frac{v_n}{v_0}\right)^2 \frac{\theta_n^2}{Q^2} A_v}. \quad (10.4.10)$$

Удельная роль каждого слагаемого в этой формуле зависит, во-первых, от соотношений A_C , A_v , во-вторых, от v_n/v_0 и θ_n/Q . Если, например, для рассматриваемых промежутков времени $A_C \approx A_v$, то вследствие того, что $v_n/v_0 \ll 1$, $\theta_n/Q \ll 1$, основную роль будут играть только флуктуации емкости и

$$\delta F = 7 \sqrt{A_C}.$$

Полученное выражение (10.4.10) показывает, что относительная ширина технической спектральной линии клистрона не зависит от частоты его колебаний, а только от интенсивности флуктуаций параметров. Это обстоятельство мы имели выше (см. § 6.4) и для обычного LC-генератора. Сравнивая (6.4.32) и (10.4.10), нетрудно видеть, что, ограничиваясь флуктуациями емкости, имеем полное совпадение указанных формул.

Если обратиться к численному примеру, рассмотренному в конце § 6.4, и положить $A_C = 10^{-15}$, то, как и для LC -генератора, для клистрона получим значение технической ширины спектральной линии

$$\delta F \approx 2,2 \cdot 10^{-7}.$$

Заметим, что экспериментальные исследования технической ширины спектральной линии клистрона ($\lambda = 3,3$ см) (1963 [7]) дают для седьмой и восьмой зон генерации значения $\delta F = 0,88 \cdot 10^{-7}$ и $\delta F = 1,4 \cdot 10^{-7}$ соответственно.

§ 10.5. Уравнения движения магнетрона

1. К настоящему времени опубликовано много работ, относящихся к исследованию процессов в магнетронах. Физические явления, протекающие в пространстве взаимодействия электронов с волнами поля, изучены достаточно подробно (см., например, [98—102]). Значительно менее изучены вопросы динамической теории магнетрона, описывающей его как автоколебательную систему [95, 103, 104]. Более того, можно утверждать, что задача написания основных соотношений динамической теории магнетрона, позволяющих в рамках единой модели правильно описать основные особенности поведения магнетрона, еще не решена достаточно надежно.

Это находит свое отражение и в том, что и по сей день не существует общепринятой системы упрощенных уравнений, описывающих изменения амплитуды и фазы автоколебаний магнетрона даже вблизи предельного цикла. Это обстоятельство существенно затрудняет теоретическое исследование флуктуационных явлений в магнетронах.

Известно, что магнетроны и родственные им современные приборы магнетронного типа имеют весьма широкое применение в качестве источников мощных сверхвысокочастотных колебаний. Следовательно, практически важным является вопрос о флуктуациях амплитуды и фазы таких генераторов, а также и о ширине спектральной линии. Поэтому даже приближенное рассмотрение флуктуаций в магнетроне, основанное на упрощенных модельных представлениях, имеет определенную ценность.

В этом и последующих параграфах будет проведен приближенный анализ работы магнетрона в стационарном одночастотном режиме колебаний, а также соответствующий расчет естественных и технических флуктуаций.

Изложение в большей части будет опираться на результаты работ В. Н. Никонова [96], (1962 [3]), в которых, по-видимому, впервые теоретически и экспериментально рассмотрено воздействие случайных возмущений на автоколебания в магнетронах.

2. Колебательная система магнетрона образована внутренней полостью сложного резонатора, имеющего цилиндрическую геометрию. Стенки полости образованы поверхностями анодного блока и катода. На рис. 10.9 изображена в разрезе одна из возможных форм резонаторной системы. Принимаем цилиндрическую систему координат r, ϕ', z , причем ось z выбираем перпендикулярно плоскости рисунка. Вводим обозначения r_k — радиус катода, r_a — радиус анодного блока, 2β — угловой размер щели резонатора. Вся система помещается в однородное магнитное поле, направленное по оси z , и на анод по отношению к катоду подается определенный положительный потенциал.

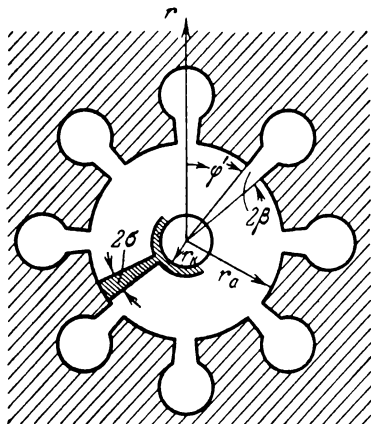


Рис. 10.9.

Кратко принцип работы магнетрона сводится к следующему. Под действием постоянных электрических и магнитных полей электроны, эмиттированные катодом, движутся по сложным петлеобразным траекториям в азимутальном направлении (вокруг катода). Если величина анодного напряжения и магнитного

поля таковы, что поток электронов при этом движется в среднем почти синхронно с волной одного из возможных видов колебаний в системе, то возникшие случайно в потоке уплотнения пространственного заряда или «выбросы» электронов из облака могут привести к появлению наведенных (в стенках блока) токов и высокочастотных полей, поддерживающих эти начавшиеся отклонения. Такой процесс имеет тенденцию к нарастанию, которое ограничивается нелинейными свойствами системы, в результате чего устанавливается автоколебательный режим, для которого картина полей и распределения заряда схематично показана на рис. 10.10.

Группирование электронов происходит в основном в тех областях фаз, в которых под совместным действием высокочастотного электрического и постоянного магнитного полей они устремляются по направлению к аноду, отдавая тем самым свою потенциальную энергию высокочастотным колебаниям. При этом электроны, испускаемые катодом равномерно со всех точек своей поверхности, при своем движении к аноду проходят лишь по отдельным каналам — спицам — местам повышенной плотности электронного облака. Двигаясь к аноду по узким спицам, элект-

троны обеспечивают протекание постоянного анодного тока, необходимого для поддержания колебаний. Хотя доля электронов, достигающих анода, не превышает половины от общего числа электронов, испускаемых катодом, магнетроны имеют обычно высокий коэффициент полезного действия (около 70%), так как электроны, возвращающиеся на катод, попадают на его поверхность в конце первых петель траекторий и их «вредное» влияние

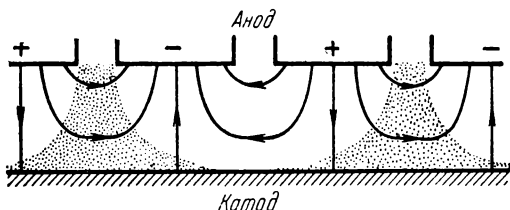


Рис. 10.10.

на энергетический баланс системы значительно менее существен, чем полезный эффект, производимый электронами, движущимися к аноду в течение значительно большего времени.

Таким образом, колебания полей в резонаторе магнетрона возбуждаются вращающимися спицами пространственного заряда. В свою очередь величина тока в спицах и их форма зависят от амплитуды поля, что является по существу обратной связью магнетронного генератора. Нелинейности, определяющие амплитуду автоколебаний, связаны с нелинейной зависимостью тока, возбуждающего резонатор, от величины высокочастотного поля. Эти нелинейности определяются характером распределения заряда в спицах, их формой и фазой относительно волны поля, т. е. особенностями группировки.

3. Пусть в магнетроне имеет место одночастотный режим генерации, при котором существуют так называемые π -колебания, наиболее характерные для магнетрона, при которых фазы электрического высокочастотного поля в двух соседних щелях различаются на π .

Для дальнейшего мы можем воспользоваться формулой (10.1.5), полученной для одночастотного режима СВЧ-генератора общего вида; тем самым для рассматриваемого колебания имеем следующее основное уравнение:

$$\frac{d^2 i_\pi}{dt^2} + \omega_\pi^2 i_\pi = -\frac{\omega_\pi}{Q_\pi} \frac{di_\pi}{dt} + \omega_\pi^2 \int_V \mathbf{j} \mathbf{E}_\pi(\mathbf{r}) d\mathbf{v} \quad (10.5.1)$$

и уравнения обратной связи

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{e}{m} \{ \mathbf{E}_\Sigma + [\mathbf{v} \mathbf{H}_\Sigma] \}, \quad \mathbf{j} = \rho \mathbf{v}. \quad (10.5.2)$$

Здесь V — объем пространства взаимодействия, объем внутренней полости магнетрона,

$$\mathbf{E}_{\Sigma} = \mathbf{E}_0 - \frac{4\pi}{\omega_{\pi}^2} \frac{1}{\Gamma} \frac{d\mathbf{i}_{\pi}}{dt} \mathbf{E}_{\pi}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{H}_{\Sigma} = \mathbf{H}_0 + \frac{4\pi}{\omega_{\pi}^2} \frac{1}{\Gamma} \mathbf{i}_{\pi} \mathbf{H}_{\pi}(\mathbf{r}),$$

ρ — плотность пространственного заряда, \mathbf{v} — вектор скорости пространственного заряда.

Рассматриваемые собственные функции π -колебания \mathbf{E}_{π} и \mathbf{H}_{π} нормированы, согласно § 10.1, на некоторый линейный размер Γ . Если ввести функции \mathbf{E}_{π}^* , \mathbf{H}_{π}^* , нормированные на объем резонатора, то

$$\mathbf{E}_{\pi} = \frac{\mathbf{E}_{\pi}^*}{d}, \quad \mathbf{H}_{\pi} = \frac{\mathbf{H}_{\pi}^*}{d},$$

где d — некоторый размер. Выбирая $d = 2\beta r_a$ — длине щели отдельного резонатора, найдем, что $\Gamma = V/4\beta^2 r_a^2$.

Определение собственных функций \mathbf{E}_{π} , \mathbf{H}_{π} (или \mathbf{E}_{π}^* , \mathbf{H}_{π}^*) для резонаторной системы, имеющей сложную геометрию, представляет большие трудности. Для их преодоления используют различные приближенные методы и, в частности, метод частичных областей [105, 106], который заключается в разбиении сложного объема на простые, для которых имеются точные решения и в последующем приближенном способе «сшивания» этих решений.

Для резонаторной системы, изображенной на рис. 10.9, приближенное решение для \mathbf{E}_{π}^* получено в работе [94]. Для компонент \mathbf{E}_{π} оно принимает вид

$$\begin{aligned} E_{\varphi\pi}(r, \varphi') &= \frac{N}{\pi r_a} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sin \gamma \beta}{\gamma \beta} \frac{Z'_{\gamma} \left(\frac{2\pi}{\lambda} r \right)}{Z'_{\gamma} \left(\frac{2\pi}{\lambda} r_a \right)} \cos \gamma \varphi', \\ E_{r\pi}(r, \varphi') &= \frac{N}{\pi r_a} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sin \gamma \beta}{\gamma \beta} \frac{\lambda}{2\pi r} \frac{Z'_{\gamma} \left(\frac{2\pi}{\lambda} r \right)}{Z'_{\gamma} \left(\frac{2\pi}{\lambda} r_a \right)} \sin \gamma \varphi', \\ E_{z\pi}(r, \varphi') &= 0. \end{aligned} \quad (10.5.3)$$

Здесь введены следующие обозначения: λ — длина волны поля, N — число резонаторов в анодном блоке, $\gamma = mN + \frac{N}{2}$,

$$Z_{\gamma} \left(2\pi \frac{r}{\lambda} \right) = J_{\gamma} \left(2\pi \frac{r}{\lambda} \right) - \frac{J'_{\gamma} \left(\frac{2\pi}{\lambda} r_{\kappa} \right)}{N'_{\gamma} \left(\frac{2\pi}{\lambda} r_{\kappa} \right)} N_{\gamma} \left(\frac{2\pi}{\lambda} r \right).$$

$J_\gamma(x)$, $N_\gamma(x)$ — функции Бесселя и Неймана, штрихом обозначена производная по аргументу.

Если ограничиться сравнительно малыми размерами магнетрона, когда выполняются условия квазистационарности высокочастотных полей в магнетроне

$$\lambda \gg \frac{4\pi}{N} r_a,$$

то

$$\begin{aligned} \frac{Z'_\gamma\left(\frac{2\pi}{\lambda} r\right)}{Z'_\gamma\left(\frac{2\pi}{\lambda} r_a\right)} &\approx \left(\frac{r}{r_a}\right)^{\gamma-1} \left[\frac{1 - \left(\frac{r_K}{r}\right)^{2\gamma}}{1 - \left(\frac{r_K}{r}\right)^{2\gamma}} \right] \equiv F_1(r), \\ \frac{\lambda}{2\pi r} \frac{Z'_\gamma\left(\frac{2\pi}{\lambda} r\right)}{Z'_\gamma\left(\frac{2\pi}{\lambda} r_a\right)} &\approx \left(\frac{r}{r_a}\right)^{\gamma-1} \left[\frac{1 + \left(\frac{r_K}{r}\right)^{2\gamma}}{1 - \left(\frac{r_K}{r}\right)^{2\gamma}} \right] \equiv F_2(r). \end{aligned} \quad (10.5.4)$$

При квазистационарном рассмотрении, следуя § 10.1, можно в первом приближении магнетронный генератор заменить эквивалентным колебательным контуром с сосредоточенными параметрами, возбуждаемым током, равным $\int_V \mathbf{j} \mathbf{E}_\pi(\mathbf{r}) dV$. Введем эквивалентную сосредоточенную емкость контура, равную

$$C = \frac{1}{4\pi} \int_V (\mathbf{E}_\pi)^2 dv = \frac{V}{46\pi\beta^2 r_a^2}.$$

Тогда значения эквивалентной индуктивности и волнового сопротивления будут следующими:

$$L = \frac{4\pi}{\omega_1^2 \int_V (\mathbf{E}_\pi)^2 dv}, \quad Z_B = \frac{4\pi}{\omega_1 \int_V (\mathbf{E}_\pi)^2 dv}.$$

Резонансная частота эквивалентного контура равна $\omega_1 = \omega_\pi$, добротность $Q = Q_\pi$.

Введем величину $Z_B i_\pi = x$, равную колебательному напряжению, развиваемому на волновом сопротивлении контура, — напряжение на эквивалентной индуктивности контура. Будем иметь тогда

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_1^2 x = F\left(x, \frac{dx}{dt}\right),$$

где

$$F\left(x, \frac{dx}{dt}\right) = -\frac{\omega_1}{Q} \frac{dx}{dt} + \omega_1^2 Z_B \int_V \mathbf{j} \mathbf{E}_\pi(\mathbf{r}) dV. \quad (10.5.5)$$

Поле в резонаторе будет теперь иметь следующий вид:

$$\mathbf{E}_\Sigma = \mathbf{E}_0 - \frac{1}{\omega_1} \frac{dx}{dt} \mathbf{E}_\pi(\mathbf{r}), \quad \mathbf{H}_\Sigma = \mathbf{H}_0 + x \mathbf{H}_\pi(\mathbf{r}).$$

Основная трудность в определении параметров автоколебания магнетрона это определение зависимости интеграла в (10.5.5) от x и от dx/dt . Этот интеграл по существу является наведенным током, тем током, который возбуждает контур.

4. Для нахождения параметров установившихся автоколебаний, которые в первом приближении считаются синусоидальными, согласно § 5.2, не требуется полного знания $F(x, dx/dt)$, а необходимо знать только первую гармонику этой функции при подстановке

$$x = R \cos \psi, \quad \frac{dx}{dt} = -\omega_1 R \sin \psi, \quad \psi = \omega_1 t + \vartheta,$$

т. е., другими словами, требуется знание функций $\Phi(\omega, R)$, $\Psi(\omega, R)$ в разложении

$$F(R \cos \psi, -\omega_1 R \sin \psi) = \Psi(\omega, R) \cos \psi + \Phi(\omega, R) \sin \psi + \\ + \text{высшие гармоники.}$$

Это значит, что для наведенного тока необходимо знать лишь его первые гармоники $\Phi(\omega, R)$ и $\Psi(\omega, R)$:

$$I_n = \int_V \mathbf{j} \mathbf{E}_\pi(\mathbf{r}) dV = \Psi(\omega, R) \cos \psi + \Phi(\omega, R) \sin \psi + \\ + \text{высшие гармоники.}$$

Вычисление Ψ и Φ в общем случае представляется чрезвычайно сложным делом. Лишь при принятии целого ряда предположений и упрощений удастся приближенно вычислить указанные функции.

Полагая, что и ρ , и v , входящие во вторую формулу (10.5.2), не зависят от координаты z , т. е. сразу же ограничиваясь плоской задачей и принимая во внимание, что $E_{z\pi} \equiv 0$, получим [95]

$$I_n = I_{n\varphi'} + I_{nr}, \\ I_{n\varphi'} = h \int_{r_k}^{r_a} \int_{\varphi_0}^{\varphi_0 + 2\pi} r \rho v_{\varphi'} E_{\varphi'\pi} dr d\varphi', \\ I_{nr} = h \int_{r_k}^{r_a} \int_{\varphi_0}^{\varphi_0 + 2\pi} r \rho v_r E_{r\pi} dr d\varphi', \quad (10.5.6)$$

где h — высота катода (и анодного блока). Ограничение плоской задачей по существу означает пренебрежение краевыми эффектами.

Теперь необходимо дать оценки ρ и v_ϕ , v_r . Для этого необходимо иметь какие-либо упрощающие предположения о форме пространственного заряда и его движении, ибо точное нахождение ρ и v с учетом всех действующих полей просто-напросто нереализуемо.

Как уже указывалось выше, траектории движения электронов в пространстве взаимодействия магнетрона достаточно сложны. Если не учитывать движение электронов по петлям, а за скорость движения пространственного заряда принять скорость среднего азимутального движения, соответствующую частоте высокочастотного поля, то по условию синхронизма $v_\phi = 2\omega_0 r/N$. Кроме этого, примем, что спицы пространственного заряда имеют простейшую форму (см. рис. 10.9) с угловой шириной 2σ . Можно также показать, что для π -вида колебания пространственный заряд образует $N/2$ спиц. Предполагая далее для простоты, что радиальная скорость v_r не изменяется по ширине спицы, приближенно можно принять

$$v_r(r) = -\frac{NR}{\pi r_a B} \frac{\sin \frac{\beta N}{2}}{\frac{\beta N}{2}} F_1(r) \frac{\sin \frac{\sigma N}{2}}{\frac{\sigma N}{2}} \cos \frac{\theta_1 N}{2} \sin \psi, \quad (10.5.7)$$

где B — индукция магнитного поля, θ_1 — угловой сдвиг центра спицы по отношению к центру щели в тот момент, когда напряжение на резонаторе имеет максимальное значение. Для плотности заряда в идеализированной спице легко найти

$$\rho(r) = \frac{I_0}{hN\sigma r v_r},$$

где I_0 — анодный ток магнетрона.

Собирая вместе все сомножители в (10.5.6), ограничиваясь только первой гармоникой в разложении $E_{\phi\pi}$, интегрируя приближенно по идеализированным спицам, расположенным от прикатодного слоя радиуса r_1 до анода, можно найти окончательно

$$I_n = -\frac{R_1 I_0}{R \cos \theta} \sin [\psi + \theta] + \frac{k_1 I_0}{\cos \theta} \cos [\psi + 2\theta], \quad (10.5.8)$$

где введены следующие обозначения:

$$R_1 = \frac{\omega_1 B (r_a^2 - r_1^2)}{N}, \quad k_1 = k_2 k_3, \quad \theta = \theta_1 \frac{N}{2},$$

$$k_2 = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin \frac{\beta N}{2}}{\frac{\beta N}{2}} \frac{\sin \frac{\sigma N}{2}}{\frac{\sigma N}{2}}, \quad k_3 = 1 - \frac{\left(\frac{r_1}{r_k}\right)^{N/2} - \left(\frac{r_1}{r_k}\right)^{-N/2}}{\left(\frac{r_a}{r_k}\right)^{N/2} - \left(\frac{r_a}{r_k}\right)^{-N/2}}.$$

Здесь R_1 — некоторое напряжение, k_1, k_2, k_3 — безразмерные параметры. Отсюда легко найти теперь Ψ_n и Φ_n . Следует только иметь в виду, что, выразив плотность пространственного заряда $\rho(r)$ через анодный ток магнетрона I_0 , мы тем самым перенесли зависимость ρ от амплитуды поля на зависимость I_0 от амплитуды автоколебаний. Тем самым $I_0 = I_0(R)$. Принимая во внимание (10.5.5), можем теперь записать выражения для $\Psi(\omega, R)$ и $\Phi(\omega, R)$:

$$\Psi(\omega, R) = -Z_b \omega_1 \omega \frac{R_1}{R} I_0(R) \operatorname{tg} \theta + Z_b \omega_1^2 I_0(R) k_1 \frac{\cos 2\theta}{\cos \theta}, \quad (10.5.9)$$

$$\Phi(\omega, R) = \frac{\omega_1 \omega}{Q} R - Z_b \omega_1 \omega \frac{R_1}{R} I_0(R) - 2Z_b \omega_1^2 I_0(R) k_1 \sin \theta. \quad (10.5.10)$$

5. Теперь осталось получить хотя бы приближенное выражение для $I_0(R)$. Если этого не делать, то из (10.5.10), вообще говоря, можно получить выражения для амплитуды, частоты и мощности колебания в режиме установившихся колебаний в зависимости от I_0 . Однако если искать прочность предельного цикла p и неизохронность магнетронного генератора q , знание зависимости $I_0(R)$ является необходимым.

Рассмотрим идеализированную спицу, вращающуюся в установившемся режиме. Очевидно, что в любом сечении спицы полные токи равны, так как в установившемся режиме не может иметь места накопление заряда в спице. Вводя обозначения ρ_1 — плотность пространственного заряда у границы с прикатодным слоем, можно написать

$$I_0 = I_0(R) = N \sigma r_1 h \rho_1 v_{rm}(\bar{r}_1),$$

где $v_{rm}(r)$ — амплитуда $v_r(r)$ среднего значения радиальной скорости перемещения электронов в спице, данного формулой (10.5.7). Тем самым

$$I_0 = I_0(R) = 2 \frac{h N^2}{B} \frac{r_1}{r_a} F_1(r_1) k_2 \rho_1 \sigma R \cos \theta.$$

Кроме явной зависимости I_0 от R , согласно полученному выражению, имеется зависимость I_0 от R через $\rho_1 \sigma$, ибо при изменении амплитуды автоколебаний изменяется и геометрия спицы и плотность пространственного заряда в ней.

Прежде всего очевидно, что при возрастании амплитуды автоколебаний R плотность заряда в спице ρ_1 должна увеличиваться. С другой стороны, при дальнейшем возрастании амплитуды переменного поля должна вступать в игру нелинейность, связанная с насыщением или с явлением ограничения тока пространственным зарядом спицы, приводящая к уменьшению роста ρ_1 . Точный физический анализ этой зависимости представ-

ляется чрезвычайно сложным и неясным. Поэтому эту зависимость можно аппроксимировать лишь чисто интуитивно или по аналогии с другими электронными приборами. Примем, что $\rho_1 \sigma$ зависит от R следующим образом:

$$\rho_1 \sigma = \rho_0 s_0 R \left[1 - s_1 \frac{R^2}{V_0^2} \right].$$

Здесь V_0 — напряжение на аноде магнетрона, s_0, s_1 — постоянные, ρ_0 — предосцилляционная плотность заряда в прикатодном слое. Пропорциональность ρ_1 плотности заряда ρ_0 представляется довольно естественной.

Предполагая далее, что $\sin(\sigma N/2)/(\sigma N/2)$ не зависит от R при изменении R вблизи R_0 (стационарной установившейся амплитуды), получим следующее окончательное выражение для $I_0(R)$:

$$I_0 = I_0(R) = \rho_0 s_0 R^2 \left[1 - s_1 \frac{R^2}{V_0^2} \right] \frac{hN^2}{\pi B} \frac{r_1}{r_a} F_1(r_1) 2\pi k_2 \cos \theta. \quad (10.5.11)$$

6. Полученные формулы (10.5.9) — (10.5.11) на основании § 5.2 позволяют полностью решить вопрос об укороченных динамических уравнениях магнетронного генератора, которые имеют обычный вид:

$$\frac{dR}{dt} = -\frac{1}{2\omega_1} \Phi(\omega_1, R), \quad \frac{d\theta}{dt} = -\frac{1}{2\omega_1 R} \Psi(\omega_1, R).$$

Определим теперь параметры установившихся автоколебаний. Для этого запишем прежде всего $\Phi(\omega, R)$ и $\Psi(\omega, R)$ в более полной форме:

$$\begin{aligned} \Phi(\omega, R) = \frac{\omega_1^2}{Q} \left\{ \frac{\omega}{\omega_1} R - \frac{\omega}{\omega_1} n_1 R \left[1 - s_1 \frac{R^2}{V_0^2} \right] \cos \theta - \right. \\ \left. - n_1 k_1 \frac{R}{R_1} R \left[1 - s_1 \frac{R^2}{V_0^2} \right] \sin 2\theta \right\}, \\ \Psi(\omega, R) = \frac{\omega_1^2}{Q} \left\{ -\frac{\omega}{\omega_1} n_1 R \left[1 - s_1 \frac{R^2}{V_0^2} \right] \sin \theta + \right. \\ \left. + n_1 k_1 \frac{R}{R_1} R \left[1 - s_1 \frac{R^2}{V_0^2} \right] \cos 2\theta \right\}, \end{aligned} \quad (10.5.12)$$

где введен безразмерный параметр

$$n_1 = 2Q_1 \rho_0 s_0 \omega_1 Z_B (r_a^2 - r_1^2) hN \frac{r_1}{r_a} F_1(r_1) k_2.$$

Установившееся значение амплитуды R_0 будет являться корнем уравнения $\Phi(\omega_1, R) = 0$.

При малых токах I_0 в левых частях рабочих характеристик магнетрона, т. е. при отрицательных θ , можно пренебречь влиянием радиальной компоненты наведенного тока на амплитуду автоколебания магнетрона [95]. Учитывая это, нетрудно получить следующее приближенное значение для установившейся амплитуды автоколебания:

$$R_0^2 = \frac{V_0^2}{s_1} \frac{n_1 \cos \theta - 1}{n_1 \cos \theta}. \quad (10.5.13)$$

Или, если выражать амплитуду через анодный ток магнетрона I_0 , который считаем заданным:

$$R_0^2 = \frac{Z_b Q \omega_1 B (r_a^2 - r_1^2) I_0}{N} = Z_b I_0 Q R_1. \quad (10.5.14)$$

Колебательная мощность равна тогда

$$P_r = \frac{R_0^2}{2Z_b Q} = \frac{\omega_1 B (r_a^2 - r_1^2) I_0}{2N} = \frac{I_0 R_1}{2}. \quad (10.5.15)$$

Отметим здесь, что введенная величина s_0 может быть определена из эксперимента с помощью (10.5.11) и (10.5.12), если известны колебательная мощность магнетрона и его анодный ток (а также все конструктивные и рабочие параметры). Поэтому ее можно считать заданной.

Частота автоколебания магнетрона равна

$$\omega_0 = \omega_1 + \Delta\omega_0 = \omega_1 - \frac{1}{2\omega_1 R_0} \bar{\Psi}(\omega_1, R_0).$$

С помощью (10.5.9) можно найти

$$\omega_0 = \omega_1 \left[1 + \frac{I_0 R_1 Z_b}{2R_0^2} M_2 \right], \quad (10.5.16)$$

где

$$M_2 = M_2(R_0, \theta) = \operatorname{tg} \theta - k_1 \frac{R_0}{R_1} \frac{\cos 2\theta}{\cos \theta}.$$

Если радиальной компонентой можно пренебречь, то

$$\omega_0 = \omega_1 \left[1 + \frac{1}{2Q} \operatorname{tg} \theta \right].$$

Прочность предельного цикла автогенератора, равную

$$P = \frac{1}{2\omega_1} \left(\frac{\partial \Phi(\omega_1, R)}{\partial R} \right)_{R_0},$$

§ 10.6]

находим, дифференцируя (10.5.10):

$$\rho = \frac{\omega_1}{Q} \{(n_1 \cos \theta - 2) M_1 + 1\}, \quad (10.5.17)$$

где

$$M_1 = M_1(R_0, \theta) = 1 + k_1 \frac{R_0}{R_1} \frac{\sin 2\theta}{\cos \theta}.$$

Для устойчивости стационарной амплитуды R_0 необходимо положительное значение ρ . Формула (10.5.17) позволяет оценивать устойчивость того или иного режима работы магнетрона.

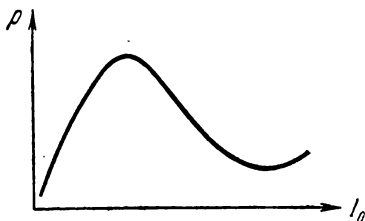


Рис. 10.11.

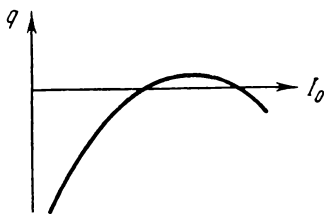


Рис. 10.12.

На рис. 10.11 изображен качественный ход зависимости прочности предельного цикла магнетронного генератора от анодного тока.

Вычисляя неизохронность магнетронного генератора

$$q = \frac{R_0}{2\omega_1} \left(\frac{\partial \Psi(\omega_1, R)/R}{\partial R} \right)_{R_0},$$

найдем

$$q = \frac{\omega_1}{Q} \{(n_1 \cos \theta - 2) M_2 + \operatorname{tg} \theta\}.$$

На рис. 10.12 изображен качественный ход зависимости неизохронности магнетронного генератора от анодного тока.

Таким образом, в общем случае магнетрон является неизохронным автогенератором. Однако при некоторых режимах его можно считать изохронным.

§ 10.6. Флуктуационные уравнения магнетрона

1. Источников флуктуаций в магнетроне много: это тепловой шум резонатора, дробовой шум электронного потока, флуктуации начальной скорости электронов, покидающих катод, шумы вторичной эмиссии, фликкерный шум катода, флуктуации параметров и т. п.

Мы рассмотрим лишь основные шумы: тепловой, дробовой и фликкерный. Даже в этом простейшем случае расчет флуктуаций

в магнетроне на основании той модели, которая рассмотрена в предыдущем параграфе, является довольно приближенным. Что же касается прочих флуктуаций, то, например, учет флуктуаций начальной скорости электронов в рамках принятой модели вообще произвести невозможно, ибо за скорость движения электронов мы принимали среднюю скорость, равную скорости движения петель электронных траекторий, которая зависит только от поля. Начальная скорость электрона на эту среднюю скорость влияния не оказывает и поэтому не входит в уравнения.

Учет тепловых шумов магнетрона можно производить обычным образом, если считать известным r — сопротивление потерь резонаторной системы.

Дробовой и фликкерный шумы магнетрона можно приближенно учесть, рассматривая дробовой и фликкерный шумы наведенного тока. При этом следует иметь в виду, что у наведенного тока имеется постоянная составляющая, которую мы не принимали во внимание при написании уравнений движения магнетрона в предыдущем параграфе. При рассмотрении колебательного детерминированного движения магнетрона это было можно делать, так как постоянная составляющая наведенного тока в автоколебаниях ничего не изменяла. Однако при обращении к флуктуационным процессам постоянную составляющую наведенного тока необходимо учитывать, ибо она в общем случае является источником как дробового, так и фликкерного шума. Очевидно, что постоянная составляющая наведенного тока равна I_0 .

Таким образом, величина I_0 в наведенный ток входит двояко: как постоянная составляющая и как сомножитель, входящий в первую гармонику наведенного тока, данную формулой (10.5.8). Полагая, что вместо I_0 имеется

$$I_0 + i(t),$$

где $i(t)$ — флуктуационное слагаемое наведенного тока, обязанное дробовому и фликкерному шумам, мы тем самым учитываем флуктуации тока магнетрона. Вводя шумовую ЭДС $\mathcal{E}(t)$ в эквивалентный контур магнетрона, мы учтем его тепловые шумы.

2. С учетом вышесказанного уравнение движения магнетрона принимает обычный вид:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_1^2 x = F\left(x, \frac{dx}{dt}\right) + \omega_1^2 E(t, x),$$

где $F(x, dx/dt)$ задана формулой (10.5.5), а

$$E(t, x) = Z_{\text{в}} i_{\text{ш}}(t, x) + \omega_1^{-1} \frac{d\mathcal{E}(t)}{dt}.$$

На основании § 5.2 записываем флуктуационные уравнения магнетрона

$$\frac{d\alpha}{dt} = -p\alpha + \frac{\omega_1}{2R_0} F_{\perp}(t), \quad \frac{d\varphi}{dt} = -q\alpha - \frac{\omega_1}{2R_0} F_{\parallel}(t),$$

где обозначено:

$$F_{\perp}(t) = Z_{\text{в}} I_{\perp} + E_{\perp} \cos \varphi - E_{\parallel} \sin \varphi, \quad (10.6.1)$$

$$F_{\parallel}(t) = Z_{\text{н}} I_{\parallel} + E_{\parallel} \cos \varphi + E_{\perp} \sin \varphi,$$

$$I_{\perp} = I_{\perp}(t) = -\frac{2}{T_0} \int_{t-T_0}^t i_{\text{ш}}(t, x) \sin \psi dt,$$

$$I_{\parallel} = I_{\parallel}(t) = \frac{2}{T_0} \int_{t-T_0}^t i_{\text{ш}}(t, x) \cos \psi dt,$$

(10.6.2)

$$E_{\perp} = E_{\perp}(t) = -\frac{2}{T_0} \int_{t-T_0}^t \omega_1^{-1} \frac{d\xi}{dt} \sin \omega_0 t dt,$$

$$E_{\parallel} = E_{\parallel}(t) = \frac{2}{T_0} \int_{t-T_0}^t \omega_1^{-1} \frac{d\xi}{dt} \cos \omega_0 t dt.$$

Нетрудно видеть, что шумовой ток $i_{\text{ш}}(t, x)$ на основании вышеприведенных соображений имеет следующий вид:

$$i_{\text{ш}}(t, x) = i(t) + \frac{1}{\cos \theta} \left[-\frac{R_1}{R_0} \sin(\psi + \theta) + k_1 \cos(\psi + 2\theta) \right] i(t).$$

Подставляя это значение в первые две формулы (10.6.2), нетрудно найти:

$$I_{\perp} = i_{\perp} \cos \varphi - i_{\parallel} \sin \varphi + \frac{1}{2} N_1 (i_0 - i_{\parallel 2}) - \frac{1}{2} N_2 i_{\perp 2}, \quad (10.6.3)$$

$$I_{\parallel} = i_{\parallel} \cos \varphi + i_{\perp} \sin \varphi - \frac{1}{2} N_2 (i_0 + i_{\parallel 2}) + \frac{1}{2} N_1 i_{\perp 2},$$

где

$$N_1 = N_1(R_0, \theta) = \frac{R_1}{R_0} M_1(R_0, \theta), \quad N_2 = N_2(R_0, \theta) = \frac{R_1}{R_0} M_2(R_0, \theta).$$

Использованные в (10.6.3) обозначения медленных случайных функций

$$i_0 = I_{\parallel 0}(t), \quad i_{\parallel} = I_{\parallel 1}(t), \quad i_{\perp} = I_{\perp 1}(t), \quad i_{\parallel 2} = I_{\parallel 2}(t), \quad i_{\perp 2} = I_{\perp 2}(t)$$

соответствуют формулам (10.2.12) § 10.2, в котором даны значения спектральных плотностей и функций корреляций для указанных компонент (см. (10.2.15), (10.2.16), (10.2.18), (10.2.19)).

Из этих формул следует, что i_0 есть медленная компонента шума $i(t)$; $i_{||}$, i_{\perp} , $i_{||2}$, $i_{\perp2}$ — компоненты, обязанные частям спектра шума $i(t)$, расположенным вблизи частот соответственно ω_0 и $2\omega_0$.

При рассмотрении фликкерного шума мы должны, естественно, ограничиваться только компонентой i_0 . При рассмотрении дробового шума мы всегда учитывали еще и компоненты $i_{||}$, i_{\perp} , $i_{||2}$, $i_{\perp2}$ для всех рассмотренных выше автогенераторов. Однако с этой точки зрения магнетрон занимает особое положение. Оно заключается в том, что дробовой шум магнетрона нельзя считать белым шумом.

3. Рассмотрим это подробнее. Спектральная плотность дробового шума в самом общем случае, согласно § 3.2, равна

$$S_{др}(\omega) = \frac{1}{2\pi} e I_0 \Gamma^2 M(\omega \tau_0), \quad (10.6.4)$$

где $M(\omega \tau_0)$ дается формулой (3.2.1).

Дробовой шум анодного тока магнетрона, строго говоря, имеет спектральную плотность, заметно отличающуюся от приведенной. Это связано, прежде всего, с иной формой элементарного импульса наведенного тока при движении отдельного электрона в магнетроне по сравнению с формой тока, приведенной на рис. 3.5. Для магнетрона форма импульса наведенного тока будет иметь как бы «высокочастотное заполнение», связанное с движением электрона по петлям. Кроме того, если в обычном диоде скорость электрона сильно возрастала по приближении его к аноду, то для магнетрона это не так, поскольку электрон, приближаясь к аноду, все большую и большую часть своей энергии отдает высокочастотному полю. Тем самым иная форма импульса наведенного тока приведет к иной форме спектра дробового шума. Однако остается главное — спадание спектральной плотности $S_{др}(\omega)$ на частотах, соответствующих времени пролета электронов τ_0 .

Другая причина отличия дробового шума магнетрона от дробового шума диода связана с разной структурой и разной динамикой пространственного заряда, что приводит к различным коэффициентам депрессии дробового шума. И если для диода депрессию можно считать принципиально ясной, то для магнетрона она почти не исследована. Поскольку, однако, весь проводимый анализ работы магнетрона и его флуктуаций является приближенным, оправданным является применение и для дробового шума магнетрона формулы (10.6.4).

Вышеупомянутое особое положение магнетронного генератора заключается в том, что для всех выше рассмотренных авто-

генераторов выполнялось условие $\omega_0 \ll \tau_0^{-1}$, в то время как для магнетрона оно не выполняется.

В самом деле, как уже неоднократно упоминалось, электроны в пространстве катод — анод движутся по петлеобразным кривым вдоль анодного блока магнетрона. В среднем за половину периода автоколебаний они проходят расстояние от одной щели до другой. За время движения от катода к аноду (а это и есть время пролета τ_0) электроны проходят большое количество щелей, совершая подчас несколько оборотов вдоль анодного блока до тех пор, пока они не попадут на анод. Это значит, что время пролета электронов много больше периода автоколебаний, и фазовый угол пролета на частоте автоколебаний $\theta_0 = \omega_0 \tau_0 = 2\pi \frac{\tau_0}{T_0} \gg 2\pi$. Другими словами, постоянное магнитное

поле магнетрона совместно с высокочастотным полем так искажает траекторию электронов, что время их пролета от катода до анода существенно возрастает по сравнению с временем пролета для обычных электронных ламп и намного превышает период автоколебаний магнетрона. Таким образом, на частоте автоколебаний магнетрона, вследствие малости $M(\omega_0 \tau_0)$ дробовой шум магнетрона практически отсутствует.

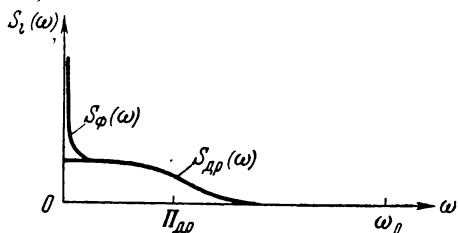


Рис. 10.13.

Общая картина спектра флуктуаций наведенного тока $i(t)$ изображена на рис. 10.13. Резкий подъем $S_i(\omega)$ в области низких частот обязан фликкерному шуму наведенного тока.

4. Поскольку спектр флуктуаций наведенного тока не простирается ни до частоты ω_0 , ни, тем более, до частоты $2\omega_0$, то флуктуации наведенного тока $i(t)$ можно считать случайной функцией, медленной по сравнению с $\cos \omega_0 t$. Вследствие этого компоненты i_{\parallel} , i_{\perp} , $i_{\parallel 2}$, $i_{\perp 2}$, входящие в выражения для I_{\parallel} и I_{\perp} , равны тождественно нулю. Функции $F_{\perp}(t)$, $F_{\parallel}(t)$, входящие во флуктуационное уравнение магнетрона, принимают теперь следующий вид:

$$\begin{aligned} F_{\perp}(t) &= E_{\perp} \cos \varphi - E_{\parallel} \sin \varphi + Z_{\text{в}} \frac{1}{2} N_1 i_0, \\ F_{\parallel}(t) &= E_{\parallel} \cos \varphi + E_{\perp} \sin \varphi - Z_{\text{в}} \frac{1}{2} N_2 i_0. \end{aligned} \quad (10.6.5)$$

Таким образом, дробовой шум, будучи по существу низкочастотным, тем не менее влияет непосредственно на флуктуации

амплитуды и фазы колебаний магнетрона. Это влияние осуществляется благодаря существованию периодической нестационарности дробового шума. Можно сказать, что дробовой шум модулирован первой гармоникой наведенного тока (хотя по соотношению временных постоянных следовало бы скорее сказать, что дробовой шум модулирует первую гармонику наведенного тока). Эти утверждения распространяются и на фликкерный шум магнетрона.

Можно показать, что периодическая нестационарность дробового шума имеет место и для автогенераторов на обычных лампах (1958 [1], 1961 [15]). Однако для этих автогенераторов влияние медленной компоненты дробового шума практически незначительно — основное влияние на автогенератор дробовой шум оказывает на частоте автоколебаний ω_0 .

§ 10.7. Естественные флуктуации магнетрона

Рассмотрим естественные флуктуации магнетрона, порождаемые тепловыми и дробовыми шумами. Можно записать, что $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_\tau(t)$, $i(t) = i_{\text{др}}(t)$. В силу медленности $i_{\text{др}}(t)$ по сравнению с $\cos \omega_0 t$ имеем $i_0(t) = 2i_{\text{др}}(t)$.

1. Согласно § 5.3 слагаемое теплового шума $\omega_1^{-1} d\mathcal{E}_\tau/dt$ можно заменить на $\mathcal{E}_\tau(t)$. Это значит, что $E_\parallel(t) \rightarrow e_\parallel(t)$, $E_\perp(t) \rightarrow e_\perp(t)$, где e_\parallel и e_\perp связаны с $\mathcal{E}_\tau(t)$ формулами (5.2.15) и являются независимыми дельта-коррелированными случайными процессами с функциями корреляции и спектральными плотностями, равными

$$S_{\tau\parallel}(\Omega) = S_{\tau\perp}(\Omega) = 2S_\tau(\Omega) = \frac{2}{\pi} kTr,$$

$$\Phi_{\tau\parallel}(\tau) = \Phi_{\tau\perp}(\tau) = 4kTr\delta(\tau), \quad \Phi_{\tau\parallel\perp}(\tau) \equiv 0.$$

Указанная дельта-коррелированность дает возможность применить к флуктуационным уравнениям метод статистической эквивалентности и вместо (10.6.5) для $F_\perp(t)$ и $F_\parallel(t)$ взять следующие выражения:

$$F_\perp(t) = e_\perp + Z_b N_1 i_{\text{др}}, \quad F_\parallel(t) = e_\parallel - Z_b N_2 i_{\text{др}}. \quad (10.7.1)$$

Принимая во внимание (3.2.2), находим спектральные плотности функций (10.7.1):

$$S_\perp(\Omega) = \frac{1}{2\pi} \left\{ D_\tau + \frac{1}{2} D_{\text{др}} N_1^2 M(\Omega\tau_0) \right\},$$

$$S_\parallel(\Omega) = \frac{1}{2\pi} \left\{ D_\tau + \frac{1}{2} D_{\text{др}} N_2^2 M(\Omega\tau_0) \right\}, \quad (10.7.2)$$

$$S_{\parallel\perp}^0(\Omega) = -\frac{1}{4\pi} N_1 N_2 D_{\text{др}} M(\Omega\tau_0), \quad S_{\parallel\perp}^1(\Omega) \equiv 0.$$

Соответствующие функции корреляции равны (см. 3.2.4)):

$$\begin{aligned}\Phi_{\perp}(\tau) &= D_{\text{др}}\delta(\tau) + \frac{2}{3\tau_0} N_1^2 D_{\text{др}} R(\tau), \\ \Phi_{\parallel}(\tau) &= D_{\text{др}}\delta(\tau) + \frac{2}{3\tau_0} N_2^2 D_{\text{др}} R(\tau), \\ \Phi_{\parallel\perp}(\tau) &= -\frac{2}{3\tau_0} N_1 N_2 D_{\text{др}} R(\tau),\end{aligned}\quad (10.7.3)$$

где введено обозначение

$$R(\tau) = \begin{cases} \left(1 - \frac{|\tau|}{\tau_0}\right)^2 \left(1 + \frac{|\tau|}{2\tau_0}\right), & |\tau| \leq \tau_0, \\ 0, & |\tau| \geq \tau_0. \end{cases}$$

Здесь, как всегда,

$$D_{\tau} = 4kT\tau, \quad D_{\text{др}} = 2Z_s^2 e I_0 \Gamma^2 = 2Q^2 r^2 e I_0 \Gamma^2 = 2Z_{\text{oe}} r e I_0 \Gamma^2.$$

Полученные формулы дают теперь возможность вычислить характеристики естественных амплитудных и частотных флуктуаций магнетрона.

2. Амплитудные флуктуации. Рассмотрим первое флуктуационное уравнение

$$\frac{da}{dt} = -pa + \frac{\omega_1}{2R_0} F_{\perp}(t). \quad (10.7.4)$$

Воспользовавшись формулой (2.2.29) и (II.23), получаем следующее выражение для функции корреляции амплитудных флуктуаций:

$$\Phi_a(\tau) = \frac{\omega_1^2}{8pR_0^2} \left[D_{\tau} e^{-p|\tau|} + \frac{2}{3\tau_0} N_1^2 D_{\text{др}} \int_0^{\infty} [R(\tau+u) + R(\tau-u)] e^{-pu} du \right].$$

Отсюда легко найти интенсивность естественных амплитудных флуктуаций магнетрона

$$\langle \alpha^2 \rangle = \frac{\omega_1^2}{8pR_0^2} \left\{ D_{\tau} + \frac{2}{3\tau_0} N_1^2 D_{\text{др}} 2 \int_0^{\infty} R(u) e^{-pu} du \right\}. \quad (10.7.5)$$

Первое слагаемое в этой формуле обязано тепловым шумам, и оно имеет такой же вид, как и для других рассмотренных автогенераторов. Второе слагаемое обязано дробовым шумам наведенного тока. Подставив сюда значение N_1 нетрудно проследить влияние на амплитудные флуктуации дробовых шумов тангенциальной составляющей (члены с R_1/R_0) и радиальной составляющей (члены с k_1) наведенного тока.

Как следует из (10.7.5), интенсивность флуктуаций амплитуды существенно зависит от величины произведения

$$p\tau_0 = \frac{4}{3} \pi \frac{p}{\Pi_{\text{др}}}.$$

Примем для простоты анализа, что $p\tau_0 \ll 1$ — прочность предельного цикла достаточно мала по сравнению с шириной спектра дробового шума магнетрона, что, по-видимому, имеет место для всех реальных магнетронов. Это предположение означает фактически, что с точки зрения *амплитудных* флуктуаций дробовой шум магнетрона можно считать белым шумом. В этом случае спектральная плотность и интенсивность амплитудных флуктуаций принимают простой вид:

$$S_a(\Omega) = \frac{\omega_1^2}{8\pi R_0^2} \frac{D_{\tau} + \frac{1}{2} N_1^2 D_{\text{др}}}{\Omega^2 + p^2}, \quad (10.7.6)$$

$$\langle a^2 \rangle = \frac{\omega_1^2}{8pR_0^2} \left[D_{\tau} + \frac{1}{2} N_1^2 D_{\text{др}} \right]. \quad (10.7.7)$$

Проанализируем величину интенсивности амплитудных флуктуаций магнетрона для частного случая $\theta=0$, когда $N_1 = R_1/R_0$, $N_2 = -k_1$. Вводя в рассмотрение мощность магнетрона P_{τ} и пользуясь тем, что $R_0^2 = 2P_{\tau}Q^2r$, $R_1 = 2P_{\tau}/I_0$, найдем, подставляя в предыдущую формулу значения D_{τ} , $D_{\text{др}}$ и N_1 :

$$\langle a^2 \rangle = \frac{\omega_1^2}{4pQ^2} \left\{ \frac{kT}{P_{\tau}} + \frac{e\Gamma^2}{2I_0} \right\}. \quad (10.7.8)$$

Все входящие сюда величины могут быть определены экспериментально, поэтому эта формула дает возможность сравнивать экспериментальные значения с теоретическими.

Оценим удельную роль вклада тепловых и дробовых шумов в амплитудные флуктуации магнетрона:

$$\frac{\text{дроб.}}{\text{тепл.}} = \frac{e\Gamma^2}{2kT} \frac{P_{\tau}}{I_0}.$$

Полагая $T = 300^\circ \text{K}$, $\Gamma^2 = 0,2$, найдем

$$\frac{\text{дроб.}}{\text{тепл.}} = 4 \frac{P_{\tau} (вт)}{I_0 (a)}.$$

Поскольку для большинства реальных магнетронов отношение $P_{\tau}(вт)/I_0(a)$ больше 10, то отсюда следует, что влиянием тепловых шумов на амплитудные флуктуации можно пренебречь по сравнению с влиянием дробовых шумов (тем более, что мы учли дробовые шумы только тангенциальной составляющей наведенного тока).

3. Частотные флуктуации. Обратимся ко второму флуктуационному уравнению

$$\dot{\nu} = \frac{d\varphi}{dt} = -q\alpha - \frac{\omega_1}{2R_0} F_{\parallel}(t).$$

С помощью (2.3.20) находим спектральную плотность флуктуаций частоты магнетрона

$$S_{\nu}(\Omega) = \frac{\omega_1^2}{8\pi R_0^2} \left\{ D_{\tau} + \frac{1}{2} D_{\text{др}} N_2^2 M(\Omega\tau_0) + \right. \\ \left. + q \frac{q \left\{ D_{\tau} + \frac{1}{2} D_{\text{др}} N_1^2 M(\Omega\tau_0) \right\} - p N_1 N_2 D_{\text{др}} M(\Omega\tau_0)}{\Omega^2 + p^2} \right\}.$$

Этот спектр имеет сложный вид, что связано в основном с влиянием амплитудных флуктуаций на частотные вследствие неизохронности магнетронного генератора.

Если магнетрон работает в изохронном режиме, спектральная плотность принимает более простой вид:

$$S_{\nu}(\Omega) = \frac{\omega_1^2}{8\pi R_0^2} \left[D_{\tau} + \frac{1}{2} D_{\text{др}} N_2^2 M(\Omega\tau_0) \right], \quad (10.7.9)$$

но все равно зависит от частоты. Это связано с тем, что для флуктуаций частоты мы уже не можем пренебречь вкладом тепловых шумов по сравнению с дробовыми. Если считать, что N_1 и N_2 являются величинами одного порядка, то для $\Omega \ll \ll \tau_0^{-1}$ мы можем пренебречь тепловыми шумами, однако для $\Omega \gg \tau_0^{-1}$ тепловые шумы могут давать основной вклад. На рис. 10.14 изображен примерный вид спектра естественных флуктуаций частоты магнетрона.

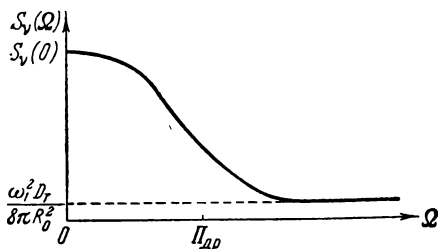


Рис. 10.14.

4. С помощью (2.3.21) не представляет труда записать теперь совместные спектральные плотности флуктуаций амплитуды и частоты

$$S_{\alpha\nu}^0(\Omega) = \frac{\omega_1^2}{8\pi R_0^2} \frac{q \left[D_{\tau} + \frac{1}{2} D_{\text{др}} N_1^2 M(\Omega\tau_0) \right] - p \frac{N_1 N_2}{2} D_{\text{др}} M(\Omega\tau_0)}{\Omega^2 + p^2}, \quad (10.7.10)$$

$$S_{\alpha\nu}^1(\Omega) = - \frac{\omega_1^2}{8\pi R_0^2} \frac{\Omega \frac{N_1 N_2}{2} D_{\text{др}} M(\Omega\tau_0)}{\Omega^2 + p^2}.$$

Характерной особенностью этих совместных спектральных плотностей является то, что они не обращаются в нуль и для изохронного режима магнетрона. Причина этого опять-таки лежит в том, что и амплитудные, и частотные флуктуации порождаются одной и той же случайной функцией $i_{\text{др}}(t)$ — низкочастотным (по сравнению с $\cos \omega_0 t$) шумом, и поэтому между ними всегда имеется корреляция.

Для изохронного режима и $\theta=0$ имеем, учитывая, что $\rho\tau_0 \ll 1$:

$$S_{\text{ав}}^0(\Omega) = \frac{\omega_1^2}{8\pi Q^2} e\Gamma^2 \sqrt{\frac{Z_{\text{oe}}}{2P_r}} \frac{pk_1}{\Omega^2 + p^2}, \quad S_{\text{ав}}^1(\Omega) = \frac{\Omega}{p} S_{\text{ав}}^0(\Omega). \quad (10.7.11)$$

5. Ширина спектральной линии. Рассмотрим спектр флуктуаций частоты, изображенный на рис. 10.14. Для решения вопроса о ширине спектральной линии, соответствующей этому спектру, следует оценить отношение величин $S_v(0)$ и $\Pi_{\text{др}}$. Нетрудно показать, что

$$\frac{S_v(0)}{\Pi_{\text{др}}} = \frac{p}{\Pi_{\text{др}}} \langle \alpha^2 \rangle \frac{Z_{\text{oe}} I_0^2}{2\pi P_r} N_2^2.$$

Первые два сомножителя в этой формуле много меньше единицы. Последний сомножитель имеет порядок единицы или меньше единицы. Следовательно, $S_v(0) \ll \Pi_{\text{др}}$ (на рис. 10.14, где масштабы по различным осям различны, это обстоятельство не очевидно). В таком случае, на основании результатов § 4.5, ширина спектральной линии равна

$$\Delta\Omega = \pi^2 S_v(0) = \frac{\pi\omega_1^2}{8R_0^2} \left\{ D_{\tau} + \frac{1}{2} N_2^2 D_{\text{др}} + \right. \\ \left. + \frac{q^2}{p^2} \left[D_{\tau} + \frac{1}{2} N_1^2 D_{\text{др}} \right] - \frac{q}{p} N_1 N_2 D_{\text{др}} \right\}. \quad (10.7.12)$$

Ограничиваясь изохронным режимом магнетрона и случаем $\theta=0$, будем иметь для естественной ширины спектральной линии магнетрона, выраженной в герцах, следующую формулу:

$$\Delta F = \frac{\omega_1^2}{8Q^2} \left[\frac{k\Gamma}{P_r} + \frac{1}{2} k_1^2 \frac{eI_0\Gamma^2 Z_{\text{oe}}}{P_r} \right].$$

Пренебрегая тепловыми шумами, для относительной ширины спектральной линии магнетрона имеем

$$\delta f = \pi \frac{\omega_1 k_1^2 e I_0 \Gamma^2 Z_{\text{oe}}}{16 Q^2 P_r}. \quad (10.7.13)$$

Выбирая значения $\omega_1/2\pi = 10^{10}$, $Q = 2 \cdot 10^3$, $I_0 = 10^{-2} \text{ а}$, $\Gamma^2 = 0,2$, $k_1^2 = 1$, $Z_{\text{oe}} = 10^4 \text{ ом}$, $P_r = 10^{-2} \text{ вт}$, найдем $\delta f = 1,6 \cdot 10^{-12}$.

Это значит, что абсолютная ширина естественной спектральной линии трехсантиметрового магнетрона ΔF равна в нашем случае 0,016 гц.

Для трехсантиметрового клистрона мы получили в § 10.3 для примерно тех же параметров колебательной системы значение естественной ширины спектральной линии, равное $\Delta F \approx 0,07$ гц, т. е. величину того же порядка малости.

Следовательно, с точки зрения естественной ширины спектральной линии магнетронный генератор ничем особенно не отличается ни от клистрона, ни от обычного LC-генератора, несмотря на то, что механизм влияния дробовых шумов на флуктуации частоты различен.

В этих расчетах мы полагали $\theta = 0$. Если брать какое-либо значение $0 < \theta < \pi/2$, то ширина спектральной линии может существенно возрасти (на порядок или более). В реальных магнетронах θ всегда больше нуля, поэтому формула (10.7.13) может служить, по-видимому, лишь как оценка нижней границы δf .

6. Форма естественной спектральной линии магнетрона. Рассмотрим для простоты форму спектральной линии магнетрона только для изохронного режима.

Используя (4.6.22) и (10.7.10), учитывая, что $p\tau_0 \ll 1$, найдем

$$\tilde{S}_{\alpha \Delta \varphi}^0(\Omega) = \frac{\omega_1^2}{8\pi R_0^2} \frac{1}{\Omega^2 + p^2} \frac{N_1 N_2}{2} D_{\text{др}}, \quad \tilde{S}_{\alpha \Delta \varphi}^1(\Omega) = \frac{\Omega}{p} \tilde{S}_{\alpha \Delta \varphi}^0(\Omega).$$

Сравнивая эти спектральные плотности с (10.7.6), нетрудно убедиться, что они имеют одинаковый порядок малости (полагая, что N_1 и N_2 — величины одного порядка). Кроме того, очевидно, что $\langle \alpha^2 \rangle \ll 1$. Следовательно, на основании результатов § 4.6 можно утверждать, что естественная форма спектральной линии магнетрона состоит из узкополосного почти симметричного пика и несимметричного пьедестала и ее компоненты определяются следующими выражениями:

$$W_x^0(\Omega) = W_{x\chi}^0(\Omega) + \frac{R_0^2}{2} S_\alpha(\Omega),$$

$$W_x^1(\Omega) = -2C^1 W_{x\chi}^1(\Omega) + \frac{R_0}{2} 2\tilde{S}_{\alpha \Delta \varphi}^1(\Omega), \quad (10.7.14)$$

где частотные компоненты $W_{x\chi}^0(\Omega)$, $W_{x\chi}^1(\Omega)$ определяются формулами (4.6.16),

$$C^1 = -\pi S_{\alpha\varphi}^0(0) = -\frac{\omega_1^2}{8pR_0^2} \frac{N_1 N_2}{2} D_{\text{др}}.$$

При определении спектральных плотностей $S_\alpha(\Omega)$ и $\tilde{S}_{\alpha \Delta \varphi}^1(\Omega)$ мы использовали условие $p\tau_0 \ll 1$, которое существенно упрощает

их вид. При нахождении $W_{x\chi}^0(\Omega)$ и $W_{x\chi}^1(\Omega)$ это условие в общем случае ничего не меняет, ибо крылья этих компонент как раз и определяются при $\Omega \gg \tau_0^{-1}$.

Для вычисления частотных компонент необходимо найти $\chi(\tau)$ согласно (4.5.9) или (4.5.10).

Для изохронного режима $S_v(\Omega)$ имеет два слагаемых: одно, обязанное тепловым шумам, второе — дробовым (см. (10.7.9)). Во второе слагаемое входит спектральная плотность $M(\Omega\tau_0)$, которая учитывает конечность времени пролета электронов. Для обычного диода эта спектральная плотность задана формулой (3.2.1). Для магнетрона спектральная плотность $M(\Omega\tau_0)$, как уже говорилось, имеет другой более сложный вид, если учитывать характер движения зарядов. Но даже сравнительная простая формула (3.2.1) не позволяет простыми средствами с помощью (4.5.10) найти $\chi(\tau)$. Тем более это становится практически невозможным, если попытаться использовать более точную формулу спектральной плотности $M(\Omega\tau_0)$ для магнетрона (которую, вообще говоря, еще не так просто найти). Тем не менее представляет интерес оценить влияние конечности ширины спектра дробового шума (другими словами, влияние времени пролета электронов в пространстве взаимодействия магнетрона) на вид естественной спектральной линии магнетрона.

Поэтому разумно приближенно описать спектральную плотность $M(\Omega\tau_0)$ какой-либо выбранной функцией, такой, которая удовлетворительно передает основной ход $M(\Omega\tau_0)$ и, с другой стороны, допускает сравнительно простое нахождение $\chi(\tau)$ с помощью (4.5.10).

Представим $M(\Omega\tau_0)$ в следующем виде:

$$M(\Omega\tau_0) = \frac{1}{1 + \frac{1}{4} \Omega^2 \tau_0^2} = \frac{4}{4 + \Omega^2 \tau_0^2} \quad (10.7.15)$$

и сравним эту формулу с (3.2.1). Поведение этих функций одинаково при $\Omega\tau_0 \rightarrow 0$ и при $\Omega\tau_0 \rightarrow \infty$. Кроме того, близки и значения ширины спектра ($4\pi/3\tau_0$ и π/τ_0). Поэтому в качестве приближенной оценки можно использовать формулу (10.7.15). В таком случае спектральная плотность флуктуаций частоты будет описываться следующей формулой ($\Omega_1 = 2\tau_0^{-1}$):

$$S_v(\Omega) = \frac{\omega_1^2}{8\pi R_0^2} \left[D_\tau + \frac{\frac{1}{2} N_2^2 D_{\text{др}} \Omega_1^2}{\Omega_1^2 + \Omega^2} \right].$$

Для этой спектральной плотности (4.5.10) дает ($\tau > 0$)

$$\chi(\tau) = A [\Omega_1 \tau - 1 + e^{-\Omega_1 \tau}] + B \Omega_1 \tau,$$

где

$$A = \frac{\omega_1^2}{8R_0^2\Omega_1} \frac{1}{2} N_2^2 D_{\text{др}}, \quad B = \frac{\omega_1^2}{8R_0^2\Omega_1} D_{\text{т}}.$$

Полученное выражение для $\chi(\tau)$ полностью совпадает с тем, которое было найдено для клистрона (см. формулу (10.3.20a)), если сделать замену $\rho \rightarrow \Omega_1$. Поэтому, используя (10.3.23), можем сразу же написать выражения для $W_{x\chi}^0$ и $W_{x\chi}^1$:

$$\begin{aligned} W_{x\chi}^0(\Omega) &= \frac{R_0^2}{2\pi} \frac{\Delta\Omega\pi [\Omega_1^2 + H\Omega^2]}{[(\Delta\Omega\pi)^2 + \Omega^2] [\Omega_1^2 + \Omega^2]}, \\ W_{x\chi}^1(\Omega) &= \frac{R_0^2}{2\pi} \frac{\Omega}{(\Delta\Omega\pi)^2 + \Omega^2}, \end{aligned} \quad (10.7.16)$$

где $\Delta\Omega$ — ширина спектральной линии, равная для изохронного режима

$$\Delta\Omega = \frac{\pi\omega_1^2}{8R_0^2} \left[D_{\text{т}} + \frac{1}{2} N_2^2 D_{\text{др}} \right] \approx \frac{\pi\omega_1^2}{8R_0^2} \frac{1}{2} N_2^2 D_{\text{др}},$$

и

$$H = \frac{D_{\text{т}}}{D_{\text{т}} + \frac{1}{2} N_2^2 D_{\text{др}}} \approx \frac{D_{\text{т}}}{\frac{1}{2} N_2^2 D_{\text{др}}}.$$

Поскольку $H \ll 1$, то форма пика спектральной линии магнетрона весьма сильно отличается от резонансной (в отличие от клистрона, где коэффициент H был сравним с единицей), что и должно быть, так как спектральная плотность дробового шума не является постоянной. В этом и заключается влияние времени пролета электронов на форму спектральной линии магнетрона. Из (10.7.16) следует также, что это отличие проявляется лишь на частотах Ω , сравнимых с Ω_1 . Для $\Omega \ll \Omega_1$ форма пика спектральной линии может считаться резонансной.

Собирая вместе все слагаемые формул (10.7.14), находим следующие окончательные выражения для компонент формы естественной спектральной линии магнетрона:

$$\begin{aligned} W_x^0(\Omega) &= \frac{R_0^2}{2\pi} \left\{ \frac{\Delta\Omega\pi [\Omega_1^2 + H\Omega^2]}{[(\Delta\Omega\pi)^2 + \Omega^2] [\Omega_1^2 + \Omega^2]} + \langle a^2 \rangle \frac{p}{p^2 + \Omega_1^2} \right\}, \\ W_x^1(\Omega) &= -\frac{R_0^2}{2\pi} 2C^1 \left\{ \frac{\Omega}{(\Delta\Omega\pi)^2 + \Omega^2} + \frac{\Omega}{p^2 + \Omega^2} \right\}. \end{aligned}$$

Пренебрегая тепловыми шумами и рассматривая такие частоты, что всегда выполняется условие $H\Omega^2 \ll \Omega_1^2$ (этого обычно

вполне достаточно для практики), исключая из формул амплитуду автоколебаний, находим следующие выражения для компонент спектральной линии магнетрона:

$$W_x^0(\Omega) = \frac{\omega_1^2}{32\pi} D_{\text{др}} \left\{ \frac{\pi^2 N_2^2 \Omega_1^2}{[(\Delta\Omega\pi)^2 + \Omega^2][\Omega_1^2 + \Omega^2]} + \frac{N_1^2}{p^2 + \Omega^2} \right\},$$

$$W_x^1(\Omega) = \frac{\omega_1^2}{32\pi} D_{\text{др}} 2N_1 N_2 \left\{ \frac{\Omega/p}{(\Delta\Omega\pi)^2 + \Omega^2} + \frac{\Omega/p}{p^2 + \Omega^2} \right\}.$$

В эту формулу входят величины, которые нетрудно оценить для любого реального магнетрона.

§ 10.8. Учет непосредственного влияния фликкерного шума на флуктуации и ширину спектральной линии магнетрона

Рассмотрим теперь влияние фликкерного шума наведенного тока магнетрона.

1. Поскольку усреднение по периоду автоколебаний медленных по сравнению с $\cos \omega_0 t$ флуктуаций $i_\Phi(t)$ ничего не изменяет, то вместо i_0 имеем $2i_\Phi(t)$. Вводя в рассмотрение, как всегда, относительные флуктуации фликкерного шума $\delta i_\Phi(t) = i_\Phi(t)/I_0$, получим следующие флуктуационные уравнения:

$$\frac{da}{dt} = -pa + \omega_1 N_1 \frac{Z_B I_0}{2R_0} \delta i_\Phi(t),$$

$$v = -qa + \omega_1 N_2 \frac{Z_B I_0}{2R_0} \delta i_\Phi(t).$$

Полагая заданной спектральную плотность относительных флуктуаций фликкерного шума $S_\Phi(\Omega)$, с помощью формул § 2.3 найдем следующие значения спектральных плотностей флуктуаций амплитуды и частоты (используя соотношение $R_1^2 Z_B^2 I_0^2 / R_0^4 = 1/Q^2$):

$$S_a(\Omega) = \frac{\omega_1^2}{4Q^2} M_1^2 \frac{S_\Phi(\Omega)}{\Omega^2 + p^2},$$

$$S_v(\Omega) = \frac{\omega_1^2}{4Q^2} \frac{M_2^2 \Omega^2 + (M_1 q - M_2 p)^2}{\Omega^2 + p^2} S_\Phi(\Omega),$$

$$S_{av}^0(\Omega) = \frac{\omega_1^2}{4Q^2} M_1 \frac{p M_2 - q M_1}{\Omega^2 + p^2} S_\Phi(\Omega),$$

$$S_{av}^1(\Omega) = -\frac{\omega_1^2}{4Q^2} M_1 M_2 \frac{\Omega}{\Omega^2 + p^2} S_\Phi(\Omega).$$
(10.8.1)

Анализ этих спектральных плотностей удобно вести в сравнении с аналогичными выражениями, полученными для клистрона (см. (10.4.3)).

Спектральная плотность амплитудных флуктуаций магнетрона отличается от таковой для клистрона лишь множителем M_1^2 и, следовательно, спектр флуктуаций амплитуды магнетрона на частотах $\Omega \ll p$ также носит фликкерный характер. Таким образом, фликкерный шум магнетрона, равно как и других генераторов, непосредственно приводит к амплитудным флуктуациям.

Влияние фликкерного шума на флуктуации частоты для магнетрона и клистрона существенно различно. Во-первых, в отличие от клистрона для изохронного режима магнетрона его фликкерный шум влияет на флуктуации частоты. Во-вторых, и это самое существенное отличие, на достаточно малых частотах флуктуации частоты магнетронного генератора не стремятся к нулю. Следовательно, имеет место уширение спектральной линии из-за низкочастотных флуктуаций тока магнетрона, чего не было ни для клистрона, ни для других генераторов. Это связано с тем, что для магнетрона

$$qM_1 - pM_2 = \frac{\omega_1}{Q} (\operatorname{tg} \theta M_1 - M_2) = \frac{\omega_1}{Q} k_1 \frac{R_0}{R_1} \frac{1}{\cos \theta} \neq 0$$

и числитель второй формулы (10.8.1) остается конечным при $\Omega \rightarrow 0$. В то же самое время для клистрона и для других автогенераторов числитель подобной формулы стремится к нулю при $\Omega \rightarrow 0$. Тем самым магнетрон является единственным из всех рассмотренных автогенераторов, у которого фликкерный шум непосредственно оказывает влияние на флуктуации частоты. Это связано с тем, что частота автоколебаний (вернее, поправка на частоту) зависит от тока магнетрона I_0 согласно (10.5.16). По этой причине не равна тождественно нулю и спектральная плотность $S_{av}^0(\Omega)$.

Условие квазистатичности частотных флуктуаций, при которых имеет место соотношение

$$S_v(\Omega) = \frac{\omega_1^2}{4Q^2} \frac{(qM_1 - pM_2)^2}{p^2} S_\Phi(\Omega),$$

справедливо для частот

$$\Omega \ll \min \left\{ p, \frac{|M_1 q - M_2 p|}{M_2} \right\}.$$

2. Заметим, что, кроме непосредственного влияния фликкерного шума на параметры автоколебания магнетрона, имеется и косвенное влияние через посредство флуктуаций параметров,

например флуктуаций емкости эквивалентного контура, флуктуаций величины $\rho_0 s_0$ и других.

Ограничиваясь анализом только непосредственного влияния фликкерного шума, рассмотрим один конкретный случай. Пусть магнетрон работает в изохронном режиме, а спектральная плотность фликкерного шума равна

$$S_{\Phi}(\Omega) = \frac{A_{\Phi}}{2\pi |\Omega|^{\gamma}}.$$

Технические флуктуации амплитуды и частоты магнетрона описываются тогда следующими спектральными плотностями:

$$S_a(\Omega) = \frac{\omega_1^2}{4Q^2} M_1^2 \frac{A_{\Phi}}{2\pi (\Omega^2 + p^2) |\Omega|^{\gamma}},$$

$$S_v(\Omega) = \frac{\omega_1^2}{4Q^2} M_2^2 \frac{A_{\Phi}}{2\pi |\Omega|^{\gamma}},$$

$$S_{av}^0(\Omega) = \frac{\omega_1^2}{4Q^2} M_1 M_2 \frac{p A_{\Phi}}{2\pi (\Omega^2 + p^2) |\Omega|^{\gamma}},$$

$$S_{av}^1(\Omega) = -\frac{\omega_1^2}{4Q^2} M_1 M_2 \frac{\Omega A_{\Phi}}{2\pi (\Omega^2 + p^2) |\Omega|^{\gamma}} = -\frac{\Omega}{p} S_{av}^0(\Omega).$$

Отсюда следует, что и в изохронном режиме работы магнетрона существует как четная, так и нечетная корреляция между флуктуациями частоты и амплитуды. Следовательно, форма спектральной линии магнетрона, обязанная непосредственному действию фликкерного шума, будет иметь несимметричный вид. Поскольку, однако, в действительности техническая форма и ширина спектральной линии магнетрона порождаются многими причинами и непосредственное влияние фликкерного шума является лишь одной из причин, мы не будем здесь рассматривать все компоненты спектральной линии, а оценим лишь вклад, связанный с флуктуациями частоты.

Обратимся к спектральной плотности флуктуаций частоты и ограничимся двумя случаями: в первом будем полагать, что $\gamma < 1$, но вместе с тем довольно близко к ней (например, $\gamma = 0,99$), и во втором положим $1 < \gamma < 3$.

В обоих случаях, согласно (4.5.37) и (4.5.48), форма пика спектральной линии в центре будет доплеровской, а разной будет лишь ее ширина. Для $\gamma = 0,99$, на основании п. 6 § 4.5 ширина линии $\Delta\Omega$ будет равна

$$\Delta\Omega = 14 \frac{\omega_1}{2Q}, M_2 |\sqrt{A_{\Phi}}|.$$

Таким образом, относительная техническая ширина линии магнетрона, обязанная непосредственному влиянию фликкерного шума магнетрона для $\gamma=0,99$ равна

$$\delta F = 7 \frac{1}{Q} \left| \operatorname{tg} \theta - k_1 \frac{R_0}{R_1} \frac{\cos 2\theta}{\cos \theta} \right| \sqrt{A_\Phi}. \quad (10.8.2)$$

Полагая в частном случае $\theta=0$, $k_1=1$, $P_r=10^{-2}$ вт, $Z_{oe}=10^4$ ом, $I_0=10^{-2}$ а, $Q=2 \cdot 10^3$, $A_\Phi=10^{-14}$, нетрудно найти, что $R_0=\sqrt{2} \cdot 10$ в, $R_1=2$ в, и тогда

$$\delta F \approx 2,5 \cdot 10^{-9}.$$

Полагая $1 < \gamma < 3$, согласно (4.5.52), имеем

$$\delta F = \frac{1}{Q} \left| \operatorname{tg} \theta - k_1 \frac{R_0}{R_1} \frac{\cos 2\theta}{\cos \theta} \right| \sqrt{\frac{\pi A_\Phi t_0^{\gamma-1}}{2\Gamma(\gamma) \sin \frac{\pi}{2} (\gamma-1)}}. \quad (10.8.3)$$

Беря те же значения параметров θ , Q , R_0 , R_1 и, например, $\gamma=2$, полагая, что $A_\Phi=10^{-12}$ рад/сек, получим

$$\delta F = 2,5 \sqrt{\pi} \cdot 10^{-9} \sqrt{t_0}, \quad (10.8.4)$$

где t_0 выражено в секундах.

На основании п. 9 § 4.5 эта формула заведомо справедлива для всех t_0 , удовлетворяющих неравенству (см. формулу (4.5.51))

$$\sqrt{\frac{t_0}{\theta_0}} \gg 1, \quad \theta_0 = \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{A_\Phi}} = 1,3 \cdot 10^4 \text{ сек.}$$

Это значит, что для t_0 должно удовлетворяться неравенство

$$t_0 \gtrsim 2 \cdot 10^5 \text{ сек} \approx 55 \text{ ч.}$$

Для существенно меньших значений t_0 требуется учитывать переходные процессы, во время которых форму спектральной линии нельзя считать доплеровской, а ширину определять по формуле (10.8.4).

В рассмотренном случае процесс флуктуаций частоты является существенно нестационарным, δF зависит от времени наблюдения t_0 , принимая следующие значения:

t_0	50 ч	100 ч	500 ч	5000 ч	1 год
δF	$1,9 \cdot 10^{-6}$	$2,66 \cdot 10^{-6}$	$6 \cdot 10^{-6}$	$19 \cdot 10^{-6}$	$25 \cdot 10^{-6}$

Для крыльев спектральной линии, обязанных непосредственному влиянию фликкерного шума, имеем, согласно (4.7.20), для достаточно больших Ω

$$W_{x\chi}^0(\Omega) = \frac{R_0^2}{2} \frac{\omega_1^2}{4Q^2} M_2^2 \frac{A_\Phi}{2\pi |\Omega|^{\gamma+2}}. \quad (10.8.5)$$

В заключение отметим, что характерной особенностью формул (10.8.2), (10.8.3), (10.8.5) является присутствие в них добротности резонаторной системы магнетрона Q . Увеличение этой добротности может существенно уменьшить ширину и крылья спектральной линии магнетрона, обязанный непосредственному влиянию фликкерного шума анодного тока магнетрона.

ФЛУКТУАЦИИ В ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ГЕНЕРАТОРАХ

За последние годы в связи с созданием удобных и эффективных управляемых реактивных элементов значительно повысился интерес к параметрическим генераторам. Параметрические генераторы стали находить свое применение в целом ряде радиоэлектронных систем, особенно в диапазоне СВЧ, где они по целому ряду характеристик имеют определенные преимущества по сравнению с ламповыми (например, отсутствие дробовых шумов).

В связи с этим представляет несомненный интерес исследование флуктуаций в параметрических генераторах. Наличие тепловых шумов в активных элементах контура, наличие флуктуаций амплитуды и фазы в параметрирующем сигнале (в сигнале накачки или в периодически изменяющихся емкости или индуктивности), наличие, наконец, флуктуаций параметров элементов контура — все это ведет к появлению флуктуаций в амплитуде и фазе колебания параметрического генератора.

В настоящей главе исследуются флуктуации амплитуды и фазы колебания для некоторых частных случаев параметрических генераторов и флуктуационных воздействий. Следует сказать, что флуктуации в параметрических генераторах освещены в литературе еще недостаточно. Имеется лишь несколько работ (см., например, 1960 [11], 1961 [15], 1963 [11]), посвященных этому вопросу.

Как и для обычных генераторов, изучение флуктуационных явлений базируется на рассмотрении регулярных, безфлуктуационных явлений в параметрических генераторах, основы которого были заложены еще в 30-х гг. в фундаментальных работах Л. И. Мандельштама, Н. Д. Папалекси и их учеников (см., например, [107—109]).

Рассмотрение флуктуационных явлений в параметрическом генераторе будет проводиться лишь для области основного параметрического резонанса.

§ 11.1. Флуктуационные уравнения параметрических генераторов

1. Периодическая модуляция параметров реактивных элементов контура (емкости или индуктивности) может осуществляться в принципе любым путем. Можно, например, механически модулировать величину емкости или индуктивности — получаемые уравнения движения при этом принимают наиболее простой вид. В настоящее время модуляция осуществляется большей частью электрическим путем, с помощью специального внешнего источника периодической ЭДС (так называемого генератора накачки).

Напряжение генератора накачки подается на нелинейные реактивные элементы, емкость или индуктивность которых изменяется в такт с напряжением накачки. В качестве нелинейных реактивных элементов используют или нелинейную емкость (например, емкость полупроводникового диода с $p-n$ -переходом) или нелинейную индуктивность (например, индуктивность катушки с ферромагнитным сердечником).

Для существования установившейся амплитуды колебания необходимо присутствие в контуре параметрического генератора нелинейного элемента, которым может быть или нелинейное активное сопротивление, или нелинейные реактивности. В первом случае обычно используется лампа (например, при параметрическом возбуждении контура регенерированной лампы). Во втором случае используются опять-таки нелинейные емкости и индуктивности; при этом они выполняют сразу две функции: создают периодическую модуляцию C или L и ограничивают амплитуду колебаний параметрического генератора.

Известно (см., например, [110]), что в первом и втором случаях получаются существенно различные резонансные кривые параметрического возбуждения, различие которых связано с различным механизмом ограничения амплитуды колебаний в параметрическом генераторе. В первом случае ограничение амплитуды происходит за счет возрастания дополнительного активного сопротивления контура с ростом амплитуды, во втором случае ограничение связано с внесением дополнительной расстройки, возрастающей при возрастании амплитуды. Уравнения движения параметрического генератора для обоих случаев также различны.

Рассмотрим три различные схемы параметрических генераторов, с тем чтобы подробнее выяснить основные характеристики флуктуаций колебания.

2. Начнем составление уравнений с наиболее распространенного случая параметрического генератора с нелинейной емкостью, схема которого изображена на рис. 11.1. Здесь L — индук-

тивность контура, r — сопротивление полных потерь контура, $E(t)$ — малая случайная функция времени, представляющая случайные воздействия на генератор, C_{Π} — полная емкость контура, равная

$$C_{\Pi} = C_{\Pi}(v) = C [1 - \beta_1 v + \beta_2 v^2],$$

C — постоянная часть емкости конденсатора, β_1 , β_2 — коэффициенты, характеризующие нелинейность конденсатора, v — напряжение на конденсаторе. Примем также, что на конденсаторе имеется напряжение накачки, равное

$$A \cos(2\omega t + \psi) = A_0 [1 + \alpha_n] \cos(2\omega t + \psi),$$

где $\alpha_n = \alpha_n(t)$, $\psi = \psi(t)$ — флуктуации амплитуды и фазы накачки, которые будем полагать заданными. Напряжение на конденсаторе v и ток в контуре i связаны уравнениями

$$L \frac{di}{dt} + ri + v = E(t),$$

$$i = \frac{d}{dt} [C_{\Pi}(v) v].$$

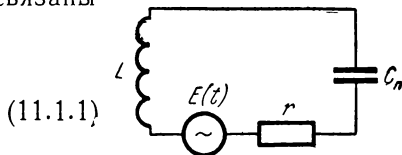


Рис. 11.1.

Считая контур высокочастотным ($Q \gg 1$), учитывая малость членов $\beta_1 v$ и $\beta_2 v^2$ по сравнению с единицей и близость частоты ω к собственной частоте контура, вводя обозначения $v = x$, $(LC)^{-1} = \omega_1^2$, $\Delta = \omega - \omega_1$, получим вместо (11.1.1)

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = F(x, \dot{x}, \ddot{x}) + \omega^2 E(t), \quad (11.1.2)$$

где

$$F(x, \dot{x}, \ddot{x}) = 2\omega \Delta x - \frac{d^2}{dt^2} (-\beta_1 x^2 + \beta_2 x^3) - \Pi \frac{dx}{dt} \quad (11.1.3)$$

есть малая функция.

Решение уравнения (11.1.2) ищем в виде

$$\begin{aligned} x &= A \cos(2\omega t + \psi) + R \cos(\omega t + \vartheta), \\ \dot{x} &= -2\omega A \sin(2\omega t + \psi) - \omega R \sin(\omega t + \vartheta), \end{aligned} \quad (11.1.4)$$

где $R = R(t)$, $\vartheta = \vartheta(t)$ — медленно меняющиеся по сравнению с $\cos \omega t$ амплитуда и фаза колебания, подлежащие определению.

В силу малости функции $F(x, \dot{x}, \ddot{x})$ входящая в нее вторая производная \ddot{x} должна браться при пренебрежении dR/dt и $d\vartheta/dt$, т. е. следует полагать, что

$$\ddot{x} = -4\omega^2 A \cos(2\omega t + \psi) - \omega^2 R \cos(\omega t + \vartheta). \quad (11.1.5)$$

Действуя согласно методике, рассмотренной в § 5.2, и полагая, что $\alpha_n(t)$ и $\psi(t)$ есть также медленные функции по сравнению с $\cos \omega t$, получим для R и ϑ следующие уравнения:

$$\begin{aligned}\frac{dR}{dt} &= -\frac{1}{2\omega} \Phi(\omega, R) + \frac{\omega}{2} (e_{\perp} \cos \vartheta - e_{\parallel} \sin \vartheta), \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= -\frac{1}{2\omega R} \Psi(\omega, R) - \frac{\omega}{2R} (e_{\parallel} \cos \vartheta + e_{\perp} \sin \vartheta),\end{aligned}\quad (11.1.6)$$

где $\Phi(\omega, R)$ и $\Psi(\omega, R)$ — есть коэффициенты Фурье разложения

$$F(x, \dot{x}, \ddot{x}) = \Psi(\omega, R) \cos(\omega t + \vartheta) + \Phi(\omega, R) \sin(\omega t + \vartheta) + \text{+ высшие гармоники.}$$

Случайные функции $e_{\perp}(t)$, $e_{\parallel}(t)$ определяются по-прежнему формулами (5.2.15), в которых вместо ω_0 следует писать ω . Подставляя (11.1.4), (11.1.5) в (11.1.3), находим

$$\begin{aligned}\Psi(\omega, R) &= 2\omega\Delta R - \beta_1\omega^2 R A \cos(2\vartheta - \psi) + \frac{3}{4}\beta_2\omega^2 R [R^2 + 2A^2], \\ \Phi(\omega, R) &= \Pi\omega R - \beta_1\omega^2 R A \sin(2\vartheta - \psi).\end{aligned}\quad (11.1.7)$$

3. Пусть теперь все флуктуационные воздействия на параметрический генератор равны нулю ($e_{\parallel} = e_{\perp} = \alpha_n = \psi = 0$). Тогда для детерминированной амплитуды R_d и фазы ϑ_d будем иметь с учетом (1.8.7)

$$\begin{aligned}\frac{dR_d}{dt} &= -\frac{1}{2}\Pi R_d + \frac{1}{2}\beta_1\omega R_d A_0 \sin 2\vartheta_d, \\ \frac{d\vartheta_d}{dt} &= -\Delta + \frac{1}{2}\beta_1\omega A_0 \cos 2\vartheta_d - \frac{3}{8}\beta_1\omega [R_d^2 + 2A_0^2].\end{aligned}\quad (11.1.8)$$

Интересуясь установившимися значениями детерминированной амплитуды R_0 и фазы ϑ_0 , будем иметь для последних два решения:

$$\begin{aligned}1) \quad R_0 &= 0, \quad \cos 2\vartheta_0 = \left(\frac{3}{4}\beta_2 A_0^2 + \frac{\Delta}{\omega}\right) \frac{2Q}{\lambda}; \\ 2) \quad \beta_2 R_0^2 &= -\left(\frac{8}{3}\frac{\Delta}{\omega} + 2\beta_2 A_0^2\right) \pm \frac{8}{6Q} \sqrt{\lambda^2 - 1}, \quad \sin 2\vartheta_0 = \lambda^{-1},\end{aligned}\quad (11.1.9)$$

где обозначено $\lambda = Q\beta_1 A_0$. Отсюда, прежде всего, видно, что режим параметрического генерирования может быть только при $\lambda > 1$, поэтому можно считать, что λ характеризует степень параметрического возбуждения. Пороговому значению $\lambda = 1$ соответствует пороговое значение амплитуды накачки $A_0 = 1/Q\beta_1$, начиная с которого возможно самовозбуждение.

Исследование уравнений (11.1.8) показывает, что устойчивость второго решения (11.1.9) имеет место [110], если

$$\begin{aligned} -\left(\frac{\partial \Phi}{\partial R}\right)_0 - \left(\frac{\partial \Psi}{\partial R}\right)_0 &> 0, \\ \left(\frac{\partial \Phi}{\partial R}\right)_0 \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \vartheta}\right)_0 - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta}\right)_0 \left(\frac{\partial \Psi}{\partial R}\right)_0 &> 0. \end{aligned} \quad (11.1.10)$$

Эти условия сводятся к следующим:

$$\frac{\omega}{Q} > 0, \quad \pm \frac{3}{4} \beta_2 \omega^2 R_0' Q^{-1} \sqrt{\lambda^2 - 1} > 0. \quad (11.1.11)$$

Второе неравенство (11.1.11) показывает, что если $\beta_2 > 0$ ($\beta_2 < 0$), то перед корнем в (11.1.9) следует брать знак плюс (минус), чтобы второе решение (11.1.9) давало значение устойчивых стационарных амплитуд. Кроме того, из (11.1.9) нетрудно получить следующие условия для расстройки Δ/ω , при которой возможно второе устойчивое решение:

$$\begin{aligned} \beta_2 > 0, \quad \frac{\Delta}{\omega} &< \left(\frac{\Delta}{\omega}\right)_1 = \\ &= -\frac{3}{4} \beta_2 A_0^2 + \frac{1}{2Q} \sqrt{\lambda^2 - 1}, \\ \beta_2 < 0, \quad \frac{\Delta}{\omega} &> \left(\frac{\Delta}{\omega}\right)_2 = \\ &= -\frac{3}{4} \beta_2 A_0^2 - \frac{1}{2Q} \sqrt{\lambda^2 - 1}. \end{aligned}$$

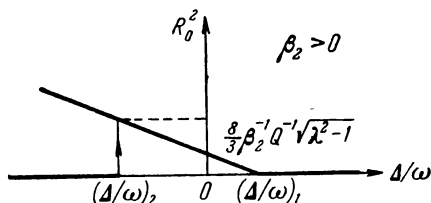


Рис. 11.2.

Исследование первого решения показывает его устойчивость при любом β_2 для

$$\frac{\Delta}{\omega} > \left(\frac{\Delta}{\omega}\right)_1 \quad \text{и} \quad \frac{\Delta}{\omega} < \left(\frac{\Delta}{\omega}\right)_2.$$

Общая картина зависимости квадрата стационарной амплитуды колебания от расстройки параметрического генератора показана на рис. 11.2 ($\beta_2 > 0$) и рис. 11.3 ($\beta_2 < 0$). Жирные линии показывают устойчивые значения R_0 . Зависимости R_0^2 от Δ/ω являются по существу резонансными кривыми при параметрическом возбуждении.

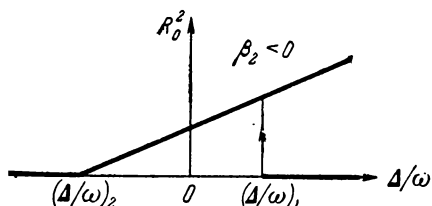


Рис. 11.3.

Характерной чертой их является треугольная форма. Подобную треугольную форму имеют резонансные кривые и в случае, когда амплитуда колебаний ограничивается нелинейной индуктивностью контура.

Из полученных резонансных кривых видно, что при достаточно больших расстройках имеет место затягивание амплитуды, явление, отмеченное еще в работах [107, 108].

4. Рассмотрим флуктуации амплитуды и фазы колебания в установившемся режиме. Пусть

$$R = R_0 [1 + \alpha(t)], \quad \vartheta = \vartheta_0 + \varphi(t).$$

Введем естественное предположение о том, что амплитудные флуктуации накачки и автоколебания достаточно малы: $\langle \alpha^2 \rangle \ll 1$, $\langle \alpha_n^2 \rangle \ll 1$.

Пренебрегая величинами высшего порядка малости, из (11.1.6) — (11.1.9) после громоздких вычислений можно найти следующие уравнения, связывающие флуктуации амплитуды и фазы автоколебания со случайными воздействиями на параметрический генератор $e_{\parallel}(t)$, $e_{\perp}(t)$ и с флуктуациями амплитуды и фазы накачки (рассматриваем случай $\beta_2 > 0$):

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{dt} = & \frac{1}{2} \Pi [\cos(2\varphi - \psi) - 1 + \sqrt{\lambda^2 - 1} \sin(2\varphi - \psi)] - \frac{1}{2} \Pi \alpha + \\ & + \frac{1}{2} \Pi [\cos(2\varphi - \psi) + \sqrt{\lambda^2 - 1} \sin(2\varphi - \psi)] (\alpha + \alpha_n) + \\ & + \frac{\omega}{2R_0} [e_{\perp} \cos(\vartheta_0 + \varphi) - e_{\parallel} \sin(\vartheta_0 + \varphi)], \end{aligned} \quad (11.1.12)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} = & \frac{1}{2} \Pi \{ \sqrt{\lambda^2 - 1} [\cos(2\varphi - \psi) - 1] - \sin(2\varphi - \psi) \} - q\alpha + \\ & + \frac{1}{2} \Pi [\sqrt{\lambda^2 - 1} \cos(2\varphi - \psi) - \sin(2\varphi - \psi)] \alpha_n - s\alpha_n - \\ & - \frac{\omega}{2R_0} [e_{\parallel} \cos(\vartheta_0 + \varphi) + e_{\perp} \sin(\vartheta_0 + \varphi)]. \end{aligned} \quad (11.1.13)$$

Здесь введены обозначения $s = \frac{3}{2} \omega \beta_2 A_0^2$, $q = \frac{3}{4} \omega \beta_2 R_0^2$. Величина q имеет смысл неизохронности параметрического генератора.

Таковы окончательные флуктуационные уравнения для параметрического генератора с нелинейной емкостью. Эти уравнения являются нелинейными по отношению к флуктуациям фазы.

5. Рассмотрим теперь другой параметрический генератор. Пусть емкость его колебательного контура является периодической функцией времени:

$$\frac{1}{C_{\pi}} = \frac{1}{C} [1 + A \cos(2\omega t + \psi)], \quad A = A_0 [1 + \alpha_n(t)], \quad \langle \alpha_n^2 \rangle \ll 1.$$

Амплитудой накачки здесь служит величина A_0 — амплитуда второй гармоники периодически изменяющейся емкости. Пред-

положим, что нелинейность параметрического генератора содержится в индуктивности:

$$L = L(i) = L_0(1 + \beta_2 i^2).$$

Здесь i — ток через нелинейную индуктивность. Общая схема параметрического генератора по-прежнему имеет вид, показанный на рис. 11.1. Уравнение движения генератора будет

$$\frac{d}{dt} [L(i) i] + ri + \frac{1}{C_{\Pi}} q' = E(t).$$

Обозначая заряд на конденсаторе $q' = x$, для x нетрудно получить следующее дифференциальное уравнение:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 2\Delta\omega x - \Pi\dot{x} - 3\beta_2 \dot{x}^2 \ddot{x} - \omega^2 A \cos(2\omega t + \psi) x + \omega^2 C E(t).$$

Решение этого уравнения ищем в виде $x = R \cos(\omega t + \vartheta)$. Тогда легко видеть, что для R и ϑ имеют место уравнения (11.1.6), где вместо e_{\parallel} , e_{\perp} следует писать Ce_{\parallel} , Ce_{\perp} , и

$$\Psi(\omega, R) = 2\omega \Delta R - \frac{1}{2} \omega^2 R A \cos(2\vartheta - \psi) + \frac{3}{4} \beta_2 \omega^4 R^3,$$

$$\Phi(\omega, R) = \Pi\omega R - \frac{1}{2} \omega^2 R A \sin(2\vartheta - \psi).$$

Для стационарных значений R_0 и ϑ_0 по-прежнему получаем два решения:

$$1) \quad R_0 = 0, \quad \cos 2\vartheta_0 = \frac{\Delta}{\omega} 2Q\lambda_1^{-1};$$

$$2) \quad \omega^2 \beta_2 R_0^2 = -\frac{8}{3} \frac{\Delta}{\omega} \pm \frac{4}{3} Q^{-1} \sqrt{\lambda_1^2 - 1}, \quad \sin 2\vartheta_0 = \lambda_1^{-1},$$

$$\cos 2\vartheta_0 = \pm \lambda_1^{-1} \sqrt{\lambda_1^2 - 1},$$

где $\lambda_1 = \frac{1}{2} Q A_0$. Резонансные кривые для этого параметрического генератора имеют вид, соответствующий рис. 11.2 и 11.3, с той лишь разницей, что значения границ параметрического возбуждения симметричны и равны

$$\left(\frac{\Delta}{\omega}\right)_1 = \frac{1}{2Q} \sqrt{\lambda_1^2 - 1}, \quad \left(\frac{\Delta}{\omega}\right)_2 = -\frac{1}{2Q} \sqrt{\lambda_1^2 - 1}.$$

Вводя опять флуктуации амплитуды и фазы автоколебания $\alpha(t)$ и $\varphi(t)$, после громоздких, но несложных вычислений, учитывая параметры второго стационарного решения, для $\beta_2 > 0$

можно найти следующие флуктуационные уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{dt} = & \frac{1}{2} \Pi \left[\cos(2\varphi - \psi) - 1 + \sqrt{\lambda_1^2 - 1} \sin(2\varphi - \psi) \right] - \frac{1}{2} \Pi \alpha + \\ & + \frac{1}{2} \Pi \left[\cos(2\varphi - \psi) + \sqrt{\lambda_1^2 - 1} \sin(2\varphi - \psi) \right] (\alpha + \alpha_n) + \\ & + \frac{\omega C}{2R_0} [e_{\perp} \cos(\vartheta_0 + \varphi) - e_{\parallel} \sin(\vartheta_0 + \varphi)], \quad (11.1.14) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} = & \frac{1}{2} \Pi \left\{ \sqrt{\lambda_1^2 - 1} [\cos(2\varphi - \psi) - 1] - \sin(2\varphi - \psi) \right\} - q_1 \alpha + \\ & + \frac{1}{2} \Pi \left[\sqrt{\lambda_1^2 - 1} \cos(2\varphi - \psi) - \sin(2\varphi - \psi) \right] \alpha_n - \\ & - \frac{\omega C}{2R_0} [e_{\parallel} \cos(\vartheta_0 + \varphi) + e_{\perp} \sin(\vartheta_0 + \varphi)]. \quad (11.1.15) \end{aligned}$$

Здесь $q_1 = \frac{3}{4} \omega^3 \beta_2 R_0^2$. Сравнивая эти флуктуационные уравнения с (11.1.12), (11.1.13), нетрудно видеть, что, хотя параметрические генераторы в обоих случаях сильно различаются, их флуктуационные уравнения почти одинаковы. Разница заключается лишь в отсутствии слагаемого α_n у (11.1.15).

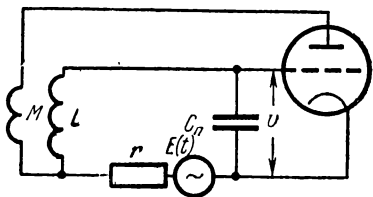


Рис. 11.4.

6. Рассмотрим, наконец, третий тип параметрического генератора: колебательный контур с периодически изменяющейся емкостью регенерирован электронной лампы, вносящей в контур

нелинейное активное сопротивление. Схема такого параметрического генератора показана на рис. 11.4. Зависимость крутизны лампы от напряжения примем в обычном виде $S = S_0(1 - \beta_0 v^2)$, где v — напряжение на сетке лампы. Уравнения движения этого параметрического генератора имеют вид

$$L \frac{di}{dt} + ri + v = M \frac{d}{dt} S_0 v (1 - \beta_0 v^2) + E(t),$$

$$i = \frac{d}{dt} (C_n v), \quad C_n = C [1 + A \cos(2\omega t + \psi)].$$

Считая контур достаточно высокочастотным, а обратную связь меньше критической, получим (отбрасывая несущественные члены) для $x = v$ следующее уравнение:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 2\Delta \omega x - 2g_1(1 + h_1 x^2) \dot{x} + (4\omega^2 x - \ddot{x}) A \cos(2\omega t + \psi) + 4\omega \dot{x} A \sin(2\omega t + \psi) + \omega^2 E(t), \quad (11.1.16)$$

где $g_1 = \omega_1^2(rC - MS_0) > 0$, $h_1 = 3\beta_0 MS_0 / (rC - MS_0)$.

Решение этого уравнения ищем в виде

$$x = R \cos(\omega t + \vartheta), \quad \dot{x} = -\omega R \sin(\omega t + \vartheta).$$

Для амплитуды и фазы этого решения можно получить опять уравнение (11.1.6), где следует положить

$$\Psi(\omega, R) = 2\omega \Delta R + \frac{1}{2} \omega^2 R A \cos(2\vartheta - \psi),$$

$$\Phi(\omega, R) = 2g_1 \omega R (1 + h_1 R^2) + \frac{1}{2} \omega^2 R A \sin(2\vartheta - \psi).$$

Стационарные значения R_0 , ϑ_0 имеют следующие два решения:

- 1) $R_0 = 0, \quad \cos 2\vartheta_0 = -\lambda_2^{-1};$
- 2) $h_1 R_0^2 = \Delta g_1^{-1} \sqrt{\lambda_2^2 - 1} - 1, \quad \cos 2\vartheta_0 = -\lambda_2^{-1},$
 $\sin 2\vartheta_0 = -\lambda_2^{-1} \sqrt{\lambda_2^2 - 1},$

где $\lambda_2 = \omega A_0 / 4\Delta$. Исследование этих решений на устойчивость, согласно (11.1.10), показывает, что первое решение устойчиво для $\Delta_1 < \Delta < \Delta_2$, где

$$\Delta_1 = \sqrt{\frac{\omega^2 A_0^2}{16} - g_1^2}, \quad \Delta_2 = -\sqrt{\frac{\omega^2 A_0^2}{16} - g_1^2},$$

в то время как второе решение устойчиво при $\Delta_2 < \Delta < \Delta_1$. Стационарная амплитуда установившегося колебания определяется следующим образом:

$$h_1 R_0^2 = \frac{1}{g_1} \sqrt{\frac{\omega^2 A_0^2}{16} - \Delta^2} - 1$$

и принимает максимальное значение

$$R_{0 \max} = \sqrt{\left(\frac{\omega A_0}{4g_1} - 1\right) h_1^{-1}}.$$

при расстройке, равной нулю. Легко найти условие параметрического возбуждения, накладываемое на амплитуду модуляции емкости:

$$A_0 > \frac{4}{\omega} \sqrt{g_1^2 + \Delta^2}. \quad (11.1.17)$$

Резонансная кривая параметрического возбуждения третьего типа параметрического генератора изображена на рис. 11.5. Жирной кривой показаны устойчивые значения R_0^2 . Полученная

кривая резко отличается от резонансных кривых параметрических генераторов, в которых ограничение амплитуды осуществлялось реактивными элементами. В данном случае, например, отсутствует явление затягивания амплитуды. Можно сказать, что здесь мы имеем мягкий режим параметрического

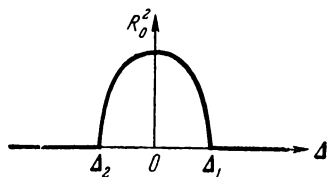


Рис. 11.5.

возбуждения, в то время как в случаях, соответствующих рис. 11.2 и 11.3, режим параметрического возбуждения можно считать «полужестким» (для $\beta_2 > 0$, например, он жесткий «слева» и мягкий «справа»). Различие в рассмотренных резонансных кривых параметрического возбуждения настолько характерно, что уже по виду эксперимен-

тально определенной резонансной кривой можно судить о том, какие нелинейности, активная или реактивная, ограничивают амплитуду автоколебаний.

Для флуктуаций амплитуды и фазы установившихся колебаний, учитывая значения стационарных R_0 и ϑ_0 , можно получить следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{dt} = & -p\alpha + \Delta \left\{ \sqrt{\lambda_2^2 - 1} [\cos(2\varphi - \psi) - 1] + \sin(2\varphi - \psi) \right\} + \\ & + \Delta \left[\sqrt{\lambda_2^2 - 1} \cos(2\varphi - \psi) + \sin(2\varphi - \psi) \right] (\alpha + \alpha_n) + \\ & + \frac{\omega}{2R_0} [e_{\perp} \cos(\vartheta_0 + \varphi) - e_{\parallel} \sin(\vartheta_0 + \varphi)], \quad (11.1.18) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} = & \Delta \left\{ [\cos(2\varphi - \psi) - 1] - \sqrt{\lambda_2^2 - 1} \sin(2\varphi - \psi) \right\} + \\ & + \Delta [\cos(2\varphi - \psi) - \sqrt{\lambda_2^2 - 1} \sin(2\varphi - \psi)] \alpha_n - \\ & - \frac{\omega}{2R_0} [e_{\parallel} \cos(\vartheta_0 + \varphi) + e_{\perp} \sin(\vartheta_0 + \varphi)]. \quad (11.1.19) \end{aligned}$$

Здесь $p = g_1(1 + 3h_1R_0^2)$ — величина, равная для $\Delta = 0$ прочности предельного цикла параметрического генератора.

Эти уравнения уже заметно отличаются от уравнений (11.1.12) — (11.1.15). Здесь фазовые флуктуации уже непосредственно от амплитудных флуктуаций не зависят (коэффициент неизохронности рассматриваемого параметрического генератора равен нулю). Кроме того, в уравнениях (11.1.18) — (11.1.19) расстройка Δ играет более существенную роль, чем в предыдущих флуктуационных уравнениях и, следовательно, более сильно влияет на характеристики флуктуаций.

В последующем анализе мы ограничимся полученными тремя парами флуктуационных уравнений, так как различные практические схемы параметрических генераторов приводят к флуктуационным уравнениям, близким к одной из этих пар.

§ 11.2. Малые флуктуации параметрических генераторов

1. Полученные флуктуационные уравнения (11.1.12) — (11.1.15), (11.1.18), (11.1.19) являются достаточно сложными, и в случае произвольных фазовых флуктуаций φ , ψ анализ их решения весьма затруднителен. Разумно поэтому ограничиться определенными частными случаями, позволяющими понять и характерные черты естественных флуктуаций параметрического генератора, и влияние на флуктуации амплитуды и фазы генератора амплитудно-фазовых флуктуаций сигнала накачки.

В обоих случаях мы ограничимся малыми фазовыми флуктуациями сигнала накачки и автоколебания: $\langle \psi \rangle^{1/2} \ll \pi/2$, $\langle \varphi^2 \rangle^{1/2} \ll \pi/2$. Эти условия имеют место в том случае, когда спектры сигнала накачки и автоколебания генератора представляют собой монохроматические линии и пьедесталы, обзанные малым фазовым (а также и амплитудным) флуктуациям.

Обратимся к параметрическому генератору, обладающему нелинейной емкостью. Учитывая малость ψ и φ , пренебрегая членами высшего порядка малости, вместо (11.1.12), (11.1.13) будем иметь

$$\frac{d\alpha}{dt} = 2\varepsilon\varphi + \xi(t), \quad \frac{d\varphi}{dt} = -\Pi\varphi - q\alpha + \eta(t), \quad (11.2.1)$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} \xi(t) &= -\frac{1}{2}\Pi\alpha_n - \varepsilon\psi + \frac{\omega}{2R_0} [e_{\perp} \cos \vartheta_0 - e_{\parallel} \sin \vartheta_0], \\ \eta(t) &= (\varepsilon - s)\alpha_n + \frac{1}{2}\Pi\psi - \frac{\omega}{2R_0} [e_{\parallel} \cos \vartheta_0 + e_{\perp} \sin \vartheta_0]. \end{aligned} \quad (11.2.2)$$

Здесь

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\Pi\sqrt{\lambda^2 - 1}, \quad (\varepsilon - s) = 2\Delta + q - \frac{1}{2}\Pi\sqrt{\lambda^2 - 1}.$$

В последних слагаемых для $\xi(t)$ и $\eta(t)$ флуктуации φ также опущены. Можно показать, что это пренебрежение справедливо в том случае, если

$$\langle \varphi^2 \rangle^{1/2} \ll \min \{ \cos \vartheta_0, \sin \vartheta_0 \} \leq \sin \vartheta_0 \cos \vartheta_0 = \frac{1}{2} \sin 2\vartheta_0 = (2\lambda)^{-1}. \quad (11.2.3)$$

Будем полагать, что это более сильное условие, накладываемое на $\langle \varphi^2 \rangle$, также выполнено.

Для параметрического генератора с нелинейной индуктивностью из (11.1.14), (11.1.15) при выполнении указанных условий малости фазовых флуктуаций нетрудно получить те же самые уравнения (11.2.1), (11.2.2), где следует произвести замену $\lambda \rightarrow \lambda_1$, $q \rightarrow q_1$, $s \rightarrow 0$, $e_{\parallel} \rightarrow C e_{\parallel}$, $e_{\perp} \rightarrow C e_{\perp}$. Таким образом, первые два типа параметрического генератора почти подобны и по линеаризованным флуктуационным уравнениям.

Для параметрического генератора с электронной лампой линеаризованные уравнения принимают следующий вид:

$$\frac{da}{dt} = -p_1 a + \xi_1(t), \quad \frac{d\varphi}{dt} = -2\varepsilon_1 \varphi + \eta_1(t), \quad (11.2.4)$$

где

$$\begin{aligned} \xi_1(t) &= \varepsilon_1 a_n + \frac{\omega}{2R_0} [e_{\perp} \cos \vartheta_0 - e_{\parallel} \sin \vartheta_0], \\ \eta_1(t) &= \varepsilon_1 \psi + \Delta a_n - \frac{\omega}{2R_0} [e_{\parallel} \cos \vartheta_0 + e_{\perp} \sin \vartheta_0]. \end{aligned} \quad (11.2.5)$$

Здесь

$$p_1 = p - \varepsilon_1 > 0, \quad \varepsilon_1 = \Delta \sqrt{\lambda_2^2 - 1} = \sqrt{\frac{1}{4} \omega^2 A_0^2 - \Delta^2}.$$

Эти уравнения существенно отличаются от (11.2.1). В (11.2.4) первое уравнение практически не связано со вторым, амплитудные флуктуации почти не зависят от частотных, что является характерной чертой наличия активной нелинейности в параметрическом генераторе. По этой же причине флуктуации фазы накачки, оказывая влияние на фазу автоколебания, не влияют на его амплитудные флуктуации.

2. Обратимся к уравнениям (11.2.1), которые совпадают с уравнениями (2.3.23), рассмотренными в § 2.3. Как следует из этого рассмотрения, при разделении уравнений (11.2.1) получающиеся дифференциальные уравнения для флуктуаций амплитуды и фазы имеют второй порядок и характер спектра амплитудно-фазовых флуктуаций существенно зависит от характера корней характеристического уравнения.

На основании (2.3.25) нетрудно видеть, что дискриминант характеристического уравнения равен

$$\mathcal{D} = \Pi^2 - 4\Pi q \sqrt{\lambda^2 - 1} = \Pi \omega [Q^{-1} - 3\beta_2 R_0^2 \sqrt{\lambda^2 - 1}],$$

а корни равны

$$-d_1 = -\frac{1}{2}(\Pi - \sqrt{\mathcal{D}}), \quad -d_2 = -\frac{1}{2}(\Pi + \sqrt{\mathcal{D}}).$$

Определим знак дискриминанта, для чего рассмотрим диапазон изменений $\beta_2 R_0^2$. Как следует из рис. 11.2, в пределах изменения расстройки Δ от Δ_1 до Δ_2 величина $\beta_2 R_0^2$ изменяется от

нуля до $\frac{8}{3} Q^{-1} \sqrt{\lambda^2 - 1}$. Следовательно, в этих пределах расстройки дискриминант изменяется (линейно) от $\Pi \omega Q^{-1}$ до $\Pi \omega Q^{-1} [6 - 8\lambda^2]$, принимая нулевое значение при $\lambda = \lambda^* = 3\sqrt{8} > 1$. Тем самым при $1 < \lambda < \lambda^*$ дискриминант положителен и корни характеристического уравнения вещественны, при $\lambda > \lambda^*$ дискриминант принимает отрицательные значения и корни комплексны. Можно показать, что при $\lambda = \lambda^*$ расстройка Δ^* , соответствующая границе комплексных корней, лежит в интервале

$$\Delta_2 < \Delta^* < \Delta_1.$$

Возьмем для определенности случай $\mathcal{D} > 0$, который практически часто имеет место (в этом случае $1 < \lambda < \lambda^*$, $\Delta^* < \Delta < \Delta_1$).

С помощью (2.3.29) — (2.3.32) нетрудно записать следующие выражения для спектральных плотностей амплитудных и фазовых флуктуаций:

$$\begin{aligned} S_a(\Omega) &= \frac{1}{(\Omega^2 + d_1^2)(\Omega^2 + d_2^2)} \left[(\Pi^2 + \Omega^2) S_{\xi}(\Omega) + 4\epsilon^2 S_{\eta}(\Omega) + \right. \\ &\quad \left. + 4\epsilon \Pi S_{\xi\eta}^0(\Omega) - 4\epsilon \Omega S_{\xi\eta}^1(\Omega) \right], \\ S_{\varphi}(\Omega) &= \frac{1}{(\Omega^2 + d_1^2)(\Omega^2 + d_2^2)} \left[q^2 S_{\xi}(\Omega) + \Omega^2 S_{\eta}(\Omega) - 2q\Omega S_{\xi\eta}^1(\Omega) \right], \\ S_{a\varphi}^0(\Omega) &= \frac{1}{(\Omega^2 + d_1^2)(\Omega^2 + d_2^2)} \left[-\Pi q S_{\xi}(\Omega) + \right. \\ &\quad \left. + (\Omega^2 - 2\epsilon q) S_{\xi\eta}^0(\Omega) + \Pi \Omega S_{\xi\eta}^1(\Omega) \right], \\ S_{a\varphi}^1(\Omega) &= \frac{1}{(\Omega^2 + d_1^2)(\Omega^2 + d_2^2)} \left[-q\Omega S_{\xi}(\Omega) - 2\epsilon \Omega S_{\eta}(\Omega) + \right. \\ &\quad \left. + (\Omega^2 + 2\epsilon q) S_{\xi\eta}^1(\Omega) - \Pi \Omega S_{\xi\eta}^0(\Omega) \right]. \quad (11.2.6) \end{aligned}$$

Входящие сюда спектральные плотности случайных функций $\xi(t)$ и $\eta(t)$ могут быть легко выражены через спектральные плотности случайных функций α_n , ψ , e_{\parallel} , e_{\perp} согласно (11.2.2) и формулам § 2.1. Общий анализ (11.2.6) в этом случае затруднителен и не представляет интереса, более целесообразно рассмотрение отдельных частных случаев.

Заметим, что если брать случай $\mathcal{D} = -\mathcal{R} < 0$, то, совершив в (11.2.6) замену

$$(\Omega^2 + d_1^2)(\Omega^2 + d_2^2) \rightarrow \left[\frac{1}{4} \Pi^2 + \left(\Omega - \frac{1}{2} \sqrt{\mathcal{R}} \right)^2 \right] \left[\frac{1}{4} \Pi^2 + \left(\Omega + \frac{1}{2} \sqrt{\mathcal{R}} \right)^2 \right],$$

мы, согласно (2.3.33), получим спектральные плотности амплитудно-фазовых флуктуаций и для этого случая. Легко видеть, что они могут иметь максимум вблизи $\Omega = \frac{1}{2} \sqrt{\mathcal{R}}$.

3. Рассмотрим первый частный случай, когда естественными шумами параметрического генератора можно пренебречь, так же как и флуктуациями фазы накачки. В этом случае имеют место только амплитудные флуктуации накачки $\alpha_n(t)$, обладающие спектральной плотностью $S_n(\Omega)$. Тогда

$$\xi(t) = \frac{1}{2} \Pi \alpha_n, \quad S_\xi(\Omega) = \frac{1}{4} \Pi^2 S_n(\Omega), \quad S_{\xi\eta}^0(\Omega) = \frac{1}{2} \Pi(\epsilon - s) S_n(\Omega),$$

$$\eta(t) = (\epsilon - s) \alpha_n, \quad S_\eta(\Omega) = (\epsilon - s)^2 S_n(\Omega), \quad S_{\xi\eta}^1(\Omega) \equiv 0.$$

Из (11.2.6) получаем следующие значения спектральных плотностей для амплитуды и фазы колебания:

$$S_a(\Omega) = K_{на}^2(\Omega) S_n(\Omega), \quad K_{на}^2(\Omega) = \frac{1}{4} \Pi^2 \frac{\Omega^2 + d_3^2}{(\Omega^2 + d_1^2)(\Omega^2 + d_2^2)}, \quad (11.2.7)$$

$$S_\varphi(\Omega) = K_{нф}^2(\Omega) S_n(\Omega), \quad K_{нф}^2(\Omega) = (\epsilon - s)^2 \frac{\Omega^2 + d_4^2}{(\Omega^2 + d_1^2)(\Omega^2 + d_2^2)}.$$

Здесь

$$d_3^2 = \Pi^2 + 8\epsilon(\epsilon - s) + 16\epsilon^2 \Pi^{-2}(\epsilon - s)^2, \quad d_4^2 = \Pi^2 q^2 / 4(\epsilon - s)^2.$$

Поскольку R_0^2 и A_0^2 имеют одинаковый порядок малости, то $2q$ примерно равно s . Тогда можно найти, что

$$d_1 < d_2 \leq d_3.$$

Кроме этого можно показать, что коэффициенты d_2, d_3 по порядку величины близки к полюсе свободного контура Π .

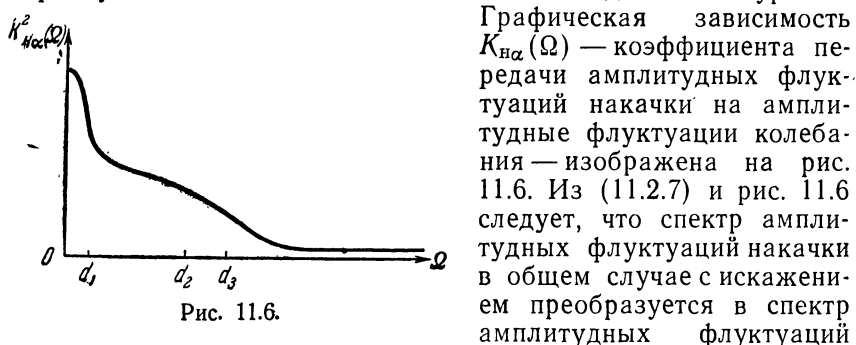


Рис. 11.6.

Графическая зависимость $K_{на}(\Omega)$ — коэффициента передачи амплитудных флуктуаций накачки на амплитудные флуктуации колебания — изображена на рис. 11.6. Из (11.2.7) и рис. 11.6 следует, что спектр амплитудных флуктуаций накачки в общем случае с искажением преобразуется в спектр амплитудных флуктуаций автоколебания. Без искажений передаются только достаточно медленные амплитудные флуктуации, соответствующие $\Omega \ll d_1$. Быстрые амплитудные флуктуации генератора накачки «подавляются». Нетрудно видеть, что это подавление при $d_1 \approx d_2$ объяснено по существу инерционностью колебательного контура. Если, например, в полосе Π спектр амплитудных флуктуаций накачки

постоянен, то спектр флуктуаций амплитуды параметрического генератора имеет полосу, равную Π , т. е. определяется затуханием контура. Заметим, что в обычных генераторах, как это неоднократно было показано выше, ширина спектра амплитудных флуктуаций колебания определялась не затуханием контура, а прочностью предельного цикла. Поскольку $p \ll \Pi$, то ширина спектра амплитудных флуктуаций в обычных автогенераторах получается много меньшей, чем для параметрического генератора при $d_1 \approx d_2$.

Если же $d_1 \ll d_2$, что, например, будет иметь место при малом q и λ , достаточно близкой к единице, то полоса спектра амплитудных флуктуаций будет равна величине d_1 , которая будет играть роль прочности предельного цикла параметрического генератора.

Если d_4 близка к d_3 , то спектр фазовых флуктуаций колебания, определяемый второй формулой (11.2.7), будет подобен спектру амплитудных флуктуаций.

Если же $d_4 \approx d_1 \ll d_2$, то спектр фазовых флуктуаций будет значительно шире спектра амплитудных флуктуаций и его ширина будет равна примерно Π .

Нетрудно на основании проведенного рассмотрения и результатов § 4.4 показать соотношение спектров сигнала накачки и сигнала генератора, например, для случая, когда ширина спектра амплитудных флуктуаций накачки много больше Π и в этой полосе равна $S_{\text{н0}}$. На основании (4.4.8) пьедестал монохроматической линии колебания, обладающего амплитудными и фазовыми флуктуациями, равен

$$\frac{R_0^2}{2} [S_\alpha(\Omega) + S_\varphi(\Omega) + 2S_{\alpha\varphi}^1(\Omega)].$$

Положим для простоты, что $d_4 = d_1 \ll d_2 = d_3$. Тогда для пьедестала получим следующее выражение:

$$\frac{R_0^2}{2} \left\{ \frac{1}{4} \Pi^2 + \frac{(\varepsilon - s)^2}{\Omega^2 + d_1^2} - \frac{\frac{1}{2} \Pi^2 \Omega d_1'}{(\Omega^2 + d_1^2)(\Omega^2 + d_2^2)} \right\} S_{\text{н0}},$$

где обозначено: $d_1' = q + 8\varepsilon\Pi^{-2}(\varepsilon - s)^2 + 2(\varepsilon - s)$. Таким образом, пьедестал в общем случае несимметричен. Примерный вид спектров сигнала накачки и автоколебания параметрического генератора для рассмотренного случая указан на рис. 11.7, а и рис. 11.7, б.

Если брать случай $\mathcal{D} < 0$, то в форме пьедестала спектральной линии автоколебания появятся различные экстремумы.

4. Пусть теперь имеют место только флуктуации фазы сигнала накачки, обладающие спектральной плотностью $S_\psi(\Omega)$. Аналогично предыдущему можно найти следующие значения спектральных плотностей флуктуаций амплитуды и фазы автоколебания:

$$S_a(\Omega) = K_{\psi a}^2(\Omega) S_\psi(\Omega),$$

$$S_\varphi(\Omega) = K_{\psi \varphi}^2(\Omega) S_\psi(\Omega),$$

$$K_{\psi a}^2(\Omega) = \frac{\Omega^2 \varepsilon^2}{(\Omega^2 + d_1^2)(\Omega^2 + d_2^2)},$$

$$K_{\psi \varphi}^2(\Omega) = \frac{1}{4} \Pi^2 \frac{\Omega^2 + d_5^2}{(\Omega^2 + d_1^2)(\Omega^2 + d_2^2)}, \quad (11.2.8)$$

где $d_5 = d_1 d_2 / \Pi$. Из первой формулы (11.2.8) следует, что медленные флуктуации фазы накачки не создают амплитудных флуктуаций параметрического генератора, а быстрые подавляются инерционностью колебательного контура. Наиболее сильно фа-

зовые флуктуации накачки сказываются на частоте $\Omega_{\max} = \sqrt{d_1 d_2} = \sqrt{2\varepsilon q}$. Вид коэффициента передачи $K_{\psi a}^2(\Omega)$ изображен на рис. 11.8. В этом случае форма пьедестала спектральной линии параметрического генератора также будет несимметричной, поскольку существует

$$S_{a\varphi}^1(\Omega) = \frac{-q\varepsilon^2\Omega}{(\Omega^2 + d_1^2)(\Omega^2 + d_2^2)} S_\psi(\Omega).$$

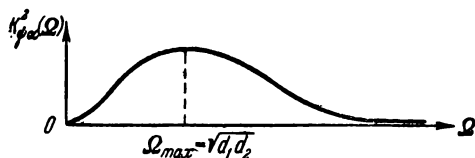


Рис. 11.8.

Пусть ширина спектра фазовых флуктуаций накачки много шире Π и их спектральная плотность в этой полосе равна $S_{\psi 0}$. Предположим также, что $d_1 \ll d_2 \approx \Pi$. Тогда пьедестал спектральной линии параметрического генератора будет равен

$$\frac{R_0^2}{2} \left\{ \frac{\Omega^2 \varepsilon^2}{(\Omega^2 + d_1^2)(\Omega^2 + d_2^2)} + \frac{\frac{1}{4} \Pi^2}{\Omega^2 + d_2^2} - \frac{2q\varepsilon^2\Omega}{(\Omega^2 + d_1^2)(\Omega^2 + d_2^2)} \right\} S_{\psi 0}.$$

Примерный вид спектра генератора для этого случая изображен на рис. 11.7, в.

5. Если обратиться к параметрическому генератору с нелинейной индуктивностью, то для него получим почти то же самое. Более интересен параметрический генератор с активной нелинейностью — лампой. Обратимся к уравнениям (11.2.4), (11.2.5).

Если имеются только амплитудные флуктуации сигнала накачки, то

$$\frac{da}{dt} = -p_1 a + \varepsilon_1 a_n, \quad \frac{d\varphi}{dt} = -2\varepsilon_1 \varphi + \Delta a_n.$$

Отсюда прежде всего следует, что ширина спектра амплитудных флуктуаций параметрического генератора равна величине p_1 , которая зависит от расстройки Δ . Положительная расстройка ($\Delta > 0$) увеличивает ширину спектра амплитудных флуктуаций, а отрицательная — уменьшает. Амплитудные флуктуации сигнала накачки только при ненулевой расстройке приводят к флуктуациям фазы автоколебания. Если $\Delta \neq 0$, то между амплитудными и фазовыми флуктуациями автоколебания имеется корреляция и форма пьедестала спектральной линии является несимметричной. Если имеет место неравенство $p_1 \ll 2\varepsilon_1$ и $\Delta \neq 0$, то форма спектра параметрического генератора соответствует рис. 11.7, б.

Пусть имеют место только фазовые флуктуации сигнала накачки. Тогда из (11.2.4), (11.2.5) следует, что амплитудные флуктуации автоколебания отсутствуют (переходные процессы не рассматриваем), а фазовые флуктуации определяются уравнением

$$\frac{d\varphi}{dt} = -2\varepsilon_1 \varphi + \varepsilon_1 \psi.$$

Следовательно, спектральная плотность фазовых флуктуаций равна

$$S_\varphi(\Omega) = \frac{\varepsilon_1^2 S_\psi(\Omega)}{\Omega^2 + 4\varepsilon_1^2}.$$

Ширина спектра фазовых флуктуаций равна $2\varepsilon_1$, если $S_\psi(\Omega)$ постоянна в этой полосе. Величина $2\varepsilon_1$ играет роль прочности предельного цикла для флуктуаций фазы.

Спектр колебания параметрического генератора в этом случае является симметричным, его вид показан на рис. 11.7, в пунктиром (если $2\varepsilon_1 \approx d_2$).

6. Выясним теперь условия малости, накладываемые на флуктуации амплитуды и фазы сигнала накачки, при которых справедливы линеаризованные уравнения (11.2.1), (11.2.4).

Для простоты расчетов сделаем это для простейших случаев. Пусть имеются только амплитудные флуктуации сигнала накачки. Рассматривая параметрический генератор с нелинейной емкостью, имеем для $d_1 \approx d_4$ и для $S_H(\Omega)$, постоянной в полосе d_2 :

$$S_\Phi(\Omega) = \frac{(\epsilon - s)^2 S_{H0}}{\Omega^2 + d_2^2}.$$

Отсюда находим интенсивность фазовых флуктуаций

$$\langle \varphi^2 \rangle = (\epsilon - s)^2 S_{H0} \pi / d_2.$$

Таким образом, для справедливости линеаризованных уравнений (11.2.1) спектральная плотность флуктуаций амплитуды должна удовлетворять условию

$$S_{H0}^{1/2} \ll \frac{\sqrt{\pi(\Pi + VD)}}{2\sqrt{2}(\epsilon - s)}.$$

Для справедливости линеаризованных уравнений (11.2.4) можно аналогично найти следующее условие:

$$S_{H0}^{1/2} \ll \frac{1}{\Delta} \sqrt{\frac{\pi \epsilon_1}{2}}.$$

Если рассмотреть случай, когда имеются только флуктуации фазы сигнала накачки, то условие их малости для параметрического генератора с нелинейной емкостью для $d_2 \approx \Pi$ и $S_\Psi(\Omega)$, постоянной в полосе d_2 , имеет вид

$$S_{\Psi 0}^{1/2} \ll \Pi^{-1} \sqrt{\frac{\pi}{2}(\Pi + V\mathcal{D})},$$

а для параметрического генератора с электронной лампой

$$S_{\Psi 0}^{1/2} \ll \sqrt{\frac{\pi}{2\epsilon_1}}.$$

Для тех случаев, когда ширина спектральных плотностей $S_H(\Omega)$ и $S_\Psi(\Omega)$ сравнима или меньше d_2 , условия малости будут уже накладываться на $\langle \alpha_n^2 \rangle$ и на $\langle \psi^2 \rangle$.

7. Обратимся, наконец, к естественным (тепловым) шумам параметрического генератора. Сигнал накачки будем полагать монохроматическим, так что $\alpha_n(t) \equiv \psi(t) \equiv 0$.

В этом случае вместо (11.2.2), (11.2.5) будем иметь

$$\xi(t) = \xi_1(t) = \frac{\omega}{2R_0} [e_\perp \cos \vartheta_0 - e_\parallel \sin \vartheta_0],$$

$$\eta(t) = \eta_1(t) = -\frac{\omega}{2R_0} [e_\parallel \cos \vartheta_0 + e_\perp \sin \vartheta_0],$$

где случайные функции $e_{\parallel}(t)$, $e_{\perp}(t)$ являются дельта-коррелированными, независимыми и обладают спектральными плотностями, равными $\frac{2}{\pi} kTr$. Тогда нетрудно получить следующие значения для спектральных плотностей функций $\xi(t)$ и $\eta(t)$:

$$S_{\xi}(\Omega) = S_{\eta}(\Omega) = \frac{D}{2\pi}, \quad D = \frac{\omega^2 \pi c_0}{R_0^2}, \quad c_0 = \frac{1}{\pi} kTr, \quad S_{\xi\eta}^{0,1}(\Omega) \equiv 0.$$

Для параметрического генератора с нелинейной емкостью из (11.2.6) получаем следующие значения спектральных плотностей флуктуаций амплитуды и фазы:

$$S_a(\Omega) = \frac{\Omega^2 + \Pi^2 + 4\varepsilon^2}{(\Omega^2 + d_1^2)(\Omega^2 + d_2^2)} \frac{D}{2\pi}, \quad S_{\varphi}(\Omega) = \frac{\Omega^2 + q^2}{(\Omega^2 + d_1^2)(\Omega^2 + d_2^2)} \frac{D}{2\pi},$$

$$S_{a\varphi}^0(\Omega) = \frac{-\Pi q}{(\Omega^2 + d_1^2)(\Omega^2 + d_2^2)} \frac{D}{2\pi}, \quad S_{a\varphi}^1(\Omega) = \frac{-(2\varepsilon + q)\Omega}{(\Omega^2 + d_1^2)(\Omega^2 + d_2^2)} \frac{D}{2\pi}.$$

Естественные флуктуации амплитуды и фазы параметрического генератора, описываемые этими формулами, также приводят к появлению пьедестала около монохроматической линии в спектре автоколебаний. Поскольку $S_{a\varphi}^1(\Omega) \neq 0$, то пьедестал является несимметричным. Если $d_1 \ll d_2$, то спектр колебания параметрического генератора при учете его тепловых шумов похож на спектр, изображенный на рис. 11.7, б.

Для параметрического генератора с электронной лампой на основании (11.2.4) легко найти

$$S_a(\Omega) = \frac{1}{\Omega^2 + p_1^2} \frac{D}{2\pi}, \quad S_{\varphi}(\Omega) = \frac{1}{\Omega^2 + 4\varepsilon_1^2} \frac{D}{2\pi},$$

$$S_{a\varphi}^{0,1}(\Omega) \equiv 0.$$

Пьедестал спектральной линии спектра этого генератора симметричен, естественные флуктуации амплитуды и фазы независимы. Поскольку обычно $p_1 \ll 2\varepsilon_1$, то амплитудные флуктуации имеют малую ширину спектра по сравнению с шириной спектра фазовых флуктуаций.

Нетрудно видеть, что интенсивности естественных амплитудных и фазовых флуктуаций параметрического генератора с электронной лампой равны

$$\langle \alpha^2 \rangle = \frac{D}{2p_1} \gg \langle \varphi^2 \rangle = \frac{D}{4\varepsilon_1}.$$

При рассмотрении естественных флуктуаций в параметрических генераторах также можно выяснить условия справедливости линеаризованных уравнений. Из полученных формул для

спектральной плотности фазовых флуктуаций нетрудно найти следующие условия, накладываемые на интенсивность тепловых шумов. Генератор с нелинейной емкостью ($q \approx d_1$)

$$D^{1/2} \ll \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{1}{2}(\Pi + V\mathcal{D})}.$$

Генератор с электронной лампой

$$D^{1/2} \ll \pi \sqrt{\varepsilon_1}.$$

Не представляет труда показать, что эти условия заведомо выполняются. Поскольку по порядку величины D равно естественной ширине спектральной линии, например, LC -генератора, контуром которого служит контур параметрического генератора (в отсутствии модуляции емкости), то эти условия означают фактически малость естественной ширины спектральной линии LC -генератора по сравнению с полосой свободного контура Π (приняв во внимание, что \mathcal{D} и ε_1 имеют порядок Π).

ФЛУКТУАЦИИ В КВАНТОВЫХ ГЕНЕРАТОРАХ

В предыдущих главах мы рассматривали флуктуации в таких автогенераторах, все элементы которых принадлежали классической радиоэлектронике.

Развитие квантовой радиофизики и в особенности радиоспектроскопии привело, в частности, к идеям использования молекул и атомов как некоторых элементов радиоэлектронных систем. Принадлежащая Н. Г. Басову и А. М. Прохорову идея создания молекулярного генератора [111—113], использующего в качестве селективной системы пучок возбужденных молекул, явилась чрезвычайно плодотворной особенно с точки зрения получения высокостабильного генератора. Теоретические и экспериментальные исследования (см., например, [114—126], (1962 [2])) действительно подтвердили исключительно высокую стабильность молекулярного генератора, не достижимую ранее практически ни одним радиоэлектронным генератором. В связи с этим изучение флуктуаций в молекулярном генераторе, позволяющее определить форму и ширину его спектральной линии, представляется особенно важным и интересным [115, 117] (1958 [5, 21], 1959 [9], 1964 [17]).

В настоящей главе, помимо рассмотрения общего принципа действия квантовых генераторов, исследуются уравнения движения молекулярного генератора, определяются параметры стационарных автоколебаний и изучается их устойчивость. В последнем параграфе проводится подробный анализ естественных флуктуаций в молекулярном генераторе, исследуются спектральные плотности флуктуаций амплитуды и частоты и, наконец, рассматривается форма и ширина спектральной линии молекулярного генератора.

§ 12.1. Квантовые автогенераторы. Принцип действия

1. В обычных автогенераторах с электронными приборами: электронными лампами, клистродами, магнетронами и т. п. энергия автоколебаний черпается из энергии источника постоянного тока за счет взаимодействия электрически заряженных

частиц — электронов с электрическим полем. Кроме того, в таких автогенераторах основным селективным элементом, определяющим частоту автоколебаний и условия их возбуждения, является электрический контур (резонатор).

На основании квантовых свойств вещества отдельные молекулы (или атомы) могут рассматриваться как определенные селективные системы, способные к резонансному (по частоте) поглощению и излучению электромагнитной энергии. Подобные молекулярные селективные системы обладают с точки зрения некоторых характеристик значительно лучшими параметрами в сравнении с макроскопическими резонаторами. Так, например, добротность «молекулярных резонаторов» может на несколько порядков превышать добротность макроскопических резонаторов.

Как следует из всего вышеизложенного, ширина спектральной линии автогенератора существенно зависит от добротности используемого контура; чем выше его добротность, тем меньше

ширина линии и тем стабильнее по амплитуде и частоте колебания автогенератора. Поэтому следует ожидать, что использование в автогенераторах радиочастот высокодобротных молекулярных контуров окажется весьма эффективным с точки зрения увеличения их стабильности.

2. Из-за квантовых свойств молекулярных резонаторов их использование является весьма специфичным. Как известно, внутренняя энергия молекул может принимать только определенные дискретные значения, например $W_k < W_n < W_m$ и т. д. (рис. 12.1). Находясь, например, на уровне W_n молекула может перейти на более высокий уровень W_m , если она поглотит энергию

$$\Delta W_{mn} = W_m - W_n.$$

Электромагнитное поле может передать молекуле эту энергию ΔW_{mn} наиболее эффективно в том случае, если оно обладает частотой $\omega_{mn} = \Delta W_{mn} / \hbar$, где \hbar — постоянная Планка. С другой стороны, молекула, находясь на верхнем возбужденном уровне W_m , может при определенных условиях перейти на более низкий уровень W_n . При этом она отдает энергию ΔW_{mn} в виде импульса электромагнитного поля с частотой, опять же равной ω_{mn} .

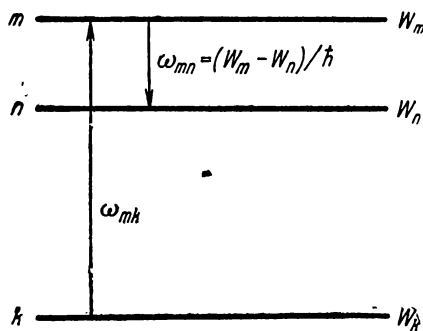


Рис. 12.1.

Переход молекулы с высшего энергетического уровня на низший (например, с W_m на W_n) может в принципе происходить самопроизвольно. В этом случае говорят о спонтанном излучении. Однако этот переход будет существенно облегчен, если на молекулу действует постороннее электромагнитное поле с частотой ω_{mn} . В этом случае говорят об индуцированном излучении, которое играет основную роль в квантовых генераторах. В этой определенности частоты ω_{mn} и заключаются резонансные характеристики молекул (резонансное поглощение, резонансное индуцированное излучение).

Принцип действия квантовых генераторов может быть описан теперь следующим образом: в обычный макроскопический резонатор (или колебательный контур с дискретными параметрами), настроенный на частоту ω_{mn} , вводятся молекулы, находящиеся в возбужденном состоянии на уровне W_m . Наличие в резонаторе собственных начальных электромагнитных полей (происходящих хотя бы от теплового движения электронов — теплового шума) способствует индуцированному «высвечиванию» некоторых возбужденных молекул. Выделенная этими молекулами энергия частично тратится на тепло в стенках резонатора (влияние обычных, активных потерь резонатора) и частично идет на увеличение энергии электромагнитного поля внутри резонатора. Более сильное поле резонатора способствует в свою очередь большему высвечиванию молекул вещества и тем самым приводит к еще большему возрастанию энергии. Процесс возрастает, приводя тем самым к генерации достаточно больших колебаний в резонаторе. Если количество возбужденных молекул, введенных в резонатор, было конечным, то процесс генерации закончится тогда, когда «высветятся» все молекулы.

Если после высвечивания молекул тем или иным способом возбудить их опять, то появится второй импульс и т. д. Генератор, работающий в таком режиме, дает импульсную генерацию.

Для создания непрерывного режима работы квантового генератора необходимо непрерывно вводить (тем или иным способом) новые возбужденные молекулы или непрерывно «поднимать» высвеченные молекулы опять на верхний уровень W_m с помощью дополнительного источника энергии.

Первый способ осуществления непрерывного режима применяется в так называемом *молекулярном генераторе*, где возбужденные молекулы просто-напросто механически непрерывно вводятся в резонатор в виде молекулярного пучка.

Второй способ применяется в так называемых *квантовых генераторах на трех уровнях*. Молекулы применяемого в этом генераторе вещества обладают тремя (подходящими по частотам переходов) энергетическими уровнями: $W_h < W_n < W_m$. При

высвечивании молекулы переходят с уровня W_m на W_n , нехватка молекул на уровне W_m ликвидируется за счет переброса молекул, находящихся на уровне W_h , с помощью вспомогательного поля частоты $\omega_{mh} > \omega_{mn}$ на уровень W_m .

Это вспомогательное поле аналогично полю накачки в параметрическом генераторе, поэтому флуктуации амплитуды и фазы этого поля непосредственно передаются на амплитуду и фазу автоколебания. По этой причине квантовый генератор на трех уровнях (как и любые параметрические генераторы) с точки зрения стабильности автоколебаний не лучше генератора накачки.

3. При анализе принципа работы квантовых генераторов мы рассматривали поведение в сущности одной молекулы. Вещество (двухуровневое или трехуровневое), находящееся в резонаторе, обладает большим числом молекул, которые в общем «разбросаны» по разным уровням. Это приводит к некоторым особенностям. Если совокупность многих молекул находится в состоянии теплового равновесия при температуре T , то населенность различных уровней различна, т. е. различно число молекул, находящихся на различных энергетических уровнях. Если N_W — число молекул, находящихся на уровне с энергией W , то, согласно закону Больцмана,

$$N_W \sim \exp [-W/kT],$$

где k — постоянная Больцмана. Следовательно, чем выше энергетический уровень, тем меньше он населен. Тем самым при термодинамическом равновесии вещество «в среднем» *поглощает* энергию падающего поля, а не создает дополнительное индуцированное излучение, так как при действии поля число молекул, переходящих с нижних уровней на верхние, значительно больше числа молекул, переходящих с верхних уровней на нижние. Поэтому, если такое вещество ввести в резонатор, то, хотя в нем и имеется значительное количество возбужденных молекул, оно внесет в среднем лишь дополнительные активные потери в резонатор. Оно обладает положительным сопротивлением потерь.

Закон Больцмана дает среднее равновесное распределение населенностей по уровням. В действительности число молекул на каждом уровне непрерывно флуктуирует, однако в отсутствие внешнего поля число молекул, перешедших «вверх», в среднем равно числу молекул, перешедших «вниз».

Для того чтобы квантовый генератор работал, вещество, находящееся в нем, должно находиться в таком неравновесном состоянии, в котором число молекул на верхнем уровне было бы больше числа молекул на нижнем уровне. И при этом важна

разница между этими числами, которая и определяет число активных молекул.

Вещество, которое обладает активными молекулами, обладает по существу отрицательными потерями, и при введении такого вещества в резонатор (если его отрицательные потери превышают положительные потери резонатора) система самовозбуждается. Из описания принципа работы квантового генератора следует, что обратная связь (которая имеет место у любого автогенератора) в данном случае заключается в существовании индуцированного излучения у неравновесного вещества.

Максимально возможная (в принципе) мощность генерируемых колебаний непрерывного квантового генератора определяется средним числом активных молекул \bar{N} , ежесекундно поступающих в резонатор (или ежесекундно поднимаемых на верхний уровень), и без учета потерь резонатора равна $\bar{N}\Delta W_{mn} = \bar{N}\hbar\omega_{mn}$. Для импульсной генерации мы получим то же значение для энергии импульса, если \bar{N} — число активных молекул, высвечивающихся за один импульс.

Зависимость мощности генерируемых колебаний от числа активных молекул, во-первых, ведет к эффекту насыщения (мощность колебаний всегда меньше $\bar{N}\hbar\omega_{mn}$) и, во-вторых, ограничивает мощность довольно малыми величинами. Величина $\bar{N}\hbar\omega_{mn}$ для реальных генераторов невелика, для молекулярного генератора на аммиаке, где $\omega_{mn} = 2,4 \cdot 10^{10}$, она, например, имеет порядок 10^{-10} вт. Эта цифра характерна для большинства непрерывных квантовых генераторов, малая мощность которых — их основной недостаток.

В последующих параграфах будут подробно рассмотрены флуктуации амплитуды и частоты одного конкретного квантового генератора непрерывного режима — молекулярного генератора на пучке молекул.

§ 12.2. Уравнения движения молекулярного генератора

1. Принципиальная схема молекулярного генератора на пучке молекул изображена на рис. 12.2. Молекулярный пучок, выходящий (под давлением) из специального источника, поступает в так называемую сортирующую систему, которая из всех молекул пучка пропускает только молекулы, находящиеся на верхнем энергетическом уровне. Эти молекулы, поступая затем в резонатор, индуцированно высвечиваются, создавая и поддерживая автоколебания электромагнитного поля в резонаторе.

Сортирующая система является необходимой составной частью молекулярного генератора. Она по существу преобразует термодинамический равновесный пучок молекул, создаваемый

источником на ее входе, в неравновесный выходной пучок, направляемый в резонатор. Принцип действия, например, электростатической сортирующей системы основан на том, что молекулы, находящиеся на разных энергетических уровнях, имеют



Рис. 12.2.

различные проекции своих электрических дипольных моментов на внешнее электрическое поле, вследствие чего, пролетая через специально созданное неоднородное электростатическое поле (с градиентом, направленным перпендикулярно скорости движения пучка молекул) они движутся по разным траекториям. Выделяя диафрагмами определенные траектории, можно тем самым отсортировать из входного пучка молекулы, находящиеся на заданном энергетическом уровне.

Одним из распространенных молекулярных генераторов является молекулярный генератор, работающий на пучке молекул аммиака N^{14}H_3 . Спектр аммиака хорошо изучен вследствие наличия у него интенсивных спектральных линий в радиочастотном диапазоне. Используются два инверсионных уровня молекулы аммиака, переход между которыми создает спектральную линию с частотой, равной 23870,14 Мгц. (Соответствующие квантовые числа равны $J=3$, $K=3$, J — полный вращательный момент молекулы, K — его проекция на ось симметрии.)

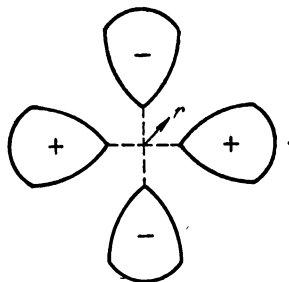


Рис. 12.3.

Для сортировки молекул аммиака по этим инверсионным уровням оказывается эффективной электростатическая сортирующая система, состоящая из цилиндрического квадрупольного конденсатора, поперечный разрез которого показан на рис. 12.3. Напряженность неоднородного электростатического поля, создаваемого квадрупольным конденсатором, возрастает в радиальном направлении, при удалении от оси конденсатора. Энергетические уровни

молекул аммиака, влетающих в сортирующую систему, изменяются на величину, равную $\pm aE_{\text{ст}}^2$, где a — некоторый коэффициент, а $E_{\text{ст}}$ — напряженность электростатического поля. Знак «плюс» относится к молекулам, находящимся на верхнем инверсионном уровне, знак «минус» — к молекулам на нижнем инверсионном уровне. Легко получить выражение для сил, действующих на молекулы:

$$F = \mp 2aE_{\text{ст}} \frac{\partial E_{\text{ст}}}{\partial r}.$$

В неоднородном электрическом поле (для рассматриваемого квадрупольного конденсатора $\partial E_{\text{ст}}/\partial r > 0$) на пролетающие молекулы будут действовать силы (в радиальном направлении) противоположных знаков: молекулы, находящиеся на нижнем уровне, будут втягиваться в область с максимальным значением электрического поля, а молекулы, находящиеся на верхнем инверсионном уровне, — втягиваться в область с минимальным значением поля, расположенную вдоль оси сортирующей системы. Тем самым возбужденные молекулы фокусируются вдоль оси квадрупольного конденсатора, а «высвеченные» молекулы отклоняются от оси и не попадают на выход сортирующей системы (см. рис. 12.2).

2. Таким образом, в резонатор молекулярного генератора влетает пучок, состоящий из активных молекул, который можно рассматривать как некоторую среду, обладающую отрицательным поглощением. Подобная среда может быть макроскопически описана комплексной диэлектрической проницаемостью ϵ , мнимая часть которой отрицательна. Первые теоретические рассуждения молекулярного генератора и были основаны на таком описании среды [111—113]. В работах В. С. Троицкого (1958 [5, 21]) на основе уравнений молекулярного генератора с комплексной ϵ были впервые рассмотрены флуктуационные процессы в молекулярном генераторе.

Привлечение понятия комплексной диэлектрической проницаемости ϵ для описания процессов в молекулярном генераторе правомерно, строго говоря, только для монохроматических процессов, ибо только для них и можно строго ввести ϵ . Тем самым такое описание может удовлетворительно рассматривать только установившиеся процессы и не слишком быстрые флуктуации колебания молекулярного генератора. Можно показать, что представление молекулярного пучка в виде диэлектрика с комплексной ϵ адекватно лишь для таких медленных изменений амплитуды и фазы колебания, характерное время изменения которых много больше τ_0 — времени пролета молекул через резонатор.

Для анализа более сложных процессов в молекулярном генераторе, чем монохроматические (например, для оценки высших гармоник, для рассмотрения сравнительно быстрых флуктуаций и т. п.) необходимо обращение к полной системе уравнений молекулярного генератора, полученных В. М. Файном и А. Н. Ораевским [120, 124]. Флуктуации в молекулярном генераторе с учетом полной системы уравнений впервые были рассмотрены В. Б. Цареградским (1964 [17]). Нижеследующее изложение также опирается на полную систему уравнений движения молекулярного генератора.

3. Активную среду (молекулярный пучок), находящуюся в резонаторе, в котором существует электрическое поле $E(t)$, будем описывать поляризацией $P(t)$. Следует отметить, что эта поляризация возникает фактически вследствие переходов молекул под действием электрического поля с верхнего инверсионного уровня на нижний.

Строго говоря, следовало бы рассматривать векторное представление электрического поля и поляризации. Однако полагая молекулярный пучок электрически изотропным, ограничимся модулями этих векторов. С другой стороны, объемный резонатор является многомодным резонатором и наряду с основной модой в нем могут возбуждаться и другие. Мы будем рассматривать, как и ранее, лишь один тип колебаний и описывать его электрическим полем $E(t)$. Кроме того, можно принять, что этот выбранный тип колебания таков, что $E(t)$ не зависит от координаты z , вдоль оси которой распространяется молекулярный пучок. Зависимость электрического поля от поперечных координат определяется типом колебания в резонаторе, и мы не будем ее учитывать, рассматривая поле $E(t)$ в какой-либо фиксированной точке резонатора.

Таким образом, задача о возбуждении колебаний в молекулярном генераторе сводится по существу к двум следующим задачам:

1) электродинамической задаче о возбуждении резонатора током смещения, равным $4\pi \frac{dP}{dt}$;

2) квантовомеханической задаче о создании поляризации активной среды P внешним электромагнитным полем.

Первая задача рассматривалась в общем случае в § 10.1. Отправляясь от уравнения (10.1.5), заменяя $i(t)$ на $E(t)$, заменяя плотность тока j плотностью тока смещения, интегрируя последний по объему молекулярного пучка (для простоты можно полагать, что объем пучка близок к объему резонатора) и понимая под поляризацией $P(t)$ поляризацию в пучке, усредненную по скоростям молекул и по времени пролета молекул через ре-

зонатор (см. [120, 124], (1964 [17])), для электрического поля $E(t)$ нетрудно получить следующее уравнение:

$$\frac{d^2 E}{dt^2} + \frac{\omega_1}{Q} \frac{dE}{dt} + \omega_1^2 E = -4\pi \frac{d^2 P}{dt^2}. \quad (12.2.1)$$

Это уравнение получено при замене резонатора эквивалентным *параллельным* контуром. Если резонатор заменять *последовательным* контуром, то в правую часть (12.2.1) войдет дополнительный член $-4\pi \frac{\omega_1}{Q} \frac{dP}{dt}$. Однако при достаточно высокой добротности резонатора им можно пренебречь и тем самым опять-таки рассматривать уравнение (12.2.1).

При решении второй задачи необходимо вводить в рассмотрение усредненную по временам пролета молекул плотность активных молекул в резонаторе $N(t)$, а также плотность активных молекул в отсутствии поля в резонаторе (на входе резонатора) $N^0(t)$. Квантовомеханический расчет [120, 124], (1964 [17]) приводит к следующим уравнениям для $P(t)$ и $N(t)$:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 P}{dt^2} + \frac{2}{\tau_0} \frac{dP}{dt} + \left(\omega_{21}^2 + \frac{1}{\tau_0^2} \right) P &= -\frac{2\omega_{21}}{\hbar} |\mu_{21}|^2 NE, \\ \frac{dN}{dt} + \frac{1}{\tau_0} (N - N^0) &= \frac{2}{\hbar\omega_{21}} E \left(\frac{dP}{dt} + \frac{P}{\tau_0} \right). \end{aligned} \quad (12.2.2)$$

Здесь τ_0 — среднее время пролета активной молекулы через резонатор (среднее время жизни активной молекулы, среднее время взаимодействия молекулы с полем), μ_{21} — матричный элемент дипольного момента молекулы, ω_{21} — частота перехода между рабочими уровнями молекулы. Полученная система уравнений, определяющая поляризацию молекулярного пучка, порождаемую электрическим полем $E(t)$, является нелинейной.

Совокупность уравнений (12.2.1) и (12.2.2) и описывает поведение молекулярного генератора как в стационарном, так и в переходных режимах.

4. Учет теперь существование флуктуаций в системе молекулярного генератора. Возможные источники флуктуаций следующие: тепловой шум потерь резонатора, флуктуации числа активных молекул в пучке, спонтанное излучение пучка молекул. Мы учтем только первые два источника.

Наличие теплового шума резонатора позволяет ввести в правую часть уравнения (12.2.1) член $\omega_1^2 E_{\text{фл}}(t)$, где $E_{\text{фл}}(t)$ — некоторое стороннее флуктуационное электрическое поле, носящее характер белого шума.

Флуктуации числа активных молекул в пучке происходят вследствие случайно неравномерного вылета активных молекул

из источника молекулярного пучка и по существу представляют собой дробовой шум молекулярного пучка (1958 [5, 21], 1964 [17]). Поэтому функцию $N^0(t)$ можно положить равной

$$N^0(t) = N_{00} + M(t), \quad (12.2.3)$$

где $N_{00} = \langle N^0(t) \rangle$ — среднее значение плотности активных молекул на входе в резонатор, а $M(t)$ — флуктуации плотности.

Таким образом, полные уравнения движения молекулярного генератора, учитывающие источники шумов, принимают вид:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 E}{dt^2} + \frac{\omega_1}{Q} \frac{dE}{dt} + \omega_1^2 E &= -4\pi \frac{d^2 P}{dt^2} + \omega_1^2 E_{\text{фл}}(t), \\ \frac{d^2 P}{dt^2} + \frac{2}{\tau_0} \frac{dP}{dt} + \left(\omega_{21}^2 + \frac{1}{\tau_0^2} \right) P &= -\omega_{21}^2 a N E, \\ \frac{dN}{dt} + \frac{1}{\tau_0} (N - N_{00}) &= d E \left(\frac{dP}{dt} + \frac{P}{\tau_0} \right) + \frac{1}{\tau_0} M(t), \end{aligned} \quad (12.2.4)$$

где обозначено $a = 2|\mu_{21}|^2/(\hbar\omega_{21})$, $d = 2/\hbar\omega_{21}$.

Приведем эти уравнения к нашему обычному «каноническому» виду. Введем относительную расстройку между частотой перехода и собственной частотой резонатора $\Delta = (\omega_{21}^2 - \omega_1^2)/\omega_{21}^2$, добротность молекулярного контура (молекулярного пучка) $Q_{\text{л}} = \omega_{21}\tau_0/2$, полосу резонатора $\Pi = \omega_1/Q$ и полосу молекулярного контура $\Pi_{\text{л}} = \omega_{21}/Q_{\text{л}} = 2\tau_0^{-1}$. Тогда, обозначая $x = E$, $y = P$ из (12.2.4) получим:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_{21}^2 x &= F(x, \dot{x}, y, \dot{y}, N) + \omega_{21}^2 E_{\text{фл}}(t), \\ \frac{d^2 y}{dt^2} + \omega_{21}^2 y &= H(x, \dot{x}, y, \dot{y}, N), \\ \frac{dN}{dt} &= L(x, \dot{x}, y, \dot{y}, N) + \frac{1}{2} \Pi_{\text{л}} M(t), \end{aligned} \quad (12.2.5)$$

где

$$\begin{aligned} F(x, \dot{x}, y, \dot{y}, N) &= \Delta\omega_{21}^2 x - \Pi\dot{x} + 4\pi\omega_{21}^2 y, \\ H(x, \dot{x}, y, \dot{y}, N) &= -\Pi_{\text{л}}\dot{y} - \omega_{21}^2 a N x, \\ L(x, \dot{x}, y, \dot{y}, N) &= x\dot{y}d - \frac{1}{2} \Pi_{\text{л}} (N - N_{00}). \end{aligned} \quad (12.2.6)$$

Первые два уравнения (12.2.5) весьма близки к системе уравнений кварцевого генератора. Эта близость имеет место не

только по форме, но и по существу, ибо молекулярный генератор, так же как и кварцевый, представляет собой систему двух связанных регенерированных контуров с резко различными добротностями. Роль кварца в молекулярном генераторе играет молекулярный контур — молекулы возбужденного вещества. Третье уравнение (12.2.5) означает наличие *инерционной нелинейной связи* между этими контурами. С учетом этой связи молекулярный генератор становится автоколебательной системой с двумя с половиной степенями свободы.

Введем параметр малости $\mu = Q^{-1}$. Тогда нетрудно увидеть, что расстройка $\Delta \sim \mu$, а полосы контуров $\Pi = \omega_1 \mu$, $\Pi_{\text{л}} \sim \omega_1 \mu^2$. В силу этого правые части первых двух уравнений (12.2.5) имеют различные порядки малости. Кроме того, можно показать, что y на порядок меньше, чем x . Порядки малостей функций F , H , L равны соответственно $\omega_1^2 \mu$, $\omega_1^2 \mu^2$, $\omega_1 \mu^2$.

5. Решение уравнений (12.2.5) можно было бы искать в виде, аналогичном (7.1.2); в этом случае, однако, анализ получается достаточно громоздким, особенно при исследовании флуктуационных уравнений. Целесообразно решение уравнений (12.2.5) искать в следующем виде:

$$\begin{aligned} x &= R \cos \psi', & y &= B \cos (\psi' + \Phi), \\ \dot{x} &= -\omega_{21} R \sin \psi', & \dot{y} &= -\omega_{21} B \sin (\psi' + \Phi), \end{aligned} \quad \psi' = \omega_{21} t + \vartheta. \quad (12.2.7)$$

Здесь фаза Φ есть фазовый угол между гармоническими векторами электрического поля и поляризации. Амплитуды R , B фазы ϑ и Φ представляют собой новые переменные.

Подставляя (12.2.7) в первые два уравнения (12.2.5) нетрудно получить следующие точные уравнения для новых переменных:

$$\begin{aligned} \frac{dR}{dt} &= -\frac{1}{\omega_{21}} [F(R \cos \psi', \dots) + \omega_{21}^2 E_{\text{фл}}(t)] \sin \psi', \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= -\frac{1}{\omega_{21} R} [F(R \cos \psi', \dots) + \omega_{21}^2 E_{\text{фл}}(t)] \cos \psi', \\ \frac{dB}{dt} &= -\frac{1}{\omega_{21}} H(R \cos \psi', \dots) \sin (\psi' + \Phi), \\ \frac{d(\vartheta + \Phi)}{dt} &= -\frac{1}{\omega_{21} B} H(R \cos \psi', \dots) \cos (\psi' + \Phi). \end{aligned}$$

Правые части этих уравнений, так же как и правая часть последнего уравнения (12.2.5), являются малыми величинами, поэтому к этим уравнениям можно применить метод усреднения и

с помощью (12.2.6) получить следующие уравнения первого приближения:

$$\begin{aligned}\frac{dR}{dt} &= -\frac{1}{2} \Pi R + 2\pi\omega_{21} B \sin \Phi - \frac{\omega_{21}}{2} a_s(t), \\ \frac{d\Phi}{dt} &= -\frac{\Delta\omega_{21}}{2} - 2\pi\omega_{21} \frac{B}{R} \cos \Phi - \frac{\omega_{21}}{2R} a_c(t), \\ \frac{dB}{dt} &= -\frac{1}{2} \Pi_\perp B + \frac{1}{2} \omega_{21} a N R \sin \Phi, \\ \frac{d(\Phi + \Phi)}{dt} &= \frac{1}{2} \omega_{21} a N \frac{R}{B} \cos \Phi, \\ \frac{dN}{dt} &= -\frac{1}{2} \Pi_\perp (N - N_{00}) - \frac{1}{2} d\omega_{21} B R \sin \Phi + \frac{1}{2} \Pi_\perp m_0(t).\end{aligned}\tag{12.2.8}$$

Здесь обозначено:

$$\begin{aligned}a_s(t) &= -e_\perp(t) \cos \varphi + e_\parallel(t) \sin \varphi, \\ a_c(t) &= e_\parallel(t) \cos \varphi + e_\perp(t) \sin \varphi, \\ m_0(t) &= \frac{1}{T_{21}} \int_{t-T_{21}}^t M(\xi) d\xi.\end{aligned}\tag{12.2.9}$$

Случайные функции $e_\parallel(t)$, $e_\perp(t)$ выражаются через $E_{\text{фл}}(t)$ аналогично (5.2.15).

Рассмотрим прежде всего стационарный режим молекулярного генератора. Положим в (12.2.8) флуктуационные воздействия равными нулю. Тогда легко получить следующие уравнения для стационарных значений R_0 , B_0 , N_0 , Φ_0 и поправки на частоту $\Delta\omega_0 = (d\Phi/dt)_0$:

$$\begin{aligned}R_0 &= 4\pi \frac{\omega_{21}}{\Pi} B_0 \sin \Phi_0, \\ \Delta\omega_0 &= -\frac{1}{2} \Delta\omega_{21} - 2\pi\omega_{21} \frac{B_0}{R_0} \cos \Phi_0, \\ B_0 &= \frac{\omega_{21}}{\Pi_\perp} a N_0 R_0 \sin \Phi_0, \\ \Delta\omega_0 &= \frac{1}{2} \omega_{21} a N_0 \frac{R_0}{B_0} \cos \Phi_0, \\ N_{00} - N_0 &= \frac{d}{\Pi_\perp} \omega_{21} R_0 B_0 \sin \Phi_0.\end{aligned}\tag{12.2.10}$$

Разрешая эти уравнения, находим следующие стационарные значения:

$$R_0^2 = \frac{4\pi\Pi_{\text{л}}}{d\Pi} (N_{00} - N_0), \quad B_0^2 = \frac{R_0^2(1 + Q^2\Delta^2)}{16\pi^2 Q^2}, \quad aN_0 = \frac{1 + Q^2\Delta^2}{4\pi Q Q_{\text{л}}},$$

$$\Delta\omega_0 = -\frac{\omega_{21}}{2} \frac{Q\Delta}{Q_{\text{л}}} = -\frac{\Pi_{\text{л}}}{2} \Delta Q, \quad \text{ctg } \Phi_0 = -Q\Delta, \quad (12.2.11)$$

$$\sin \Phi_0 = (1 + Q^2\Delta^2)^{-1/2}.$$

Полученные выражения (12.2.11) позволяют сделать следующие выводы. Прежде всего, видно, что автоколебательный режим в молекулярном генераторе возможен только тогда, когда плотность активных молекул на входе резонатора является достаточно большой, так что выполняется неравенство

$$N_{00} > \frac{1 + Q^2\Delta^2}{aQ Q_{\text{л}} 4\pi} = \frac{\hbar\omega_{21}}{2|\mu_{21}|^2 Q_{\text{л}}} \frac{1 + Q^2\Delta^2}{4\pi Q}. \quad (12.2.12)$$

Тем самым это условие является не чем иным, как условием самовозбуждения молекулярного генератора. Во-вторых, легко видеть, что поправка на частоту, как и для кварцевого генератора, существует во втором порядке малости. Частота автоколебаний молекулярного генератора равна

$$\omega_0 = \omega_{21} \left(1 - \frac{1}{2} \Delta \frac{Q}{Q_{\text{л}}} \right) = \omega_{21} \left(1 - \frac{Q}{Q_{\text{л}}} \frac{\omega_{21} - \omega_1}{\omega_{21}} \right). \quad (12.2.13)$$

Как следует из (12.2.13), поправка на частоту обращается в нуль при расстройке $\Delta = 0$. Этот вывод получен на основании анализа первых приближений. Оценка последующих приближений показывает (см., например, [113]), что и при $\Delta = 0$ поправка на частоту существует (но уже в третьем порядке малости).

Нетрудно рассчитать мощность, которую пучок молекул отдает в резонатор. Если объем резонатора равен V , то мощность его потерь следующим образом выражается через амплитуду напряженности электрического поля и добротность резонатора:

$$P_{\text{г}} = \frac{\omega_0 R_0^2 V}{8\pi Q}. \quad (12.2.14)$$

Вводя в рассмотрение среднее число активных молекул, поступающих в резонатор в единицу времени,

$$\tilde{N} = \frac{N_{00} V}{\tau_0},$$

нетрудно найти

$$P_{\text{г}} = \frac{\tilde{N} \hbar \omega_{21}}{2} \left(1 - \frac{1 + Q^2\Delta^2}{4\pi a Q Q_{\text{л}} N_{00}} \right). \quad (12.2.15)$$

Если потери в резонаторе обусловлены в основном нагрузкой, то (12.2.15) дает выражение для мощности колебаний молекулярного генератора, выделяемой на нагрузке. Поскольку скобка в полученном выражении не превышает единицы, то легко видеть, что максимально возможная мощность на нагрузке равна $\tilde{N} \hbar \omega_{21}/2$ — половине мощности, запасенной в молекулярном пучке. Этот случай реализуется, если условие самовозбуждения (12.2.12) выполняется с большим запасом.

§ 12.3. Флуктуационные уравнения молекулярного генератора и устойчивость его автоколебаний

1. Учет теперь флуктуационные воздействия в системе молекулярного генератора $E_{\text{фл}}(t)$, $M(t)$. Эти случайные воздействия приводят к флуктуациям амплитуд, фаз и плотности активных молекул в резонаторе:

$$R = R_0 [1 + \alpha(t)], \quad B = B_0 [1 + \beta(t)], \quad N = N_0 [1 + n(t)], \\ \vartheta = \Delta\omega_0 t + \varphi(t), \quad \Phi = \Phi_0 + \psi(t).$$

Будем предполагать флуктуации $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $n(t)$, $\psi(t)$ достаточно малыми. Доказательство малости этих флуктуаций мы проведем ниже. Фазовые флуктуации автоколебаний $\varphi(t)$, как всегда, полагаем произвольными.

Задаваясь приращениями переменных в (12.2.8), используя (12.2.10) и (12.2.11), можно получить следующие флуктуационные уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{dt} &= \frac{\Pi}{2} [-\alpha - Q \Delta\psi + \beta] + \frac{\omega_{21}}{2R_0} [e_{\perp} \cos \varphi - e_{\parallel} \sin \varphi], \\ \frac{d\psi}{dt} &= \frac{\Pi}{2} [Q \Delta\alpha - \psi - Q \Delta\beta] + \frac{\omega_{21}}{2R_0} [e_{\parallel} \cos \varphi + e_{\perp} \sin \varphi], \\ \frac{d\beta}{dt} &= \frac{\Pi_{\perp}}{2} [\alpha - Q \Delta\psi - \beta + n], \\ \frac{dn}{dt} &= \frac{\Pi_{\perp}}{2} [-b\alpha + bQ \Delta\psi - b\beta - n] + \frac{\Pi_{\perp}}{2} \frac{m_0(t)}{N_0}, \end{aligned} \quad (12.3.1)$$

кроме того, уравнение для флуктуаций фаз

$$\frac{d\varphi}{dt} + \frac{d\psi}{dt} = \frac{\Pi_{\perp}}{2} [-Q \Delta\alpha - \psi + Q \Delta\beta - Q \Delta n]. \quad (12.3.2)$$

Здесь введено обозначение $b = (N_{00} - N_0)/N_0 > 0$.

Полученная система флуктуационных уравнений оказалась достаточно громоздкой, однако она обладает тем преимуществом, что правые части первых двух уравнений (12.3.1) имеют один порядок малости, а два последних — другой.

2. Если в (12.3.1) положить $e_{\parallel}(t)$, $e_{\perp}(t)$, $m_0(t)$ тождественно равными нулю, то получится система уравнений для отклонений R , Φ , B , N от стационарных значений, позволяющая рассмотреть вопрос об устойчивости стационарных значений R_0 , Φ_0 , B_0 , N_0 .

Характеристическое уравнение, соответствующее четырем уравнениям (12.3.1), которые могут рассматриваться независимо от (12.3.2), имеет вид

$$\begin{vmatrix} p_{11} + \lambda & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ p_{21} & p_{22} + \lambda & p_{23} & p_{24} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} + \lambda & p_{34} \\ p_{41} & p_{42} & p_{43} & p_{44} + \lambda \end{vmatrix} = 0, \quad (12.3.3)$$

где

$$p_{11} = -p_{13} = p_{22} = \frac{\Pi}{2}, \quad p_{12} = -p_{21} = p_{23} = \frac{\Pi}{2} Q\Delta,$$

$$p_{14} = p_{24} = 0, \quad -p_{31} = p_{33} = -p_{34} = p_{44} = \frac{\Pi_{\perp}}{2}, \quad p_{32} = \frac{\Pi_{\perp}}{2} Q\Delta,$$

$$p_{41} = p_{43} = \frac{\Pi_{\perp}}{2} b, \quad p_{42} = -\frac{\Pi_{\perp}}{2} bQ\Delta.$$

Будет иметь место устойчивость установившихся значений R_0 , Φ_0 , B_0 , N_0 , если все корни характеристического уравнения, которое можно записать также в виде

$$\lambda^4 + a_3\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0, \quad (12.3.4)$$

будут иметь отрицательные вещественные части. Согласно критерию Рауса—Гурвица, все корни уравнения (12.3.4) будут иметь отрицательные вещественные части в том и только в том случае, если

$$a_0 > 0, \quad a_3 > 0, \quad a_3a_2 - a_1 > 0, \quad a_1(a_3a_2 - a_1) - a_3^2a_0 > 0. \quad (12.3.5)$$

Раскрывая определитель (12.3.3), нетрудно получить следующие значения для коэффициентов уравнения (12.3.4):

$$\begin{aligned} a_3 &= p_{11} + p_{22} + p_{33} + p_{44}, \\ a_2 &= \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p_{11} & p_{13} \\ p_{31} & p_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p_{11} & p_{14} \\ p_{41} & p_{44} \end{vmatrix} + \\ &\quad + \begin{vmatrix} p_{22} & p_{23} \\ p_{32} & p_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p_{22} & p_{24} \\ p_{42} & p_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p_{33} & p_{34} \\ p_{43} & p_{44} \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

$$a_1 = P_{11} + P_{22} + P_{33} + P_{44},$$

$$a_0 = \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} \\ p_{41} & p_{42} & p_{43} & p_{44} \end{vmatrix},$$

где P_{ij} — алгебраическое дополнение элемента p_{ij} .

До сих пор мы не накладывали никаких условий на соотношение добротности Q и $Q_{\text{л}}$. Для любого реального молекулярного генератора имеет место неравенство $Q \ll Q_{\text{л}}$ и тем самым $\Pi \gg \Pi_{\text{л}}$. Считая, таким образом, что $\Pi_{\text{л}}$ имеет высший порядок малости по сравнению с Π ($\gamma = \Pi_{\text{л}}/\Pi \ll 1$), нетрудно получить следующие значения коэффициентов характеристического уравнения:

$$a_3 = \Pi, \quad a_2 = \left(\frac{\Pi}{2}\right)^2 (1 + Q^2 \Delta^2), \quad a_1 = \left(\frac{\Pi}{2}\right)^2 \frac{\Pi_{\text{л}}}{2} (1 + Q^2 \Delta^2),$$

$$a_0 = \left(\frac{\Pi}{2}\right)^2 \left(\frac{\Pi_{\text{л}}}{2}\right)^2 (1 + Q^2 \Delta^2) 2b. \quad (12.3.6)$$

Если учесть порядки малости этих коэффициентов, то условия устойчивости (12.3.5) принимают вид

$$a_3 > 0, \quad a_2 > 0, \quad a_1 > 0, \quad a_0 > 0.$$

Легко видеть, что эти условия удовлетворяются автоматически, если $b > 0$, т. е. если в молекулярном генераторе существуют автоколебания. Таким образом, мы получили, что автоколебания рассматриваемого молекулярного генератора устойчивы всегда [122*].

Для последующего нам понадобятся значения корней характеристического уравнения. Учитывая порядки малости коэффициентов (12.3.6), уравнение (12.3.4) можно привести к следующему виду:

$$\lambda^4 + a_3 \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 \approx (\lambda^2 + a_3 \lambda + a_2) \left(\lambda^2 + \frac{a_1}{a_2} \lambda + \frac{a_0}{a_2} \right) = 0.$$

Тем самым для четырех корней характеристического уравнения имеем два уравнения:

$$\lambda^2 + a_3 \lambda + a_2 = \lambda^2 + \Pi \lambda + \left(\frac{\Pi}{2}\right)^2 (1 + Q^2 \Delta^2) = 0,$$

$$\lambda^2 + \frac{a_1}{a_2} \lambda + \frac{a_0}{a_2} = \lambda^2 + \frac{\Pi_{\text{л}}}{2} \lambda + \left(\frac{\Pi_{\text{л}}}{2}\right)^2 2b = 0. \quad (12.3.7)$$

*) Полученное условие устойчивости автоколебаний $b > 0$ является приближенным. Более точный анализ [123] приводит к следующему условию устойчивости $0 < b < (1 + 3\gamma + 2\gamma^2)/(\gamma - 2\gamma^2)$. Поскольку, однако, $\gamma \ll 1$, то дополнительное условие сводится к $b < 1/\gamma$, что заведомо выполняется для всех реальных молекулярных генераторов.

Корни первого уравнения равны

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\Pi}{2} \pm j\Omega_0, \quad \Omega_0 = \frac{\omega_{21}\Delta}{2} = \frac{\Pi}{2} Q\Delta = \omega_{21} - \omega_1.$$

Вид корней второго уравнения зависит от соотношения N_{00} и N_0 . Если $N_0 < N_{00} < \frac{9}{8} N_0$ ($b < \frac{1}{8}$), то корни вещественны и равны

$$\lambda_{3,4} = -\frac{\Pi_L}{4} \left[1 \mp \sqrt{\frac{9N_0 - 8N_{00}}{N_0}} \right] = \frac{\Pi_L}{4} [1 \mp \sqrt{1 - 8b}].$$

Если $N_{00} > \frac{9}{8} N_0$ ($b > \frac{1}{8}$), корни становятся комплексными.

$$\lambda_{3,4} = -\frac{\Pi_L}{4} \pm j\Omega_1, \quad \Omega_1 = \frac{\Pi_L}{4} \sqrt{8b - 1}. \quad (12.3.8)$$

Таким образом, первые два корня уравнения имеют порядок $\omega_{21}\mu$, вторые два $\sim \omega_{21}\mu^2$.

3. Уравнение (12.3.2) показывает, что устойчивость R_0 , Φ_0 , B_0 , N_0 ведет к исчезновению со временем производной $d\varphi/dt$. Тем самым фаза автоколебания φ становится неопределенной и флуктуационные воздействия могут уводить ее сколь угодно далеко от нулевого начального значения. Поэтому, даже не решая уравнений (12.3.1) и (12.3.2), можно утверждать, что будет иметь место уширение спектральной линии молекулярного генератора.

Полученная устойчивость значений R_0 , Φ_0 , B_0 , N_0 позволяет утверждать, что интенсивности флуктуаций $\langle \alpha^2 \rangle$, $\langle \beta^2 \rangle$, $\langle \psi^2 \rangle$, $\langle n^2 \rangle$ являются при достаточно малых флуктуационных воздействиях $E_{\text{фл}}(t)$, $M(t)$, достаточно малыми. Тем самым линеаризация уравнений (12.2.8) по флуктуациям α , β , ψ , n является законной, если флуктуационные воздействия $E_{\text{фл}}(t)$, $M(t)$ достаточно малы. Оценки интенсивностей указанных флуктуаций будут даны в следующем параграфе.

§ 12.4. Естественные флуктуации молекулярного генератора

1. Полученные флуктуационные уравнения (12.3.1) являются нелинейными по отношению к фазовым флуктуациям φ , поскольку мы не ограничиваемся рассмотрением малых φ . Однако если учесть, что функция $E_{\text{фл}}(t)$, являющаяся сторонним тепловым флуктуационным электрическим полем, представляет собой достаточно широкополосный процесс, то

$$e_{\parallel}(t) = \frac{1}{T_0} \int_{t-T_0}^t 2E_{\text{фл}}(u) \cos \omega_0 u \, du,$$

$$e_{\perp}(t) = -\frac{1}{T_0} \int_{t-T_0}^t 2E_{\text{фл}}(u) \sin \omega_0 u \, du,$$

согласно § 5.2, можно считать дельта-коррелированными, взаимно независимыми случайными процессами. Это дает основание применить к первым двум уравнениям (12.3.1) метод статистической эквивалентности. Можно показать, что применение этого метода позволяет указанные уравнения заменить другими, в правых частях которых взято значение $\varphi=0$. Тем самым окончательные флуктуационные уравнения, которые мы будем анализировать, принимают следующий вид:

$$\begin{aligned}\frac{d\alpha}{dt} &= \frac{\Pi}{2} [-\alpha - Q \Delta\psi + \beta] + f_2(t), \\ \frac{d\psi}{dt} &= \frac{\Pi}{2} [Q \Delta\alpha - \psi - Q \Delta\beta] + f_1(t), \\ \frac{d\beta}{dt} &= \frac{\Pi_{\perp}}{2} [\alpha - Q \Delta\psi - \beta + n], \\ \frac{dn}{dt} &= \frac{\Pi_{\perp}}{2} [-b\alpha + bQ \Delta\psi - b\beta - n] + f_3(t).\end{aligned}\tag{12.4.1}$$

Здесь введены обозначения:

$$f_1(t) = \frac{\omega_{21}}{2R_0} e_{\parallel}(t), \quad f_2(t) = \frac{\omega_{21}}{2R_0} e_{\perp}(t), \quad f_3(t) = \frac{\Pi_{\perp}}{2} \frac{m_0(t)}{N_0}.$$

К уравнениям (12.4.1) следует добавить уравнение для флуктуаций фазы электрического поля (12.3.2).

2. Прежде чем приступить к решению флуктуационных уравнений, отыщем спектральные плотности взаимно независимых случайных функций f_1, f_2, f_3 . Начнем с функций $f_1(t), f_2(t)$, порождаемых случайным электрическим полем $E_{\text{фл}}(t)$.

Стороннее флуктуационное электрическое поле $E_{\text{фл}}(t)$ генерируется поверхностной ЭДС тепловых шумов потерь резонатора, и можно полагать, что оно не зависит от наличия молекулярного пучка внутри резонатора (для простоты рассмотрения шумовым излучением пучка молекул — спонтанным излучением пучка — будем пренебрегать *). В этом случае уравнение случайного электрического поля резонатора, возбуждаемого сторонним электрическим флуктуационным полем, будет иметь вид

$$\ddot{E} + \frac{\omega_1}{Q} \dot{E} + \omega_1^2 E = \omega_1^2 E_{\text{фл}}(t).$$

Задача нахождения спектральной плотности $E_{\text{фл}}(t)$ может быть решена по-разному, можно, например, решать ее электродинамически (см. [22, 129]). Мы, однако, поступим существенно проще (хотя, разумеется, менее строго), воспользовавшись аналогией с колебательным контуром.

*) Относительно роли спонтанного излучения см. (1959 [9]), [127, 128].

Если рассмотреть эквивалентный колебательный контур, то для напряжения на конденсаторе будем иметь

$$\ddot{U} + \frac{\omega_1}{Q} \dot{U} + \omega_1^2 U = \omega_1^2 \mathcal{E}_\tau(t),$$

где теперь $\mathcal{E}_\tau(t)$ есть ЭДС тепловых шумов активного сопротивления контура r , спектральная плотность которой известна и она равна (см. (3.1.6))

$$S_\tau(\omega) = \frac{1}{\pi} r \frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/kT} - 1} \equiv \frac{1}{\pi} r \Theta(\omega, T).$$

Величины E и U пропорциональны: $U = El$, где параметр l имеет размерность длины и является одним из характерных размеров резонатора. Следовательно, в силу линейности системы $\mathcal{E}_\tau(t) = E_{\text{фл}}(t)l$. Тем самым спектральная плотность мощности $E_{\text{фл}}(t)$ равна

$$S_{\text{фл}}(\omega) = \frac{r \Theta(\omega, T)}{\pi l^2}.$$

Для простоты в качестве резонатора можно рассмотреть внутренний объем плоского конденсатора. Тогда очевидно, что l есть не что иное, как расстояние между пластинами конденсатора. Емкость этого конденсатора равна (Σ — площадь пластин)

$$C = \Sigma / 4\pi l.$$

Отсюда имеем $l^2 = V / 4\pi C$, где V — объем резонатора. Используя это соотношение, легко получить следующее значение спектральной плотности мощности флуктуационного стороннего поля:

$$S_{\text{фл}}(\omega) = \frac{4\Theta(\omega, T)}{VQ\omega_0}.$$

Заметим, что точный расчет для произвольного резонатора также приводит к этой формуле.

Если $\hbar\omega \ll kT$, то

$$S_{\text{фл}}(\omega) = \frac{4kT}{VQ\omega_0}.$$

Используя (5.2.26), находим, что спектральные плотности статистически независимых функций $e_{\parallel}(t)$, $e_{\perp}(t)$ равны

$$S_{\parallel}(\Omega) = S_{\perp}(\Omega) = \frac{8}{VQ\omega_0} \Theta(\omega_{21}, T).$$

Следовательно, спектральные плотности случайных функций $f_1(t)$ и $f_2(t)$ одинаковы и равны

$$S_0 = \frac{2\omega_{21}^2}{R_0^2 V Q \omega_0} \Theta(\omega_{21}, T).$$

Используя (12.2.14), получаем окончательное выражение

$$S_0 = \frac{\omega_{21}^2}{4\pi Q^2} \frac{\Theta(\omega_{21}, T)}{P_r} = \left(\frac{\Pi}{2}\right)^2 \frac{\Theta}{\pi P_r}. \quad (12.4.2)$$

3. Обратимся теперь к случайной функции $f_3(t)$ и найдем ее спектральную плотность. Напомним, что функция $N^0(t)$ представляет собой мгновенное значение плотности активных молекул в резонаторе в отсутствие поля, и нетрудно понять, что она равна суперпозиции случайно возникающих прямоугольных импульсов, имеющих амплитуду $1/V$ и длительность θ . Каждый такой импульс соответствует пролету через резонатор в течение времени θ одной активной молекулы. Величина θ есть время жизни активной молекулы в резонаторе, эта величина является случайной с заданным вероятностным распределением $W(\theta)$. Среднее число активных молекул, поступающих в резонатор в единицу времени, мы рассматривали ранее, оно было равно $\tilde{N} = N_{00}V/\tau_0$. Полагая, что поступление активных молекул в резонатор подчиняется закону Пуассона, естественно принять, что

$$W(\theta) = \tau_0^{-1} \exp[-\theta/\tau_0].$$

Теперь уже нетрудно найти спектральные характеристики флуктуаций плотности активных молекул $M(t)$. Случайную функцию $N^0(t)$ представим как

$$N^0(t) = \sum_k m(t - t_k), \quad m(t) = \frac{1(t) - 1(t - \theta)}{V}.$$

Тогда, согласно (1.4.7), как и должно быть (см. (12.2.3)),

$$\langle N^0(t) \rangle = \tilde{N} \left\langle \int_{-\infty}^{+\infty} m(t - t_k) dt \right\rangle = \tilde{N} \langle \theta \rangle V^{-1} = \tilde{N} \tau_0 V^{-1} = N_{00}.$$

Функция корреляции $M(t)$ равна, согласно (1.4.8) ($\tau > 0$),

$$\begin{aligned} \Phi_M(\tau) &= \tilde{N} \left\langle \int_{-\infty}^{+\infty} m(t - t_k) m(t + \tau - t_k) dt \right\rangle = \\ &= \tilde{N} V^{-2} \int_{\tau}^{\infty} (\theta - \tau) W(\theta) d\theta = \frac{\tilde{N} \tau_0}{V^2} e^{-\frac{\tau}{\tau_0}}. \end{aligned}$$

Следовательно, спектральная плотность мощности флуктуаций $M(t)$ будет равна

$$S_M(\Omega) = \frac{\tilde{N} \tau_0^2}{\pi V^2 (1 + \Omega^2 \tau_0^2)}.$$

Ширина спектра $M(t)$ равна $\Pi_{\text{л}} = 2/\tau_0$. Поскольку для молекулярного генератора $Q_{\text{л}} = \frac{\omega_0 \tau_0}{2} \gg 1$, то очевидно, что ширина спектра дробовых шумов молекулярного пучка много меньше частоты автоколебаний молекулярного генератора. Это значит, что дробовой шум в молекулярном генераторе является медленным шумом. Если учесть, что $N^0(t)$ входит в уравнение молекулярного генератора как некоторый параметр, то $M(t)$ есть не что иное, как флуктуации параметра, и тогда медленность $M(t)$ по сравнению с $\cos \omega_0 t$ следует рассматривать как обычно принимаемое нами условие медленности флуктуаций параметров по сравнению с $\cos \omega_0 t$.

С другой стороны, медленность дробового шума молекулярного пучка в молекулярном генераторе аналогична медленности дробового шума в магнетроне. В обоих случаях указанная медленность обязана большому значению времени пролета активных частиц в резонаторе по сравнению с периодом автоколебаний.

Поскольку спектральная плотность $S_M(\Omega)$ практически равна нулю на частоте автоколебаний ω_0 , то влияние флуктуаций $M(t)$ на флуктуации частоты автоколебаний $\nu(t)$ возможно только как эффект флуктуаций параметра. Поскольку же, с другой стороны, поправка на частоту автоколебаний $\Delta\omega_0$ не зависит от N_{00} , то становится очевидным, что флуктуации плотности активных молекул в резонаторе, или, говоря по-другому, дробовой шум молекулярного пучка, не может непосредственно привести к уширению спектральной линии колебания, приводя лишь к амплитудным флуктуациям. Влияние $M(t)$ на $\nu(t)$ может иметь место только через амплитудные флуктуации, т. е. фактически из-за неизохронности молекулярного генератора.

Нетрудно видеть, что вследствие $\omega_0 \gg \Pi_{\text{л}}$ можно полагать, (см. (12.2.9)), что $m_0(t) = M(t)$. Тогда, используя (12.2.15), можно показать, что спектральная плотность медленной случайной функции $f_3(t)$ будет равна

$$S_3(\Omega) = \left(\frac{\Pi_{\text{л}}}{2}\right)^2 \frac{b(b+1)}{2\pi(1+\Omega^2\tau_0^2)} \frac{\hbar\omega_{21}}{P_{\text{г}}}. \quad (12.4.3)$$

Сравнивая полученное выражение с (12.4.2), легко видеть, что в то время как $f_1(t)$ и $f_2(t)$ являются быстрыми, достаточно интенсивными случайными функциями, функция $f_3(t)$ даже при $b \approx 1$ и $\hbar\omega_{21} \approx kT$ много медленнее первых и имеет значение спектральной плотности при $\Omega=0$ на два порядка меньшее, чем для первых двух.

4. Перейдем теперь к решению уравнений (12.4.1) и (12.3.2). Хотя основной интерес для нас представляют флуктуации

частоты и амплитуды электрического поля, являющегося «выходной координатой» молекулярного генератора, все же необходимо решать полную систему уравнений (12.4.1), ибо, не отыскав флуктуации $\psi(t)$, $\beta(t)$ и $n(t)$, невозможно найти $\alpha(t)$ и $v(t) = d\varphi/dt$.

Если ставить задачу отыскания *точных* значений $\alpha(t)$, $\psi(t)$, $\beta(t)$, $n(t)$ и их спектральных плотностей, то очевидна необходимость точного решения всех флуктуационных уравнений (12.4.1). Даже для случая системы трех флуктуационных уравнений первого порядка получение точных значений искоемых спектральных плотностей является чрезвычайно громоздкой процедурой. Тем более это является затруднительным в случае уравнений (12.4.1). Поэтому практически целесообразным будем отыскание хотя бы приближенных значений спектральных плотностей, сохраняющих при этом свои основные черты.

Легко видеть, что правые части первых двух уравнений (12.4.1) по абсолютной величине много больше правых частей оставшихся двух уравнений. Это значит, что флуктуации $\alpha(t)$, $\psi(t)$ являются быстрыми по сравнению с $\beta(t)$ и $n(t)$. Это ведет к тому, что за время, характерное для изменений $\alpha(t)$, $\psi(t)$, величины $\beta(t)$ и $n(t)$ остаются практически постоянными, а с другой стороны, при рассмотрении больших промежутков времени, характерных для $\beta(t)$ и $n(t)$, флуктуации $\alpha(t)$ и $\psi(t)$ можно считать «квазистатически следящими» за $\beta(t)$ и $n(t)$. Все это позволяет использовать для решения флуктуационных уравнений (12.4.1) метод, примененный выше в гл. 7 в аналогичных обстоятельствах.

Перепишем первые два уравнения (12.4.1) в виде

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{dt} + \frac{\Pi}{2}(\alpha + Q \Delta\psi) &= \frac{\Pi}{2}\beta + f_2(t), \\ \frac{d\psi}{dt} + \frac{\Pi}{2}(\psi - Q \Delta\alpha) &= -\frac{\Pi}{2}Q \Delta\beta + f_1(t), \end{aligned} \quad (12.4.4)$$

где будем полагать известными характеристики правых частей. Тем самым для $\alpha(t)$ и $\psi(t)$ мы получили систему всего лишь двух уравнений, представляющих собой уравнения для «быстрых переменных».

При рассмотрении уравнений «медленных переменных» $\beta(t)$, $n(t)$ мы имеем последнюю пару уравнений (12.4.1) и следующие уравнения для квазистатических $\alpha(t)$ и $\psi(t)$:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\Pi}{2}[-\alpha - Q \Delta\psi + \beta] + f_2(t), \\ 0 &= \frac{\Pi}{2}[Q \Delta\alpha - \psi - Q \Delta\beta] + f_1(t). \end{aligned}$$

Отсюда нетрудно найти $\alpha(t)$ и $\psi(t)$:

$$\alpha(t) = \beta(t) + \frac{f_2 - Q \Delta f_1}{\frac{\Pi}{2} (1 + Q^2 \Delta^2)}, \quad \psi(t) = \frac{f_1 + Q \Delta f_2}{\frac{\Pi}{2} (1 + Q^2 \Delta^2)}. \quad (12.4.5)$$

Эти значения $\alpha(t)$ и $\psi(t)$ представляют собой медленные компоненты быстрых флуктуаций $\alpha(t)$ и $\psi(t)$. Для получения окончательных уравнений для $\beta(t)$ и $n(t)$ достаточно теперь (12.4.5) подставить во вторую пару уравнений (12.4.1). Эти приближенные уравнения примут следующий вид:

$$\frac{d\beta}{dt} = \frac{\Pi_{\lambda}}{2} n + \gamma F, \quad \frac{dn}{dt} = -\frac{\Pi_{\lambda}}{2} 2b\beta - \frac{\Pi_{\lambda}}{2} n - \gamma b F + f_3, \quad (12.4.6)$$

где обозначено

$$F = \frac{f_2 (1 - Q^2 \Delta^2) - 2Q \Delta f_1}{1 + Q^2 \Delta^2}.$$

Эти уравнения легко могут быть теперь решены, и нетрудно получить следующие выражения для $\beta(t)$ и $n(t)$ (здесь введен оператор дифференцирования $\lambda \equiv d/dt$):

$$\beta(t) = \frac{\lambda \gamma F + \frac{\Pi_{\lambda}}{2} (1 - b) \gamma F + \frac{\Pi_{\lambda}}{2} f_3}{\lambda^2 + \frac{\Pi_{\lambda}}{2} \lambda + \left(\frac{\Pi_{\lambda}}{2}\right)^2 2b}, \quad (12.4.7)$$

$$n(t) = \frac{\lambda f_3 - \lambda \gamma b F - \frac{\Pi_{\lambda}}{2} 2b \gamma F}{\lambda^2 + \frac{\Pi_{\lambda}}{2} \lambda + \left(\frac{\Pi_{\lambda}}{2}\right)^2 2b}. \quad (12.4.8)$$

Применяя к (12.4.6) или к (12.4.7), (12.4.8) методы, изложенные в гл. 2, используя (12.4.2) и (12.4.3), нетрудно получить следующие значения спектральных плотностей $S_{\beta}(\Omega)$ и $S_n(\Omega)$:

$$S_{\beta}(\Omega) = \left(\frac{\Pi_{\lambda}}{2}\right)^2 \frac{\left[\Omega^2 + \frac{\Pi_{\lambda}^2}{4} (1 - b)^2\right] \Theta + \frac{\Pi_{\lambda}^2}{4} \frac{b(b+1)}{2} \frac{1}{1 + \Omega^2 \tau_0^2} \hbar \omega_{21}}{\left[\frac{\Pi_{\lambda}^2}{16} + (\Omega - \Omega_1)^2\right] \left[\frac{\Pi_{\lambda}^2}{16} + (\Omega + \Omega_1)^2\right]} \frac{1}{\pi P_r}, \quad (12.4.9)$$

$$S_n(\Omega) = \left(\frac{\Pi_{\lambda}}{2}\right)^2 \frac{\left[\Omega^2 + \frac{\Pi_{\lambda}^2}{4}\right] b^2 \Theta + \Omega^2 \frac{b(b+1)}{2} \frac{1}{1 + \Omega^2 \tau_0^2} \hbar \omega_{21}}{\left[\frac{\Pi_{\lambda}^2}{16} + (\Omega - \Omega_1)^2\right] \left[\frac{\Pi_{\lambda}^2}{16} + (\Omega + \Omega_1)^2\right]} \frac{1}{\pi P_r}. \quad (12.4.10)$$

При получении этих спектральных плотностей мы предположили, что условие самовозбуждения молекулярного генератора выполнено таким образом, что $b > 1/8$, второе уравнение (12.3.7) при

этом имеет комплексные корни. Значение Ω_1 дается формулой (12.3.8). Примерный вид спектральной плотности $S_\beta(\Omega)$ изображен на рис. 12.4.

Из (12.4.9) следует, во-первых, что ширина спектра амплитудных флуктуаций поляризации равна примерно $\frac{1}{2}\Pi_\perp$, во-вторых, что дробовой шум молекулярного пучка дает заметный

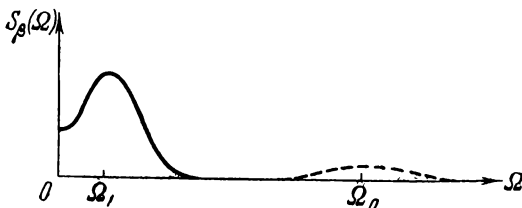


Рис. 12.4.

вклад в $\beta(t)$ по сравнению с тепловыми шумами резонатора лишь в том случае, если $kT < \hbar\omega_{21}$. Если частота молекулярного генератора такова, что $kT > \hbar\omega_{21}$, то основную роль играют только тепловые шумы резонатора.

Нетрудно видеть из (12.4.10), что спектр $n(t)$ по виду весьма близок к спектру амплитудных флуктуаций поляризации, он имеет такую же ширину и примерно такой же вид, включая и наличие максимума при $\Omega = \Omega_1$.

Теперь уже нетрудно оценить интенсивности флуктуаций $\beta(t)$ и $n(t)$. Прежде всего из (12.4.9) и (12.4.10), пренебрегая дробовыми шумами, находим

$$S_\beta(0) = \frac{(1-b)^2}{4b^2} \frac{\Theta}{\pi P_r}, \quad S_n(0) = \frac{\Theta}{\pi P_r}.$$

Считая затем, что полоса $\beta(t)$ и $n(t)$ равна $\sim \frac{1}{2}\Pi_\perp$, находим приближенно

$$\langle \beta^2 \rangle \approx \frac{(1-b)^2}{4b^2} \langle n^2 \rangle \approx 2S_\beta(0) \frac{\Pi_\perp}{2} = \frac{(1-b)^2}{4b^2} \frac{\Pi_\perp \Theta}{\pi P_r}.$$

Поскольку для всех реальных молекулярных генераторов $\Pi\Theta \ll \pi P_r$ и b не слишком мало, то условие малости флуктуаций $\beta(t)$ и $n(t)$ выполняется всегда.

Полученное выражение для спектральной плотности $S_\beta(\Omega)$ (и для $S_n(\Omega)$) является приближенным в том смысле, что учитываются только медленные (по сравнению с $\cos \Omega_0 t$) компоненты. На самом деле в составе $\beta(t)$ будут и быстрые компо-

ненты, однако их удельный вес в $\langle \beta^2 \rangle$ несуществен. Можно ожидать, что в спектре эти быстрые компоненты отразятся наличием некоторого максимума спектральной плотности $S_\beta(\Omega)$ на частоте Ω_0 , величина которого много меньше $S_\beta(0)$ (см. пунктирную кривую на рис. 12.4). Таким образом, полный спектр амплитудных флуктуаций поляризации напоминает спектр амплитудных флуктуаций кварцевого контура кварцевого генератора (ср. с кривой $A(\Omega)$ на рис. 7.5). Это подобие спектров не случайно, а закономерно, ибо как мы уже указывали, молекулярный генератор во многом подобен кварцевому и роль кварцевого контура в молекулярном генераторе играет пучок молекул. Лишние полстепени свободы у молекулярного генератора приводят (при $b > 1/8$) к существованию максимума у спектральных плотностей на частоте $\Omega = \Omega_1$.

5. Перейдем теперь к рассмотрению спектров быстрых переменных $\alpha(t)$ и $\psi(t)$. Решения уравнений (12.4.4) могут быть записаны в следующем виде:

$$\alpha(t) = \frac{\lambda \left(\frac{\Pi}{2} \beta + f_2 \right) + \left(\frac{\Pi}{2} \right)^2 (1 + Q^2 \Delta^2) \beta + \frac{\Pi}{2} (f_2 - Q \Delta f_1)}{\lambda^2 + \Pi \lambda + \left(\frac{\Pi}{2} \right)^2 (1 + Q^2 \Delta^2)}, \quad (12.4.11)$$

$$\psi(t) = \frac{\lambda \left(-\frac{\Pi}{2} Q \Delta \beta + f_1 \right) + \frac{\Pi}{2} (f_1 + Q \Delta f_2)}{\lambda^2 + \Pi \lambda + \left(\frac{\Pi}{2} \right)^2 (1 + Q^2 \Delta^2)}. \quad (12.4.12)$$

Эти выражения являются не окончательными. Для получения окончательных выражений для $\alpha(t)$ и $\psi(t)$ в (12.4.11) и (12.4.12) следует вместо $\beta(t)$ подставить (12.4.7). Полученные при этом формулы становятся весьма громоздкими, и их спектральный анализ является затруднительным. Целесообразнее поэтому поступить по-другому и в $\alpha(t)$ и $\psi(t)$ рассмотреть по отдельности медленные и быстрые компоненты.

Обратимся прежде всего к амплитудным флуктуациям электрического поля, представленным формулой (12.4.11). В числитель этого выражения входят β , f_1 , f_2 . Последние две функции являются широкополосными, в то время как функция $\beta(t)$ является узкополосной. Это обстоятельство позволяет найти примерное значение спектральной плотности $S_\alpha(\Omega)$, не подставляя (12.4.7) в (12.4.11). В самом деле, рассмотрим спектр $\alpha(t)$ отдельно для частот $\Omega \ll \frac{1}{2} \Pi$ и отдельно для частот $\Omega \gg \frac{1}{2} \Pi$.

Пусть $\Omega \ll \frac{1}{2} \Pi$. В этом случае нетрудно показать, что $\alpha(t)$ достаточно точно описывается первой формулой (12.4.5). На

основании этой формулы можно найти спектральную плотность:

$$S_{\alpha}(\Omega) = S_{\beta}(\Omega) + \frac{\Theta/\pi P_r}{1 + Q^2 \Delta^2} + \frac{\left(\frac{\Pi_{\lambda}}{2}\right)^2 b \left[\Omega^2 + 2 \left(\frac{\Pi_{\lambda}}{2}\right)^2 (1 - b) \right]}{\left[\frac{\Pi_{\lambda}^2}{16} + (\Omega - \Omega_1)^2 \right] \left[\frac{\Pi_{\lambda}^2}{16} + (\Omega + \Omega_1)^2 \right]} \frac{\Theta}{\pi P_r}. \quad (12.4.13)$$

Как следует из полученного выражения, спектр $\alpha(t)$ складывается из спектра $\beta(t)$, спектра, имеющего постоянную величину, связанного с f_1 и f_2 , и совместного спектра, обязанного

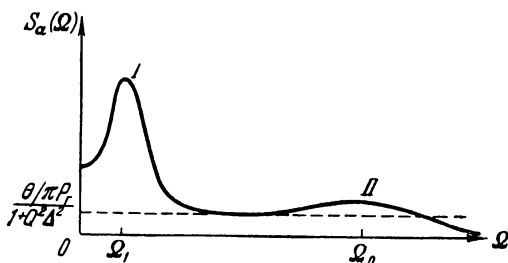


Рис. 12.5.

корреляции $\beta(t)$ с f_1 и f_2 . Примерный вид полученной спектральной плотности изображен на рис. 12.5 (кривая I). При $\Omega=0$

$$S_{\alpha}(0) = S_{\beta}(0) + \frac{(1 + \beta)/2b}{1 + Q^2 \Delta^2} \frac{\Theta}{\pi P_r}.$$

Пусть теперь $\Omega \gg \frac{1}{2} \Pi_{\lambda}$. В этом случае функцией $\beta(t)$ можно пренебречь по сравнению с $f_1(t)$, $f_2(t)$ и из (12.4.11) для $\alpha(t)$ получить

$$\alpha(t) = \frac{\lambda f_2 + \frac{\Pi}{2} f_2 - \frac{\Pi}{2} Q \Delta f_1}{\lambda^2 + \Pi \lambda + \left(\frac{\Pi}{2}\right)^2 (1 + Q^2 \Delta^2)}.$$

Отсюда находим спектральную плотность

$$S_{\alpha}(\Omega) = \frac{\left(\frac{\Pi}{2}\right)^2 \left[\Omega^2 + \left(\frac{\Pi}{2}\right)^2 (1 + Q^2 \Delta^2) \right]}{\left[\frac{\Pi^2}{4} + (\Omega - \Omega_0)^2 \right] \left[\frac{\Pi^2}{4} + (\Omega + \Omega_0)^2 \right]} \frac{\Theta}{\pi P_r}. \quad (12.4.14)$$

При $\Omega \rightarrow \infty$

$$S_{\alpha}(\Omega) \rightarrow \frac{\left(\frac{\Pi}{2}\right)^2}{\Omega^2} \frac{\Theta}{\pi P_r}.$$

Для $\Omega \ll \frac{1}{2} \Pi$ согласно (12.4.14) $S_\alpha(\Omega)$ равно $(1 + Q^2\Delta^2)^{-1} \Theta/\pi P_r$, т. е. совпадает, как и должно быть, со значением $S_\alpha(\Omega)$, данным формулой (12.4.13) для $\Omega \gg \frac{1}{2} \Pi$. Спектр, соответствующий (12.4.14), изображен на рис. 12.5 кривой II. Полный спектр $S_\alpha(\Omega)$ представлен всей кривой на рис. 12.5. Этот спектр имеет два максимума: на Ω_1 и на Ω_0 — и напоминает, как и следует ожидать, подобный спектр амплитудных флуктуаций анодного контура кварцевого генератора (ср. с кривой $B(\Omega)$ на рис. 7.5).

Теперь нетрудно оценить интенсивность амплитудных флуктуаций. По порядку величины

$$\langle \alpha^2 \rangle \approx S_\alpha(0) \Pi = S_\beta(0) \Pi + \frac{(1+b)/2b}{1+Q^2\Delta^2} \frac{\Pi \Theta}{\pi P_r}.$$

Поскольку, как уже упоминалось, для всех реальных молекулярных генераторов $\Pi \Theta \ll \pi P_r$, то $\langle \alpha^2 \rangle \ll 1$, если b не слишком мало. Учитывая, что случайная фаза $\psi(t)$ по своей величине и поведению близка к $\alpha(t)$ (см. (12.4.5), (12.4.11), (12.4.12)), становится очевидным, что и $\langle \psi^2(t) \rangle \ll 1$. Тем самым предположения о малости $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $n(t)$ и $\psi(t)$, принятые в начале § 12.3, являются обоснованными для любого реального молекулярного генератора.

6. Рассмотрим теперь флуктуации частоты поляризации, которые равны $\nu_p = \frac{d\varphi}{dt} + \frac{d\psi}{dt}$. На основании (12.3.2) имеем

$$-\nu_p(t) = \frac{\Pi_L}{2} \psi + \frac{\Pi_L}{2} Q \Delta (\alpha - \beta + n). \quad (12.4.15)$$

Начнем анализ этих флуктуаций с области частот $\Omega \ll \frac{1}{2} \Pi$. Используя (12.4.5), из (12.4.15) получаем

$$-\nu_p(t) = \gamma \frac{2Q\Delta f_2 + (1 - Q^2\Delta^2)f_1}{1 + Q^2\Delta^2} + \frac{\Pi_L}{2} Q \Delta n, \quad (12.4.16)$$

где $n(t)$ дается формулой (12.4.8). Спектр флуктуаций частоты поляризации равен согласно (12.4.16)

$$S_{\nu_p}(\Omega) = \left(\frac{\Pi_L}{2}\right)^2 \frac{\Theta}{\pi P_r} + \left(\frac{\Pi_L}{2}\right)^2 Q^2 \Delta^2 S_n(\Omega), \quad (12.4.17)$$

где $S_n(\Omega)$ дано формулой (12.4.10). Корреляционный член, соответствующий корреляции первого и второго слагаемого (12.4.16), равен нулю.

Для $\frac{1}{2} \Pi_L \ll \Omega \ll \frac{1}{2} \Pi$ из (12.4.17) легко получить

$$S_{\nu_p}(\Omega) = \left(\frac{\Pi_L}{2}\right)^2 \frac{\Theta}{\pi P_r}. \quad (12.4.18)$$

Обратимся теперь к частотам $\Omega \gg \frac{1}{2} \Pi_\lambda$, на которых узкополосными флуктуациями $\beta(t)$ и $n(t)$ можно пренебречь. Вместо (12.4.15) будем иметь

$$-v_p(t) = \frac{1}{2} \Pi_\lambda (\psi + Q \Delta \alpha),$$

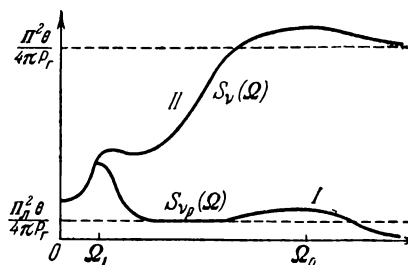
где $\alpha(t)$ и $\psi(t)$ получаются соответственно из (12.4.11) и (12.4.12) пренебрежением $\beta(t)$. Производя несложные вычисления, находим

$$-v_p(t) = \frac{\Pi_\lambda}{2} \frac{\left[\lambda + \frac{\Pi}{2} (1 - Q^2 \Delta^2) \right] f_1 + [\lambda + \Pi] Q \Delta f_2}{\lambda^2 + \Pi \lambda + \left(\frac{\Pi}{2} \right)^2 (1 + Q^2 \Delta^2)}.$$

Отсюда с помощью формул гл. 2 можно найти спектральную плотность

$$S_{v_p}(\Omega) = \left(\frac{\Pi_\lambda}{2} \right)^2 \left(\frac{\Pi}{2} \right)^2 \frac{(1 + Q^2 \Delta^2) \left[\Omega^2 + \left(\frac{\Pi}{2} \right)^2 (1 + Q^2 \Delta^2) \right]}{\left[\frac{\Pi^2}{4} + (\Omega - \Omega_0)^2 \right] \left[\frac{\Pi^2}{4} + (\Omega + \Omega_0)^2 \right]} \frac{\Theta}{\pi P_r}. \quad (12.4.19)$$

Если рассмотреть такие частоты, что $\frac{1}{2} \Pi_\lambda \ll \Omega \ll \frac{1}{2} \Pi$, то отсюда следует, как и должно быть, (12.4.18). Таким образом, совокупность формул (12.4.17) и (12.4.19) описывает спектральную плотность флуктуаций частоты поляризации во всем диапазоне частот Ω . При $\Omega \gg \frac{1}{2} \Pi$



$$S_{v_p}(\Omega) = \left(\frac{\Pi_\lambda}{2} \right)^2 \frac{\left(\frac{\Pi}{2} \right)^2}{\Omega^2} \frac{\Theta}{\pi P_r}.$$

При $\Omega \ll \frac{1}{2} \Pi_\lambda$

$$S_{v_p}(\Omega) = \left(\frac{\Pi_\lambda}{2} \right)^2 (1 + Q^2 \Delta^2) \frac{\Theta}{\pi P_r}. \quad (12.4.20)$$

Рис. 12.6.

График $S_{v_p}(\Omega)$ показан на рис. 12.6. Сравнивая полученный спектр флуктуаций частоты поляризации со спектром флуктуаций частоты кварцевого контура кварцевого генератора (см. рис. 7.6) нетрудно увидеть много общего. Различие между этими спектрами обязано различию между кварцевым и молекулярным генератором, а именно, во-первых, лишние полстепени свободы у молекулярного генератора приводят к возможности (при $b > 1/8$) максимума в районе $\Omega = \Omega_1$, и, во-вторых, поскольку спектраль-

ная плотность шума молекулярного пучка (см. 12.4.4)) практически исчезает для $\Omega \gg \frac{1}{2} \Pi$, то для этих частот собственных шумов молекулярного контура нет, и поэтому $S_v(\Omega) \rightarrow 0$ при $\Omega \rightarrow \infty$.

7. Практически бóльший интерес представляют флуктуации частоты электрического поля молекулярного генератора, ибо именно электрическое поле является «выходной координатой» генератора. Флуктуации частоты электрического поля $v(t)$ равны

$$v(t) = v_p(t) - \frac{d\psi}{dt} = -\frac{d\psi}{dt} - \frac{\Pi_\lambda}{2} \psi - \frac{\Pi_\lambda}{2} Q\Delta(\alpha - \beta + n).$$

Проводя анализ этого уравнения отдельно для первого ($\Omega \ll \frac{1}{2} \Pi$) и для второго ($\Omega \gg \frac{1}{2} \Pi$) частотных диапазонов, нетрудно аналогично предыдущему найти следующие значения спектральной плотности.

Для $\Omega \ll \frac{1}{2} \Pi$

$$S_v(\Omega) = \frac{\Omega^2 + \left(\frac{\Pi_\lambda}{2}\right)^2 (1 + Q^2\Delta^2)}{1 + Q^2\Delta^2} \frac{\Theta}{\pi P_r} + \left(\frac{\Pi_\lambda}{2}\right)^2 Q^2\Delta^2 S_n(\Omega) - \\ - \frac{b \left(\frac{\Pi_\lambda}{2}\right)^2 Q^2\Delta^2 \Omega^2 \left[\Omega^2 + 2(1-b) \left(\frac{\Pi_\lambda}{2}\right)^2 \right]}{(1 + Q^2\Delta^2) \left[\frac{\Pi_\lambda^2}{16} + (\Omega - \Omega_1)^2 \right] \left[\frac{\Pi_\lambda^2}{16} + (\Omega + \Omega_1)^2 \right]} \frac{\Theta}{\pi P_r}. \quad (12.4.21)$$

Для $\Omega \gg \frac{1}{2} \Pi$

$$S_v(\Omega) = \frac{\Omega^2 \left[\Omega^2 + \left(\frac{\Pi}{2}\right)^2 (1 + Q^2\Delta^2) \right] \left(\frac{\Pi}{2}\right)^2}{\left[\frac{\Pi^2}{4} + (\Omega - \Omega_0)^2 \right] \left[\frac{\Pi^2}{4} + (\Omega + \Omega_0)^2 \right]} \frac{\Theta}{\pi P_r}. \quad (12.4.22)$$

Если $\frac{1}{2} \Pi_\lambda \ll \Omega \ll \frac{1}{2} \Pi$, то обе формулы (12.4.21) и (12.4.22) дают значение

$$S_v(\Omega) = \frac{\Omega^2}{1 + Q^2\Delta^2} \frac{\Theta}{\pi P_r}.$$

При $\Omega \rightarrow 0$ из (12.4.21) получаем

$$S_v(0) = \left(\frac{\Pi_\lambda}{2}\right)^2 (1 + Q^2\Delta^2) \frac{\Theta}{\pi P_r}. \quad (12.4.23)$$

Заметим, что такое же значение получается и для $S_{v_p}(0)$ (см. (12.4.20)). Это обстоятельство не является удивительным, поскольку молекулярный генератор, оба его контура,

резонатор и молекулярный пучок представляют единую колебательную систему, в которой существуют автоколебания с единой частотой. Поэтому стабильность частоты автоколебаний, обусловленная низкочастотными флуктуациями $\nu(t)$, должна быть также одинаковой независимо от рассматриваемых переменных.

Более интересной с этой точки зрения является различие между $S_\nu(\Omega)$ и $S_{\nu_p}(\Omega)$, которое проявляется тем сильнее, чем выше Ω . Если при $\Omega \rightarrow \infty$ $S_{\nu_p}(\Omega) \rightarrow 0$, то, как легко получить из (12.4.22), $S_\nu(\Omega) \rightarrow \left(\frac{\Pi}{2}\right)^2 \frac{\Theta}{\pi P_r}$. Общий вид зависимости $S_\nu(\Omega)$ показан на рис. 12.6. Различие между $S_{\nu_p}(\Omega)$ и $S_\nu(\Omega)$ обязано слагаемому $d\varphi/dt$, или по существу тому, что, в то время как на высоких частотах шумы молекулярного контура практически отсутствуют, тепловые шумы резонатора существуют и обеспечивают сравнительно большое значение $S_\nu(\Omega)$ при $\Omega \gg \frac{1}{2} \Pi$.

Спадание $S_\nu(\Omega)$ при $\Omega \rightarrow 0$ обусловлено стабилизирующим действием молекулярного контура. Как видно из рис. 12.6, это стабилизирующее действие начинает сказываться на $\Omega \ll \frac{1}{2} \Pi$ и является наиболее эффективным на самых малых частотах. Причина этого заключается в том, что высокочастотный молекулярный контур обладает большим временем инерции, равным по порядку величины τ_0 , и поэтому только на достаточно малых частотах он оказывает свое стабилизирующее действие (ср. § 7.2).

Если рассмотреть совместные спектральные плотности $S_{\alpha\nu}^0(\Omega)$ и $S_{\alpha\nu}^1(\Omega)$, то, как показывает расчет, выражения для них получаются достаточно громоздкими, и поэтому мы их здесь приводить не будем. Отметим только то, что обе эти спектральные плотности пропорциональны Δ . Тем самым корреляция между флуктуациями амплитуды и частоты электрического поля имеет место только при ненулевой расстройке.

8. Обратимся, наконец, к ширине и форме спектральной линии молекулярного генератора.

Поскольку для спектральной плотности флуктуаций частоты выполняются, как легко проверить, условия малости $S_\nu(0)$ по сравнению с шириной спектра $S(\Omega)$, то, согласно § 4.5 и (12.4.23), естественная ширина спектральной линии молекулярного генератора равна

$$\Delta\Omega = \pi^2 S_\nu(0) = \pi^2 \left(\frac{\Pi_\Delta}{2}\right)^2 (1 + Q^2 \Delta^2) \frac{\Theta}{\pi P_r}. \quad (12.4.24)$$

Во всех предыдущих оценках мы полагали, что $Q\Delta$ может иметь порядок единицы, поэтому (12.4.24) показывает, что расстройка может существенно влиять на величину $\Delta\Omega$. Из полу-

ченной формулы следует также, что естественная ширина спектральной линии молекулярного генератора обусловлена только тепловыми шумами резонатора, что и подтверждает высказанное выше замечание о роли дробовых шумов молекулярного пучка.

В общем случае произвольной расстройки Δ форма спектральной линии молекулярного генератора является достаточно сложной. Она состоит из почти симметричного пика и сильно несимметричного пьедестала, обладающего целым рядом экстремумов, находящихся от центра линии на расстояниях порядка Ω_1 и Ω_0 . Ширина пика дается формулой (12.4.24), ширина пьедестала равна по порядку величины Π .

Если ограничиться случаем малой расстройки, когда $Q\Delta \ll 1$ и когда можно пренебречь корреляцией между амплитудными и частотными флуктуациями, то форма спектральной линии является симметричной и ее аналитическое выражение принимает более простой вид. Полагая $Q\Delta \ll 1$ и пренебрегая дробовыми шумами молекулярного пучка, можно найти следующие значения для спектральных плотностей флуктуаций амплитуды и частоты электрического поля в резонаторе молекулярного генератора, справедливые при любых соотношениях Ω и $\frac{1}{2}\Pi$, $\frac{1}{2}\Pi_\perp$:

$$S_\alpha(\Omega) = \frac{\left(\frac{\Pi}{2}\right)^2 \left[\frac{\Pi_\perp^2}{4} + (\Omega - \Omega_2)^2 \right] \left[\frac{\Pi_\perp^2}{4} + (\Omega + \Omega_2)^2 \right]}{\left[\Omega^2 + \frac{\Pi^2}{4} \right] \left[\frac{\Pi_\perp^2}{16} + (\Omega - \Omega_1)^2 \right] \left[\frac{\Pi_\perp^2}{16} + (\Omega + \Omega_1)^2 \right]} \frac{\Theta}{\pi P_r}, \quad (12.4.25)$$

$$S_\nu(\Omega) = \left(\frac{\Pi}{2}\right)^2 \frac{\Omega^2 + \left(\frac{\Pi_\perp}{2}\right)^2}{\Omega^2 + \left(\frac{\Pi}{2}\right)^2} \frac{\Theta}{\pi P_r}, \quad (12.4.26)$$

где $\Omega_2 = \frac{1}{2}\Pi_\perp \sqrt{b}$.

Из (12.4.25) следует, что $S_\alpha(\Omega)$, имея экстремумы на частотах Ω_1 и Ω_2 , спадает от $S_\alpha(0) = \frac{(1+b)^2}{4b^2} \frac{\Theta}{\pi P_r}$ до значений $\left[\left(\frac{\Pi}{2}\right)^2 / \Omega^2\right] \frac{\Theta}{\pi P_r}$ при $\Omega \gg \frac{1}{2}\Pi$. Ширина спектра амплитудных флуктуаций равна примерно Π . Спектральная плотность флуктуаций частоты плавно возрастает от $\frac{\Pi_\perp^2}{4} \frac{\Theta}{\pi P_r}$ до $\frac{\Pi^2}{4} \frac{\Theta}{\pi P_r}$ при изменении частоты от величин порядка Π_\perp до величин порядка Π . Весь ход $S_\nu(\Omega)$ подобен кривой II на рис. 12.6, лишенной максимумов, и хорошо показывает возрастание стабилизирующего

действия молекулярного контура на флуктуации частоты колебания резонатора при уменьшении Ω .

Поскольку в рассмотренном случае $\alpha(t)$ и $\nu(t)$ не коррелированы, что, согласно (4.6.2), форма спектральной линии колебания равна

$$W_x(\Omega) = \frac{R_0^2}{2\pi} \int_0^\infty \exp[-\chi(\tau)] \cos \Omega\tau d\tau + \frac{R_0^2}{2} S_\alpha(\Omega). \quad (12.4.27)$$

Используя (12.4.2) а также (III. 24), (III. 26), (III. 34), (III. 35), нетрудно найти функцию $\chi(\tau)$, соответствующую спектральной плотности (12.4.26) ($\tau > 0$):

$$\chi(\tau) = \Delta_\phi(0, \tau) = \pi S_0 \gamma^2 \tau + \frac{2\pi S_0}{\Pi} \left[1 - e^{-\frac{\Pi}{2} \tau} \right].$$

Отсюда, используя первые члены разложения (II. 13), легко определить значение интеграла в (12.4.27), равное

$$\frac{1}{\gamma^2} \frac{\left(\Omega^2 + \frac{1}{4} \Pi_\lambda^2 \right)}{[(\Delta\Omega/\pi)^2 + \Omega^2] \left[\Omega^2 + \frac{1}{4} \Pi^2 \right]} \frac{\Delta\Omega}{\pi},$$

где использовано обозначение для ширины спектральной линии колебания, равной в данном случае

$$\Delta\Omega = \pi^2 \gamma^2 S_0 = \pi^2 \left(\frac{\Pi_\lambda}{2} \right)^2 \frac{\Theta}{\pi P_r} = \frac{\pi \omega_{21}^2 \Theta}{4 Q_\lambda^2 P_r}. \quad (12.4.28)$$

Собирая теперь вместе все слагаемые формулы (12.4.27), получаем следующее окончательное выражение:

$$W_x(\Omega) = \frac{R_0^2}{2} \left\{ \frac{\pi \left(\Omega^2 + \frac{1}{4} \Pi_\lambda^2 \right) \frac{1}{4} \Pi^2}{[(\Delta\Omega/\pi)^2 + \Omega^2] \left[\Omega^2 + \frac{1}{4} \Pi^2 \right]} + \right. \\ \left. + \frac{\left(\frac{\Pi}{2} \right)^2 \left[\frac{\Pi_\lambda^2}{4} + (\Omega - \Omega_2)^2 \right] \left[\frac{\Pi_\lambda^2}{4} + (\Omega + \Omega_2)^2 \right]}{\left[\Omega^2 + \frac{\Pi^2}{4} \right] \left[\frac{\Pi_\lambda^2}{16} + (\Omega - \Omega_1)^2 \right] \left[\frac{\Pi_\lambda^2}{16} + (\Omega + \Omega_1)^2 \right]} \right\} \frac{\Theta}{\pi P_r}.$$

Такова форма спектральной линии молекулярного генератора при достаточно малой расстройке и в пренебрежении дробовыми шумами пучка молекул; как легко видеть, она действительно состоит из узкополосного пика шириной $\Delta\Omega$ и широкополосного пьедестала шириной Π .

В заключение приведем численную оценку естественной ширины спектральной линии молекулярного генератора на аммиаке для случая $Q\Delta \ll 1$. Полагая $\omega_{21} = 1,5 \cdot 10^{11}$ рад·гц, $\tau_0 = 2,5 \times 10^{-4}$ сек, $T = 300^\circ \text{K}$, $P_r = 10^{-10}$ вт, находим $\Pi_{\text{л}} = 0,8 \cdot 10^4$ гц и с помощью (12.4.28)

$$\Delta F = \frac{1}{2} \left(\frac{\Pi_{\text{л}}}{2} \right)^2 \frac{\theta}{P_r} \approx 3,2 \cdot 10^{-4} \text{ гц.}$$

Таким образом, относительная ширина естественной спектральной линии молекулярного генератора на аммиаке равна

$$\delta F \approx 1,35 \cdot 10^{-14}.$$

Представляет несомненный интерес сравнение ширины спектральной линии молекулярного генератора с шириной спектральной линии обычного LC -генератора. Если учесть, что мощность колебаний LC -генератора может быть записана как $P_r = R_0^2/2rQ^2$, то из (5.5.15) для LC -генератора с контуром в цепи сетки в пренебрежении дробовыми шумами легко получить

$$\Delta\Omega_{LC} = \frac{\pi\omega_1^2\theta}{4Q^2P_r},$$

что полностью совпадает с (12.4.28). Таким образом, естественная ширина спектральной линии, обязанная тепловым шумам, имеет одинаковый порядок величины (одинаковое значение при $Q\Delta \ll 1$) как для LC -генератора (с контуром добротностью $Q_{\text{л}}$), так и для молекулярного генератора.

Малое значение δF у молекулярного генератора на высоких частотах обусловлено, таким образом, *только высокой добротностью молекулярного контура* ($Q_{\text{л}} = 10^6 \div 10^7$), эффективно работающего на таких высоких частотах. Кроме того, следует отметить, что у молекулярного генератора отсутствует дробовой шум, что при прочих равных условиях является бесспорным преимуществом молекулярного генератора по сравнению с электронными генераторами, работающими в диапазоне СВЧ.

МЕТОДЫ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАНИЯ ФЛУКТУАЦИЙ В ГЕНЕРАТОРАХ

Г л а в а 13

МЕТОДЫ ИЗМЕРЕНИЯ СПЕКТРАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТИ АМПЛИТУДНЫХ ФЛУКТУАЦИЙ

Колебание генератора, обладающее амплитудными флуктуациями, обладает по существу случайной амплитудной модуляцией. Поэтому для выделения амплитудных флуктуаций $\alpha(t)$ годятся обыкновенные методы амплитудного детектирования — амплитудной демодуляции. Переменная низкочастотная составляющая выхода таких амплитудных детекторов, пропорциональная $\alpha(t)$, подается затем на обычный спектр-анализатор.

Первое подробное рассмотрение этого прямого демодуляционного метода и первые экспериментальные исследования спектральной плотности амплитудных флуктуаций генератора принадлежат И. Л. Берштейну (1941 [1], 1950 [1]). Подробное исследование чувствительности прямого демодуляционного метода измерения амплитудных флуктуаций, учитывающее собственные шумы измерительной установки, проведено в работе (1961 [14]). В этой работе было показано, что собственные шумы (главным образом детектора) кладут верхний предел обнаружению спектральной плотности амплитудных флуктуаций. Тем самым для измерения амплитудных флуктуаций, сравнимых с собственными шумами аппаратуры, необходим достаточно точный учет последних.

При измерении флуктуаций в генераторах СВЧ в качестве детекторов используют полупроводниковые кристаллические детекторы, обладающие сравнительно большими собственными шумами (особенно на низких частотах). В этом случае низкочастотные амплитудные флуктуации генераторов СВЧ оказываются лежащими вообще за пределами прямого демодуляционного метода.

Для преодоления этих трудностей были разработаны и использованы балансные или когерентные методы измерения спектральной плотности амплитудных флуктуаций (1958 [23], 1959 [16], 1961 [13], 1963 [3]), позволившие измерить такие малые

амплитудные флуктуации, интенсивность которых была существенно меньше интенсивности собственных шумов детектора.

Имеется, наконец, еще один метод измерения малых флуктуаций колебания — гетеродинный. Он может быть использован и для измерения флуктуаций амплитуды. Однако поскольку этот метод измерения является по существу косвенным, он будет подробно рассмотрен отдельно в гл. 15.

В последующих параграфах этой главы рассматриваются принципы и чувствительности упомянутых методов измерения флуктуаций амплитуды генераторов.

§ 13.1. Прямой демодуляционный метод измерения спектра амплитудных флуктуаций

1. Из всевозможных спектральных измерений, относящихся к генератору с шумами, измерение спектральной плотности флуктуаций амплитуды колебания генератора является наиболее простым с принципиальной точки зрения. Вместе с тем, однако, реальные измерения амплитудных флуктуаций наталкиваются на трудности, обязанные существованию собственных шумов измерительной аппаратуры, которые, например, до сих пор не позволяют удовлетворительно измерять флуктуации амплитуды в генераторах СВЧ.

Оставляя анализ этих трудностей (которые сказываются при наличии сравнительно слабых флуктуаций амплитуды) для нижеследующих параграфов, рассмотрим принципиальную сторону измерения амплитудных флуктуаций.

Как уже указывалось выше, для измерения флуктуаций амплитуды колебания генератора используется так называемый прямой демодуляционный метод, сущность которого состоит в амплитудном детектировании сигнала генератора. При этом амплитудные флуктуации сигнала, которые можно рассматривать как обычную амплитудную модуляцию, выделяются непосредственно на выходе детектора и затем могут быть измерены в соответствии с требованиями.

2. Итак, пусть имеем колебание генератора, обладающее флуктуациями амплитуды и фазы,

$$z(t) = R_0 [1 + \alpha(t)] \cos [\omega_0 t + \varphi(t)], \quad (13.1.1)$$

где будем полагать, как всегда, что $\langle \alpha^2(t) \rangle \ll 1$.

Пусть имеется также какой-либо детектор. Предположим, что в отсутствие сигнала постоянной составляющей на выходе детектора нет*). При подаче на детектор сигнала (13.1.1) на

*) Например, она специально компенсируется.

выходе последнего появляется постоянная составляющая \bar{v} , зависящая от амплитуды сигнала R_0 , флуктуационное слагаемое, обязанное флуктуациям амплитуды сигнала и пропорциональное им, и осцилляционные члены с частотами, кратными ω_0 .

За детектором следует фильтр (рис. 13.1), пропускающий только низкие (по сравнению с ω_0) частоты, поэтому осцилляционных членов на выходе фильтра не будет. Считая, что на

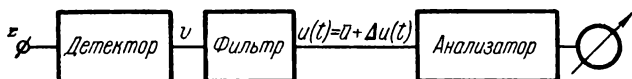


Рис. 13.1.

интересующих нас частотах $\Omega \ll \omega_0$ ни детектор, ни фильтр не вносят частотных искажений, будем иметь на выходе фильтра постоянную составляющую $\bar{u} = \bar{v}$ и полезный флуктуационный сигнал

$$\Delta u(t) = \bar{u} l a(t). \quad (13.1.2)$$

Здесь l — безразмерный коэффициент, зависящий от вида детектора и в общем случае от амплитуды сигнала R_0 .

Если используется, например, линейный детектор с характеристикой

$$v = \begin{cases} bz, & z > 0, \\ 0, & z < 0, \end{cases}$$

то, как легко найти, $\bar{u} = bR_0/\pi$, $l = 1$.

При использовании квадратичного детектора с квадратичным слагаемым, равным $a_2 z^2$, получим $\bar{u} = \frac{a_2}{2} R_0^2$, $l = 2$. Можно показать, что для детектора, описываемого любой степенной функцией, коэффициент l всегда будет постоянным.

Если же детектор описывается более сложной функцией, то $l = l(R_0)$. Так, например, для экспоненциального детектора

$$v = v_0(e^{\kappa z} - 1)$$

можно получить $\bar{u} = v_0[I_0(\kappa R_0) - 1]$,

$$l = \frac{\kappa R_0 I_1(\kappa R_0)}{I_0(\kappa R_0) - 1}.$$

Здесь $I_0(x)$, $I_1(x)$ — модифицированные функции Бесселя.

Таким образом, для любого детектора справедливо соотношение (13.1.2). Следовательно, определяя с помощью анализатора флуктуационные характеристики $\Delta u(t)$, зная величины l

и \bar{u} , можно найти искомые флуктуационные характеристики флуктуаций амплитуды генератора $\alpha(t)$. Так, например, спектрально-корреляционные характеристики $\Delta u(t)$ и $\alpha(t)$ связаны очевидным образом:

$$S_{\Delta u}(\Omega) = \bar{u}^2 l^2 S_{\alpha}(\Omega), \quad \Phi_{\Delta u}(\tau) = \bar{u}^2 l^2 \Phi_{\alpha}(\tau). \quad (13.1.3)$$

3. Рассмотренный метод измерения позволяет «в чистом виде» измерять амплитудные флуктуации независимо от флуктуаций частоты. При этом демодуляционный метод не накладывает никаких ограничений на частоту генератора. И для генераторов звуковых частот, и для генераторов СВЧ будут справедливы формулы (13.1.3), если справедливо соотношение (13.1.2). Таков принцип измерения амплитудных флуктуаций генератора. Полученные формулы предполагают «идеальное» измерительное устройство, в котором детектор, фильтр и анализатор не обладают собственными шумами. Это справедливо для достаточно больших амплитудных флуктуаций, когда на входе анализатора флуктуации $\Delta u(t)$ много больше собственных шумов анализатора (пересчитанных на вход) и шумов детектора с фильтром.

§ 13.2. Учет собственных шумов измерительного устройства

1. Примем теперь во внимание собственные шумы детектора с фильтром $u_{ш. д}(t)$ и анализатора $u_{ш. а}(t)$, представив полное шумовое напряжение на входе анализатора как

$$u_{ш}(t) = u_{ш. д}(t) + u_{ш. а}(t).$$

Вследствие некогерентности шумов анализатора с шумами детектора и фильтра спектральная плотность собственных шумов равна

$$S_{ш}(\Omega) = S_{ш. д}(\Omega) + S_{ш. а}(\Omega).$$

Таким образом, на выходе детектора спектральная плотность полного флуктуационного напряжения

$$\Delta u_{п} = u_{ш}(t) + \Delta u(t) = \bar{u} l \alpha(t) + u_{ш. д}(t) + u_{ш. а}(t)$$

равна

$$S_{п}(\Omega) = \bar{u}^2 l^2 S_{\alpha}(\Omega) + S_{ш. д}(\Omega) + S_{ш. а}(\Omega).$$

На фоне шумов измерительного устройства $u_{ш}(t)$ необходимо измерить спектральную плотность полезного сигнала $\Delta u(t)$. Естественнo принять за минимально обнаружимый (прямым демодуляционным методом) полезный сигнал $\Delta u(t)$ такой, спектральная плотность которого равна

$$S_{\Delta u}^{min}(\Omega) = S_{ш. д}(\Omega) + S_{ш. а}(\Omega).$$

При выполнении этого равенства показания выходного прибора, измеряющего мощность в заданной полосе, удваиваются по сравнению с показаниями от собственных шумов. Тем самым, принимая во внимание (13.1.3), получаем следующую минимально обнаружимую спектральную плотность относительных амплитудных флуктуаций колебания генератора

$$S_{\alpha}^{\min}(\Omega) = \frac{S_{\text{ш}}(\Omega)}{\frac{u^2}{l^2}} = \frac{1}{\frac{u^2}{l^2}} [S_{\text{ш.д}}(\Omega) + S_{\text{ш.а}}(\Omega)]. \quad (13.2.1)$$

Отсюда следует, что при заданной спектральной плотности собственных шумов $S_{\text{ш}}(\Omega)$ для повышения чувствительности измерительного устройства необходимо, во-первых, брать более «крутое» детектирование (большее значение l) и, во-вторых, большую амплитуду измеряемого сигнала. Последнее связано с тем, что в конце концов измеряются, конечно, не относительные, а абсолютные флуктуации амплитуды, которые, очевидно, тем больше (при неизменных относительных), чем больше амплитуда колебания.

Однако это утверждение сохраняет силу лишь в том случае, если $S_{\text{ш}}(\Omega)$ не зависит от амплитуды колебания. В то время как это, безусловно, справедливо для $S_{\text{ш.а}}(\Omega)$, собственные шумы детектора в общем случае зависят от постоянной составляющей, протекающей через детектор, а следовательно, и от амплитуды исследуемого сигнала R_0 . В таком случае чувствительность схемы может зависеть от R_0 более сложным образом и, в частности, вообще не зависеть от амплитуды сигнала (разумеется, в определенных пределах).

2. Обратимся к ламповому диоду типа 6х6, часто используемому в качестве детектора. Как уже упоминалось выше, на низких частотах (порядка нескольких килогерц и ниже) у диода, как и любой лампы с оксидным катодом, превалирует фликкерный шум, а на высоких — дробовой.

Выше, в § 3.1, мы видели, что спектральная плотность относительных флуктуаций тока через диод на низких частотах (т.е. спектральная плотность фликкерного шума) может быть для $\Omega > 0$ представлена формулой (ср. (3.3.1) и (3.3.2))

$$S_{\delta I}(\Omega) \equiv S_{\phi}(\Omega) = \frac{A_{\phi} I_0^{b-2}}{2\pi\Omega^{\gamma}}, \quad (13.2.2)$$

где $\delta I = \Delta I(t)/I_0$, I_0 — постоянная составляющая тока через диод, ΔI — флуктуации тока, A_{ϕ} , b , γ — постоянные величины, зависящие от конкретной лампы. Ограничимся для простоты случаем, когда можно считать, что для токов катода, лежащих в пределах от 1 до 10 мА, $b=2$, $\gamma \approx 1$. Тогда для большинства экземпля-

ров ламп величина A_Φ , являясь безразмерной, лежит в пределах $10^{-13} \div 10^{-14}$ (см. [37]).

Поскольку выходная переменная детекторного каскада v пропорциональна току через диод (напомним, что начальный ток диода не принимается во внимание), то $\delta v = \delta u = \delta I$, и тогда

$$S_{\delta u}(\Omega) = \frac{A_\Phi}{2\pi\Omega}.$$

Тем самым спектральную плотность шумов детектора принимаем равной (шумами фильтра пренебрегаем)

$$S_{\text{ш. д}}(\Omega) = \frac{\bar{u}^2 A_\Phi}{2\pi\Omega} \approx \frac{10^{-14}}{\Omega} \bar{u}^2. \quad (13.2.3)$$

Подставляя это значение спектральной плотности фликкерного шума детектора в (13.2.1), найдем (для лампового диода при достаточно большой амплитуде сигнала можно полагать, что $l=1$)

$$S_a^{\text{mln}}(\Omega) \approx \frac{10^{-14}}{\Omega} + \frac{1}{\bar{u}^2} S_{\text{ш. д}}(\Omega).$$

Выбирая достаточно большое \bar{u} , собственными шумами анализатора можно пренебречь по сравнению с шумами детектора и тем самым пренебречь их влиянием на чувствительность аппаратуры. Поэтому можно считать, что

$$S_a^{\text{mln}}(\Omega) \approx \frac{10^{-14}}{\Omega}. \quad (13.2.4)$$

Таков порядок минимально обнаружимой спектральной плотности относительных амплитудных флуктуаций генератора. При принятых предположениях эта величина не зависит от амплитуды колебания исследуемого генератора. Эта формула справедлива лишь для сравнительно низких частот Ω , на которых фликкерный шум еще преобладает над дробовым. Нетрудно найти примерное значение частоты f^* , на которой фликкерный шум сравнивается с дробовым.

Поскольку спектральная плотность относительных флуктуаций тока, обусловленных дробовым шумом, равна (см. § 3.2) $e\Gamma^2/2\pi I_0$, то f^* определяется уравнением

$$\frac{A_\Phi}{4\pi^2 f^*} = \frac{e\Gamma^2}{2\pi I_0}.$$

Выбирая $\Gamma^2=0,2$, $I_0=10$ ма, $A_\Phi/\pi=2 \cdot 10^{-14}$, найдем, что $f^*=3$ кГц. Таким образом, формула (13.2.4) в рассмотренном случае справедлива для частот, меньших 3 кГц.

Рассматривая более высокие частоты, на которых фликкерный шум пренебрежим по сравнению с дробовым, мы должны вместо (13.2.2) брать

$$S_{\delta I}(\Omega) = \frac{e\Gamma^2}{2\pi I_0}.$$

Это значит, что вместо (13.2.3) будем иметь

$$S_{ш. д}(\Omega) = \bar{u}^{-2} \frac{e\Gamma^2}{2\pi I_0}.$$

Подставляя это значение спектральной плотности в (13.2.1) и пренебрегая собственными шумами анализатора, будем иметь ($l=1$, $\Gamma^2=0,2$, $I=10$ *ма*)

$$S_{\alpha}^{min}(\Omega) = \frac{e\Gamma^2}{2\pi I_0} = 0,5 \cdot 10^{-18}. \quad (13.2.5)$$

Таковы минимально обнаружимые спектральные плотности относительных амплитудных флуктуаций генератора при использовании в качестве детектора диода типа 6х6.

3. Обратимся теперь к кристаллическим детекторам, применение которых имеет место в сантиметровом диапазоне частот.

Собственный шум кристаллического детектора, так же как и лампового, состоит из фликкерного шума и дробового шума, причем фликкерный шум кристаллического диода существенно больше (при той же величине постоянной составляющей тока, протекающей через детектор), чем у лампового диода. Это приводит к тому, что частота f^* , на которой фликкерный шум сравнивается с дробовым, имеет порядок сотен килогерц и может доходить до мегагерца.

Относительно фликкерного шума известно (см., например, [130]), что спектральная плотность относительных флуктуаций напряжения на нагрузке кристаллического детектора при его возбуждении полем высокой частоты может быть приближенно описана формулой

$$S_v(\Omega) = \frac{E}{I_0^3 2\pi \Omega^\gamma}.$$

Здесь β и γ зависят от конкретного диода и принимают значения, близкие к единице, E сильно зависит от типа и экземпляра кристаллического диода и лежит в пределах $5 \cdot 10^{-10} \div 5 \cdot 10^{-13}$. Тем самым, взяв средние значения $\beta=\gamma=1$ и $I_0=1$ *ма*, для шума детектора будем иметь

$$S_{ш. к}(\Omega) \approx \bar{u}^{-2} \frac{10^{-7} - 10^{-10}}{\Omega} \quad (13.2.6)$$

вплоть до десятков мегагерц, на которых уже следует учитывать как дробовые шумы полупроводникового детектора, так и тепловые шумы измерительной установки.

Подставляя (13.2.6) в (13.2.1), выбирая достаточно большое \bar{u}^{-2} и полагая $l=1$, получим

$$S_{\alpha}^{\text{min}}(\Omega) = \frac{10^{-7} - 10^{-10}}{\Omega}. \quad (13.2.7)$$

Такова минимально обнаружимая спектральная плотность относительных амплитудных флуктуаций генератора при измерении их с помощью полупроводникового детектора.

Сравнение (13.2.4) с (13.2.7) показывает, что даже лучшие кристаллические детекторы (с точки зрения шумов) на четыре порядка хуже ламповых детекторов. Это обстоятельство находит свое отражение в том, что для генераторов сантиметрового диапазона (например, клистронов) измерение амплитудных флуктуаций, особенно в области низких частот, встречает большие трудности.

§ 13.3 Методы измерения малых амплитудных флуктуаций

1. Прямой демодуляционный метод, рассмотренный в предыдущем параграфе, эффективен, если амплитудные флуктуации существенно больше собственных шумов измерительного устройства, т. е. если

$$S_{\alpha}(\Omega) \gg \bar{u}^{-2} l^{-2} S_{\text{ш}}(\Omega).$$

Если эти спектральные плотности сравнимы, то прямой метод измерения флуктуаций амплитуды колебания также применим, однако при этом уже необходимо с достаточной степенью точности знать собственные шумы детектора и анализатора. Если шумами анализатора можно пренебречь, то для определения $S_{\alpha}(\Omega)$ из измеренной спектральной плотности

$$S_{\Pi}(\Omega) = \bar{u}^2 l^2 S_{\alpha}(\Omega) + S_{\text{ш. д}}(\Omega)$$

кроме \bar{u} и l необходимо знать спектральную плотность шумов детектора $S_{\text{ш. д}}(\Omega)$. Наилучшее, что можно потребовать, это отдельное измерение спектральной плотности шумов детектора в том же режиме, в котором детектор находится во время измерений амплитудных флуктуаций. Этого в принципе можно достигнуть различными путями. Идеальный путь — это измерение выходных шумов при подаче на детектор высокочастотного сигнала (той же мощности, что и измеряемый), не имеющего амплитудных флуктуаций. Однако, как следует из всего вышеизложенного, этот путь просто недостижим. Невозможно создать

автогенератор, колебание которого не обладало бы амплитудными флуктуациями. Единственное, что можно было бы на этом пути предпринять, это использование амплитудного ограничителя (см., например, (1963 [3])). Однако такой способ снимает лишь только сравнительно большие амплитудные флуктуации; колебание, снимаемое с ограничителя, тем не менее обладает амплитудными флуктуациями. Они имеют уже другое происхождение, но они всегда существуют. Это связано с тем, что основные параметры ограничителя сами испытывают флуктуации, непосредственно перенося их на выходное колебание.

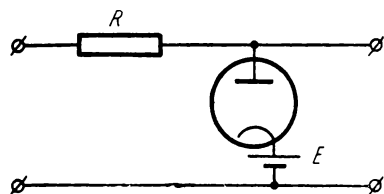


Рис. 13.2.

Если рассмотреть, например, принципиальную схему диодного ограничителя, имеющего даже идеальный диод (прямое сопротивление равно нулю, обратное равно бесконечности), то

(рис. 13.2) амплитуда выходного сигнала (рассматриваем для простоты только положительные полупериоды) будет равна E — электродвижущей силе батареи смещения. Поскольку, с другой стороны (см. § 3.4), все реальные источники ЭДС имеют флуктуации как ЭДС, так и внутреннего сопротивления, то очевидно, что в случае идеального диода амплитуда выходного сигнала будет испытывать флуктуации, спектральная плотность которых равна

$$S_{\alpha}(\Omega) = S_{\delta E}(\Omega),$$

где $S_{\delta E}(\Omega)$ — спектральная плотность относительных флуктуаций ЭДС $\delta E = \Delta E(t)/E$, которая, если, например, пользоваться первыми попавшимися элементами, может быть довольно большой (см. табл. 1 на стр. 141).

Если диод не идеальный и имеет нулевое прямое и конечное обратное сопротивление, то $S_{\alpha}(\Omega)$ на выходе ограничителя существенно увеличивается за счет флуктуаций сопротивления, независимо от того, какой имеется диод — ламповый или кристаллический *).

Таким образом, амплитудный ограничитель, снимая входные амплитудные флуктуации, на их место «сажает» свои и колебание на выходе любого реального амплитудного ограничителя всегда обладает амплитудными флуктуациями. Более того, можно, по-видимому, утверждать, что если в ограничителе используется диод такого же типа, что и в установке для измерения

*) О флуктуациях сопротивления кристаллических детекторов см. [131].

амплитудных флуктуаций, спектральная плотность $\bar{u}^2 I^2 S_z(\Omega)$ колебания, прошедшего ограничитель, будет на любых частотах Ω не меньше чем $S_{ш.д}(\Omega)$. Тем самым, по всей вероятности, путь использования амплитудного ограничителя не может привести к успеху на пути отделения слабых амплитудных флуктуаций колебания от фликкерного шума детектора.

Другой путь существенного уменьшения амплитудных флуктуаций колебания генератора может быть связан с тем, что в спектре амплитудно-модулированного колебания флуктуации амплитуды представлены широкополосным пьедесталом, в центре которого находится узкополосный пик, размытость которого обязана флуктуациям частоты. Если пропустить такое колебание через узкополосный фильтр, пропускающий только пик и обрезающий широкополосный амплитудный пьедестал, то выходное колебание лишится большей доли амплитудных флуктуаций.

Этот путь, однако, требует довольно большой добротности фильтра. В самом деле, ширина спектра амплитудных флуктуаций равна p — прочности предельного цикла автоколебаний. Для автогенератора $p \ll \omega_0/Q$. Поэтому такой фильтр будет эффективным лишь тогда, когда его полоса по крайней мере на порядок будет меньше прочности предельного цикла. А это значит, что его полоса по крайней мере на два порядка должна быть меньше полосы контура, используемого в автогенераторе. Тем не менее этот метод в некоторых частных случаях (особенно при измерении спектра амплитудных флуктуаций на достаточно больших частотах) может быть достаточно эффективным (1958 [4]).

Для определения и измерения шумов кристаллического детектора можно, казалось бы, использовать возбуждение детектора не высокочастотным колебанием, а постоянным током. Однако, во-первых, стабильность постоянного тока не многим лучше стабильности амплитудного ограничителя или стабильности амплитуды автогенератора; во-вторых, уровень шумов кристаллического диода при возбуждении постоянным током отличается в общем случае довольно заметно от уровня шумов при возбуждении диода переменным полем вследствие работы последнего в различных режимах.

Таким образом, способ достаточно точного измерения спектральной плотности шумов детектора путем питания его каким-либо стабильным по амплитуде сигналом, по-видимому, мало перспективен. Наиболее реальным путем измерения шумов кристаллического детектора является путь баланса или компенсации амплитудных флуктуаций высокочастотного сигнала *на выходе детектора*.

Принципиальная схема выходного устройства, позволяющего осуществить последетекторную компенсацию флуктуаций амплитуды высокочастотного сигнала, показана на рис. 13.3.

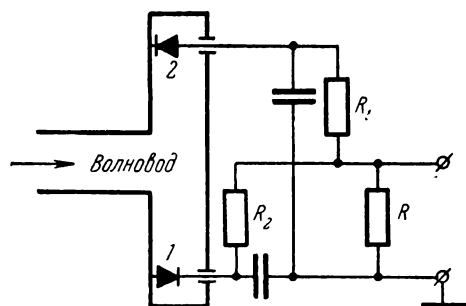


Рис. 13.3.

Кристаллические детекторы включены противофазно в симметричные плечи волноводного тройника. При этом на сопротивлении R амплитудные флуктуации выделяются с разными знаками от обоих плеч. И если баланс в схеме точно подобран (для его подбора могут изменяться R_1 и R_2), то на сопротивлении R суще-

ствуют только некогерентные шумовые напряжения обоих детекторов, которые и измеряются.

2. Чаще всего, однако, амплитудные флуктуации СВЧ генератора много меньше собственных шумов детектора, и тем самым имеет место неравенство

$$S_a(\Omega) \ll u^{-2} l^{-2} S_{ш.д}(\Omega).$$

В этом случае возникает задача определения слабых амплитудных флуктуаций на фоне больших собственных шумов аппаратуры.

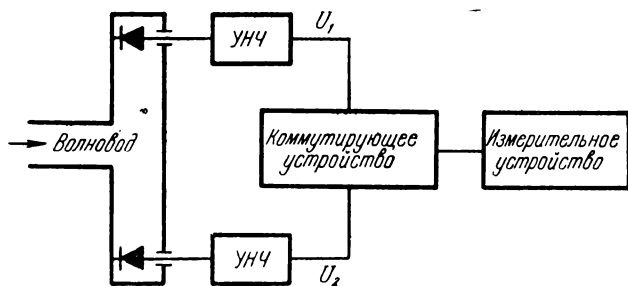


Рис. 13.4.

Для решения этой задачи может быть применен так называемый когерентный метод, идея которого фактически уже содержится в балансном методе измерения шумов детектора.

Рассмотрим схему, изображенную на рис. 13.4. После синфазных кристаллических детекторов волноводного тройника следуют усилители низких частот, имеющие идентичные характери-

стики и, вообще говоря, не имеющие принципиального значения. За усилителями следует коммутирующее устройство, выход которого может быть равен сумме или разности входов.

Пусть на выходе усилителей существуют низкочастотные флуктуационные напряжения, равные соответственно

$$U_1 = K_1(\bar{u}_1 l_1 \alpha(t) + u_{ш1}), \quad U_2 = K_2(\bar{u}_2 l_2 \alpha(t) + u_{ш2}).$$

Здесь K_1, K_2 — коэффициенты усиления усилителей (полагаем, что в интересующей нас полосе частот они постоянны); $u_{ш1}(t), u_{ш2}(t)$ — некогерентные шумы (приведенные по входу усилителей) детекторов и усилителей. Приписав разные индексы для \bar{u} и l , мы тем самым приняли во внимание разницу в характеристиках детекторов.

На выходе коммутирующего устройства имеем сигнал суммы

$$U_{\Sigma} = U_1 + U_2 = (K_1 \bar{u}_1 l_1 + K_2 \bar{u}_2 l_2) \alpha(t) + K_1 u_{ш1} + K_2 u_{ш2},$$

или сигнал разности

$$U_{\Delta} = U_1 - U_2 = (K_1 \bar{u}_1 l_1 - K_2 \bar{u}_2 l_2) \alpha(t) + K_1 u_{ш1} - K_2 u_{ш2}.$$

Измерительное устройство измеряет спектральную плотность выхода коммутатора $S_{\Sigma}(\Omega)$ или $S_{\Delta}(\Omega)$:

$$S_{\Sigma}(\Omega) = (K_1 \bar{u}_1 l_1 + K_2 \bar{u}_2 l_2)^2 S_{\alpha}(\Omega) + K_1^2 S_{ш1}(\Omega) + K_2^2 S_{ш2}(\Omega),$$

$$S_{\Delta}(\Omega) = (K_1 \bar{u}_1 l_1 - K_2 \bar{u}_2 l_2)^2 S_{\alpha}(\Omega) + K_1^2 S_{ш1}(\Omega) + K_2^2 S_{ш2}(\Omega).$$

Мы получили два уравнения, из которых, вообще говоря, уже можно найти $S_{\alpha}(\Omega)$, зная $K_1, K_2, \bar{u}_1, \bar{u}_2, l_1, l_2$. Целесообразно поступить, однако, еще более просто. Вся система балансируется таким образом, чтобы

$$K_1 \bar{u}_1 l_1 - K_2 \bar{u}_2 l_2 = 0.$$

Практически это условие легко получить, например, специально модулируя по амплитуде генератор и подбирая коэффициенты усиления усилителей так, чтобы в сигнале $U_{\Delta}(t)$ этот модулирующий сигнал отсутствовал. В этом случае, как легко видеть,

$$S_{\alpha}(\Omega) = \frac{S_{\Sigma}(\Omega) - S_{\Delta}(\Omega)}{4K_1 \bar{u}_1 l_1}.$$

Если разница между $S_{\Sigma}(\Omega)$ и $S_{\Delta}(\Omega)$ измеряется с достаточной точностью, то $S_{\alpha}(\Omega)$ определяется при ручной коммутации, при которой отдельно измеряются $S_{\Sigma}(\Omega)$ и $S_{\Delta}(\Omega)$. В этом случае рассматриваемый метод сводится по существу к рассмотренному

выше балансному методу учета собственных шумов детекторов, тем более, что спектральная плотность $S_{\Delta}(\Omega)$ при выполнении условия баланса равна спектральной плотности собственных шумов обоих каналов (измеренная на выходе усилителей).

Если же разница между $S_{\Sigma}(\Omega)$ и $S_{\Delta}(\Omega)$ лежит в пределах точности их отдельных измерений или меньше ее, то можно, по-видимому, применить компенсационный или модуляционный метод измерения, при котором сами спектральные плотности $S_{\Sigma}(\Omega)$ и $S_{\Delta}(\Omega)$ не измеряются, а измеряется лишь их разность. При этом можно измерить довольно малые значения $S_{\alpha}(\Omega)$, меньшие, например, $K^{-2}\bar{u}^{-2}l^{-2}S_{\Delta}(\Omega)$ на полтора-два порядка.

МЕТОДЫ ИЗМЕРЕНИЯ ФЛУКТУАЦИЙ ЧАСТОТЫ ГЕНЕРАТОРОВ

Измерение флуктуаций частоты колебания сводится фактически к измерению слабой частотной модуляции этого колебания. Поэтому для измерения флуктуаций частоты могут быть использованы обычные частотные детекторы, и основная задача в этом случае сводится к обеспечению высокой чувствительности измерительного устройства. Можно измерять и фазовые флуктуации — в этом случае необходимы фазовые детекторные устройства.

Впервые измерение спектральной плотности фазовых флуктуаций в генераторах было проведено И. Л. Берштейном (1950 [1]) так называемым методом линии задержки — интерференционным методом, примененным в радиодиапазоне. Подробный теоретический анализ этого метода, а также оценка его чувствительности содержится в работах (1956 [11], 1961 [14], 1962 [8], 1964 [15]).

Наряду с методом линии задержки для измерения флуктуаций частоты генераторов успешно применяется и метод контура, в котором частотным детектором служит обычный колебательный контур (см., например, (1961 [14], 1962 [8], 1954 [8, 9], 1964 [8])).

В качестве частотного детектора может быть использован также балансный мост (1962 [2]), который имеет определенные преимущества перед контуром при измерении флуктуаций частоты.

В настоящей главе излагается подробный анализ и оценка чувствительности трех основных методов измерения флуктуаций частоты: метода линии задержки, метода контура и метода балансного моста.

§ 14.1. Общее рассмотрение методов измерения частотных и амплитудно-частотных флуктуаций

1. Методы измерения флуктуаций частоты колебания существенно отличаются от методов измерения амплитудных флуктуаций тем, что не существует, по-видимому, способа непосредственной демодуляции флуктуаций частоты, как это имеет

место для флуктуаций амплитуды. Все используемые методы применяют так называемый дискриминатор — линейный четырехполюсник, частотная характеристика которого позволяет эффективно переводить частотную модуляцию входного колебания в амплитудную модуляцию выходного сигнала. После того как частотные флуктуации переведены в амплитудные, последние измеряются обычным демодуляционным методом, подробно рассмотренным в предыдущей главе. Сложность дискриминационного метода измерений флуктуаций частоты заключается в том, что входное колебание помимо частотных флуктуаций имеет также и амплитудные, которые переносятся на выходное колебание. Тем самым амплитудные флуктуации сигнала, вышедшего с дискриминатора, складываются (в общем случае довольно сложным образом) из собственно амплитудных флуктуаций входного колебания и амплитудных флуктуаций, получившихся в результате преобразования флуктуаций частоты входного колебания. В последующем необходимо, измерив суммарные амплитудные флуктуации, как-то отделить амплитудные от частотных. Это обычно достигается изменением настройки дискриминатора, при котором изменяется соотношение между собственно амплитудными и преобразованными частотными флуктуациями.



Рис. 14.1.

2. Блок-схема установки, предназначенной для измерения спектра флуктуаций частоты (и амплитуды) колебания, показана на рис. 14.1.

Пусть колебание, подаваемое на вход дискриминатора, имеет вид

$$x(t) = A_0 [1 + \alpha(t)] \cos \left[\omega_0 t + \int^t v(\xi) d\xi \right], \quad (14.1.1)$$

где, как обычно, $\alpha(t)$ и $v(t)$ — малые флуктуации амплитуды и частоты. Поскольку дискриминатор является линейным четырехполюсником, то на его выходе будем иметь колебание, подобное (14.1.1):

$$z(t) = B_0 [1 + \beta(t)] \cos \left[\omega_0 t + \int^t v_1(\xi) d\xi \right]. \quad (14.1.2)$$

Относительные амплитудные флуктуации этого выходного колебания $\beta(t)$ зависят линейно от $\alpha(t)$ и $v(t)$. В общем случае эти

три переменные связаны между собой интегро-дифференциальным уравнением.

Следовательно, для спектральной плотности флуктуаций $\beta(t)$ можно записать следующее общее выражение:

$$S_{\beta}(\Omega, n) = K_{\alpha}(\Omega, n) S_{\alpha}(\Omega) + K_{\nu}(\Omega, n) S_{\nu}(\Omega) + K_{av}^0(\Omega, n) S_{av}^0(\Omega) + K_{av}^1(\Omega, n) S_{av}^1(\Omega). \quad (14.1.3)$$

Здесь $S_{\beta}(\Omega, n)$ есть спектральная плотность флуктуаций $\beta(t)$, зависящая от некоторого параметра n — параметра настройки дискриминатора (обычно этот параметр определяется отношением частоты сигнала к центральной частоте дискриминатора). $K_{\alpha}(\Omega, n)$, $K_{\nu}(\Omega, n)$, $K_{av}^0(\Omega, n)$, $K_{av}^1(\Omega, n)$ — представляют собой частотные характеристики дискриминатора; они зависят от частоты флуктуаций, настройки дискриминатора и показывают удельный вес соответствующих флуктуаций, дающих вклад в амплитудные флуктуации выходного сигнала.

Следующие за дискриминатором детектор с фильтром и анализатор дают возможность, измеряя спектр флуктуаций на выходе фильтра $\Delta u(t)$, определить спектральную плотность $S_{\beta}(\Omega, n)$, ибо, согласно (13.1.3), можно записать

$$S_{\Delta u}(\Omega) = \bar{u}^2 l^2 S_{\beta}(\Omega, n). \quad (14.1.4)$$

Знание $S_{\beta}(\Omega, n)$ для какого-либо одного фиксированного значения n еще не позволяет определить интересующие нас спектральные плотности $S_{\alpha}(\Omega)$, $S_{\nu}(\Omega)$, $S_{av}^0(\Omega)$, $S_{av}^1(\Omega)$, которые могут быть найдены путем проведения серии измерений $S_{\beta}(\Omega, n)$ при различных значениях n .

Это становится возможным благодаря тому, что вышеуказанные частотные характеристики дискриминатора по-разному зависят от n .

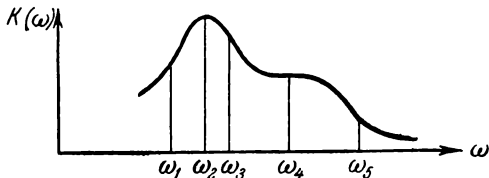


Рис. 14.2

3. В качестве дискриминатора может быть взят в принципе любой

линейный четырехполюсник, обладающий неравномерной частотной характеристикой $K(\omega)$ (рис. 14.2). Здесь $K(\omega)$ — модуль частотной характеристики четырехполюсника дискриминатора (от входа x до выхода z), т. е. определенный, как обычно, соотношением

$$S_z(\omega) = K^2(\omega) S_x(\omega).$$

Настраивать дискриминатор по отношению к сигналу, это значит изменять положение частоты исследуемого колебания ω_0

по отношению к точкам $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_5$. Обычно имеет место «обратная» картина: ω_0 неизменна, а «передвигается» частотная характеристика $K(\omega)$.

Нетрудно наглядно пояснить принцип разделения спектральных плотностей $S_\alpha(\Omega)$, $S_\nu(\Omega)$, $S_{\alpha\nu}^0(\Omega)$, $S_{\alpha\nu}^1(\Omega)$. Пусть для простоты амплитудные и частотные флуктуации колебания являются независимыми, так что $S_{\alpha\nu}^0(\Omega) \equiv S_{\alpha\nu}^1(\Omega) \equiv 0$. Тогда, совмещая ω_0 с точкой ω_2 или ω_4 , где $dK(\omega)/d\omega = 0$, для значения n_1 мы получим

$$S_\beta(\Omega, n_1) = K_\alpha(\Omega, n_1) S_\alpha(\Omega),$$

поскольку в этих точках частотные флуктуации входного колебания не будут превращаться в амплитудные флуктуации выходного колебания. Таким образом, мы получим $S_\alpha(\Omega)$. Совмещая ω_0 с точками ω_1 , или ω_3 , или ω_5 (пусть при этом $n = n_2$), мы получим

$$S_\beta(\Omega, n_2) = K_\alpha(\Omega, n_2) S_\alpha(\Omega) + K_\nu(\Omega, n_2) S_\nu(\Omega).$$

Зная $S_\beta(\Omega, n_2)$, $S_\alpha(\Omega)$ и частотные характеристики дискриминатора, определим $S_\nu(\Omega)$.

В случае, когда $S_{\alpha\nu}^0(\Omega)$, $S_{\alpha\nu}^1(\Omega) \neq 0$, требуется большее количество измерений.

§ 14.2. Метод контура

1. Простейшим дискриминатором является обычный колебательный контур. Пусть ω_k , Q_k , Π_k — собственная частота, добротность и полоса контура. Введем в рассмотрение расстройку $\eta = \omega_0 - \omega_k$ между частотой исследуемого колебания и частотой контура.

Можно показать (1957 [1]), что если на вход контура подается колебание вида (14.1.1), флуктуации амплитуды выходного колебания (14.1.2) подчиняются следующему дифференциальному уравнению ($2\delta = \Pi_k$):

$$\ddot{\beta} + 2\delta\dot{\beta} + \lambda^2\beta = \lambda^2\alpha + \delta\dot{\alpha} - \eta\nu, \quad (14.2.1)$$

где $\lambda^2 = \delta^2 + \eta^2$. Это уравнение учитывает переходные процессы, т. е. инерционность контура, поэтому в него входят производные по времени от β и α . Если рассматривать только квазистатические изменения амплитуд, то (14.2.1) переходит в соотношение

$$\beta = \alpha - \frac{\eta}{\lambda^2} \nu, \quad (14.2.2)$$

которое элементарным путем получается из рассмотрения модуля частотной характеристики колебательного контура, пропорционального $(\eta^2 + \delta^2)^{-1/2}$.

Будем предполагать, что между амплитудными и частотными флуктуациями исследуемого колебания в общем случае имеется какая-либо корреляция, и поэтому будем считать, что $\alpha(t)$ и $\nu(t)$ определяются спектральными плотностями $S_\alpha(\Omega)$, $S_\nu(\Omega)$, $S_{\alpha\nu}^0(\Omega)$, $S_{\alpha\nu}^1(\Omega)$. Применяя к обеим частям уравнения (14.2.1) формулы § 2.1, нетрудно получить следующее выражение для спектральной плотности относительных амплитудных флуктуаций выходного колебания:

$$S_\beta(\Omega) = \frac{(\delta^2\Omega^2 + \lambda^4) S_\alpha(\Omega) + \eta^2 S_\nu(\Omega) - 2\lambda^2\eta S_{\alpha\nu}^0(\Omega) + 2\delta\eta\Omega S_{\alpha\nu}^1(\Omega)}{(\lambda^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2}. \quad (14.2.3)$$

Отсюда следует, что спектр флуктуаций амплитуды выходного колебания сложным образом зависит от спектров амплитудных и частотных флуктуаций исследуемого колебания. Основная характеристика этой сложности — частотные искажения. Если взять наипростейший случай, когда входное колебание имеет только амплитудные флуктуации, то и тогда спектр $S_\beta(\Omega)$ не пропорционален спектру $S_\alpha(\Omega)$. Всё это является следствием инерционности колебательного контура и требует ее учета, если спектральные плотности флуктуаций рассматриваются на достаточно высоких частотах Ω .

Представляя спектральную плотность (14.2.3) в виде (14.1.3) и вводя в качестве параметра настройки дискриминатора относительную расстройку $n = \eta/\delta$, легко найти следующие частотные характеристики рассматриваемого дискриминатора — колебательного контура:

$$\begin{aligned} K_\alpha(\Omega, n) &= \frac{1 + b\Omega^2/\delta^2}{1 + a\Omega^2/\delta^2 + b\Omega^4/\delta^4}, \\ K_\nu(\Omega, n) &= \frac{c/\delta^2}{1 + a\Omega^2/\delta^2 + b\Omega^4/\delta^4}, \\ K_{\alpha\nu}^0(\Omega, n) &= \frac{-2\sqrt{c}/\delta}{1 + a\Omega^2/\delta^2 + b\Omega^4/\delta^4}, \\ K_{\alpha\nu}^1(\Omega, n) &= \frac{2c\Omega/n}{1 + a\Omega^2/\delta^2 + b\Omega^4/\delta^4}, \end{aligned} \quad (14.2.4)$$

где приняты следующие обозначения:

$$a = a(n) = 2 \frac{1 - n^2}{(1 + n^2)^2}, \quad b = b(n) = \frac{1}{(1 + n^2)^2}, \quad c = c(n) = \frac{n^2}{(1 + n^2)^2}.$$

2. Как легко видеть, эти частотные характеристики довольно сложным образом зависят от Ω и n , и определение спектральных плотностей $S_\alpha(\Omega)$, $S_\nu(\Omega)$, $S_{\alpha\nu}^0(\Omega)$, $S_{\alpha\nu}^1(\Omega)$, исходя из измеренной

спектральной плотности $S_\beta(\Omega)$, представляется довольно сложным делом. Желательно поэтому принять меры, способствующие упрощению частотных характеристик дискриминатора.

Основное требование, которому необходимо удовлетворить, — это отсутствие частотных искажений. Пусть спектральные измерения производятся до максимальной частоты $\Omega_{\max} = 2\pi F_{\max}$. Тогда для независимости частотных характеристик дискриминатора от частоты (условие квазистатичности) необходимо, чтобы

$$b(n) \Omega_{\max}^4 / \delta^4 \ll 1, \quad a(n) \Omega_{\max}^2 / \delta^2 \ll 1.$$

В процессе измерения расстройка n обычно принимает значения, лежащие в пределах от -3 до $+3$. Взяв максимальные значения $b(n)$ и $a(n)$, можно показать, что вышеуказанные неравенства удовлетворяются, если полоса контура

$$\Pi_K \geq 10 \Omega_{\max}.$$

Это значит, что для выполнения условия квазистатичности добротность колебательного контура должна удовлетворять неравенству

$$Q_K \leq f_0 / 10 F_{\max}. \quad (14.2.5)$$

Будем считать условие (14.2.5) выполненным, тогда формулы (14.2.4) переходят в следующие:

$$\begin{aligned} K_\alpha(\Omega, n) &= 1, \quad K_v(\Omega, n) = \frac{Q_K^2}{\omega_0^2} \frac{4n^2}{(1+n^2)^2}, \\ K_{\alpha v}^0(\Omega, n) &= -\frac{Q_K}{\omega_0} \frac{4n}{1+n^2}, \quad K_{\alpha v}^1(\Omega, n) = \frac{Q_K}{\omega_0} \frac{4n\Omega/\delta}{(1+n^2)^2}. \end{aligned} \quad (14.2.6)$$

Первые три частотных коэффициента дискриминатора действительно не зависят от частоты и, как легко показать, могут быть без труда получены из квазистатического уравнения (14.2.2). Последний частотный коэффициент, дающий вклад в $S_\beta(\Omega, n)$, при наличии нечетной корреляции между амплитудными и частотными флуктуациями колебания зависит от Ω и, очевидно, не может быть получен из (14.2.2). Это связано с тем, что нечетная корреляция между $\alpha(t)$ и $v(t)$ дает вклад в $\beta(t)$ только за счет неквазистатического воздействия на дискриминатор. Тем самым $K_{\alpha v}^1(\Omega, n) \ll K_{\alpha v}^0(\Omega, n)$ и измерения $S_{\alpha v}^1(\Omega)$ затруднены, тем более, что $S_{\alpha v}^1(\Omega) \rightarrow 0$ при $\Omega \rightarrow 0$. Последнее слагаемое в (14.1.3) следует учитывать лишь тогда, когда

$$S_{\alpha v}^1(\Omega) \geq \frac{\delta}{\Omega} S_{\alpha v}^0(\Omega).$$

Для большинства реальных автогенераторов это неравенство, по-видимому, не выполняется (подробнее см. (1961 [2])). Поэтому предположим, что $S_{av}^1(\Omega) \equiv 0$, и рассмотрим порядок определения остальных спектральных плотностей из $S_\beta(\Omega, n)$.

3. Объединяя (14.1.3) и (14.2.6), имеем

$$S_\beta(\Omega, n) = S_\alpha(\Omega) + 4 \left(\frac{Q_k}{\omega_0} \right)^2 \frac{n^2}{(1+n^2)^2} S_v(\Omega) - 4 \frac{Q_k}{\omega_0} \frac{n}{1+n^2} S_{av}^0(\Omega). \quad (14.2.7)$$

Фиксируя частоту измерения Ω , нетрудно видеть, что зависимость $S_\beta(\Omega, n)$ от n имеет вид, указанный на рис. 14.3. При изменении удельного соотношения $S_\alpha(\Omega)$, $S_v(\Omega)$ и $S_{av}^0(\Omega)$ вид кривой сильно изменяется, но очевидно, что в любом случае из

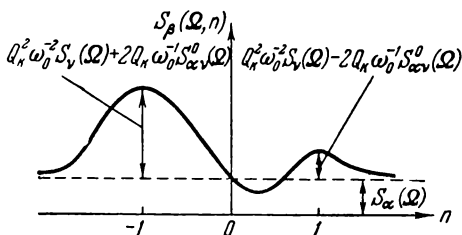


Рис. 14.3.

$S_\beta(\Omega, n)$ можно найти отдельные слагаемые. Наиболее целесообразно придавать расстройке следующие значения: $n=-1$, $n=0$, $n=+1$. Тогда, измерив для фиксированной частоты Ω значения $S_\beta(\Omega, -1)$, $S_\beta(\Omega, 0)$, $S_\beta(\Omega, +1)$, будем иметь:

$$S_\alpha(\Omega) = S_\beta(\Omega, 0),$$

$$S_v(\Omega) = (\omega_0/Q_k)^2 [S_\beta(\Omega, +1) + S_\beta(\Omega, -1) - 2S_\beta(\Omega, 0)], \quad (14.2.8)$$

$$S_{av}^0(\Omega) = (\omega_0/4Q_k) [S_\beta(\Omega, -1) - S_\beta(\Omega, +1)].$$

Таков путь определения спектральных плотностей амплитудно-частотных флуктуаций колебания генератора методом колебательного контура.

На рис. 14.4 приведены экспериментально полученные значения $\beta_f^2 \equiv 4\pi S_\beta(2\pi f, n)$ для двух идентичных автогенераторов, настроенных на частоту 10^5 гц, для значения $f=5$ гц, один из которых имел лампу с оксидным катодом (6Ж8), а другой — лампу с вольфрамовым катодом (П-7). Контур имел добротность $Q_k=100$ (1961 [14]).

На рис. 14.5 приведены аналогичные кривые, полученные С. А. Ахмановым, В. Н. Ештокиным, В. Ф. Марченко (1962 [8])

для отражательного клистрона трехсантиметрового диапазона с использованием резонатора с добротностью $Q_k=920$. Эти кривые получены на частоте 2 Мгц для центра (кривая 1) и противоположных краев зоны генерации (низкочастотного — 2, высокочастотного — 3).

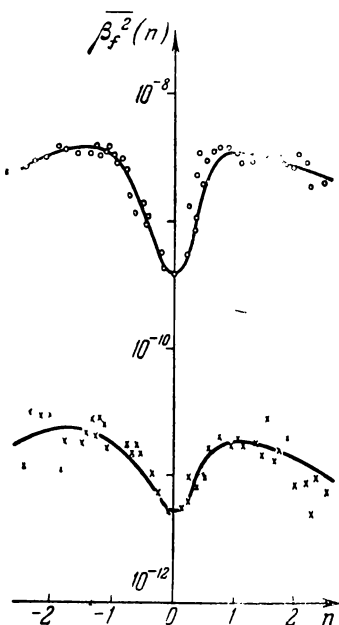


Рис. 14.4.

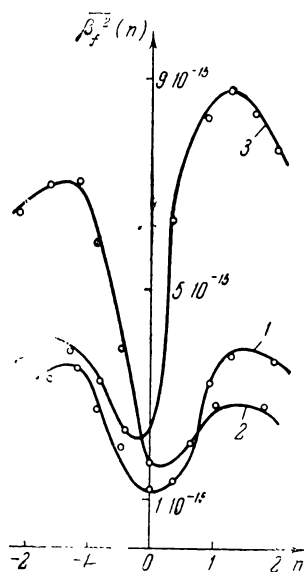


Рис. 14.5.

Таким образом, метод колебательного контура с успехом может использоваться как на низких, так и на высоких частотах.

§ 14.3. Метод линии задержки

1. Хотя в качестве первого метода измерения флуктуаций частоты колебания мы рассмотрели метод колебательного контура, исторически первым методом, позволившим И. Л. Берштейну впервые измерить фазовые (частотные) флуктуации автогенератора, был метод линии задержки — метод, аналогичный оптическому интерференционному методу, применяемому для измерения ширины оптических спектральных линий.

Сущность интерференционного метода заключается в наложении двух квазимонохроматических колебаний (порождаемых одним и тем же источником), одно из которых задержано на

некоторое время τ_0 . Если разность хода меньше длины цуга колебания, то колебания когерентны и между ними может быть осуществлена интерференция. Если разность хода больше длины цуга, колебания некогерентны и интерференционной картины не получается. Время движения одного цуга имеет порядок $1/\Delta F$, где ΔF — ширина линии. В этом опыте измеряется собственно (средняя) длина цуга и таким образом оценивается ΔF .

В радиодиапазоне сделать задержку, соответствующую длине цуга, не представляется возможным, ибо если, например, ширина спектральной линии имеет даже порядок 1 гц, запаздывание в линии задержки должно быть порядка 1 сек, в то время как даже у лучших линий задержки оно не превышает 1 мсек. Тем самым приходится исследовать лишь малые части цуга. Однако высокая чувствительность радиометодов позволяет фактически исследовать фазовые флуктуации генератора при разности хода между двумя колебаниями порядка 10^{-11} от длины цуга.

Таким образом, метод линии задержки сводится к следующему: колебание генератора непосредственно и через линию задержки подается на вычитающее устройство, на выходе которого получается разностное колебание той же частоты. Флуктуации амплитуды выходного колебания зависят не только от флуктуаций амплитуды, но и от флуктуаций фазы исследуемого колебания. Нетрудно найти такое условие, при котором эффект от фазовых флуктуаций будет максимальным.

Представим колебание генератора вектором \mathbf{U}_r , колебание, прошедшее линию задержки, вектором \mathbf{U}_ϕ (рис. 14.6). Амплитуда колебания на выходе линии задержки пропорциональна входной амплитуде $\mathbf{U}_\phi = k\mathbf{U}_r$. Колебание, существующее на выходе вычитающего устройства, представлено вектором \mathbf{U}_0 . Его амплитуда зависит как от амплитуд \mathbf{U}_r , \mathbf{U}_ϕ , так и от фазового сдвига ψ_0 , определяемого длиной линии задержки и равного $\psi_0 = \omega_0 \tau_0$, где τ_0 — время задержки линии. При фиксированных \mathbf{U}_ϕ , ψ_0 можно найти такую величину k , при которой влияние фазовых флуктуаций (флуктуаций ψ_0) на длину вектора \mathbf{U}_0 будет наибольшим. Нетрудно видеть, что этому соответствует значение $\mathbf{U}_{0 \min}$ (этот случай показан на рис. 14.6, а). При этом

$$\cos \psi_0 = \frac{1}{k}. \quad (14.3.1)$$

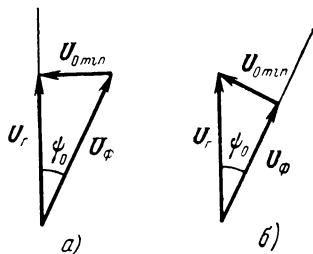


Рис. 14.6.

Если фиксированы U_Φ и ψ_0 , то аналогичная ситуация имеет место при (рис. 14.6, б)

$$\cos \psi_0 = k. \quad (14.3.2)$$

Измеряя флуктуации амплитуды разностного колебания, можно определить фазовые флуктуации исходного колебания. Таков принцип метода линии задержки измерения фазовых флуктуаций колебания.

Исходя из соображений, развитых в § 14.1, можно ожидать, что система линии задержки вместе с вычитающим устройством (рис. 14.7) представляет собой просто-напросто некоторый дискриминатор. Так оно и

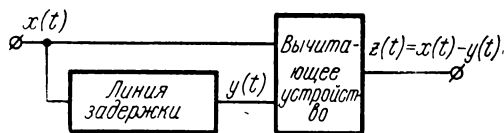


Рис. 14.7.

есть на самом деле. Полагая, что линия задержки не обладает дисперсией (фактически достаточно, чтобы она не обладала дисперсией в пределах ширины спектра сигнала),

можем считать, что $y(t) = kx(t - \tau_0)$. Таким образом, если на входе имеется сигнал $x(t)$, то на выходе дискриминаторной системы сигнал будет равным

$$z(t) = x(t) - kx(t - \tau_0). \quad (14.3.3)$$

Нетрудно найти коэффициент передачи такого дискриминатора. Спектральная плотность мощности выходного сигнала $z(t)$ равна

$$S_z(\omega) = S_x(\omega) + k^2 S_{x'}(\omega) - 2k S_{xx'}^0(\omega),$$

где $x' = x(t - \tau_0)$. Нетрудно видеть, что

$$\Phi_{x'}(\tau) = \Phi_x(\tau), \quad \Phi_{xx'}(\tau) = \Phi_x(\tau - \tau_0),$$

$$\Phi_{xx'}^0(\tau) = \frac{1}{2} [\Phi_x(\tau - \tau_0) + \Phi_x(\tau + \tau_0)].$$

Следовательно,

$$S_{x'}(\omega) = S_x(\omega), \quad S_{xx'}^0(\omega) = S_x(\omega) \cos \omega \tau_0.$$

Тем самым

$$S_z(\omega) = K^2(\omega) S_x(\omega) = [1 + k^2 - 2k \cos \omega \tau_0] S_x(\omega).$$

Таким образом, линия задержки с вычитающим устройством обладает коэффициентом передачи, модуль которого равен

$$K(\omega) = \sqrt{1 - 2k \cos \omega \tau_0 + k^2}. \quad (14.3.4)$$

Графическое изображение этого коэффициента передачи дано на рис. 14.8 для разных значений $0 \leq k \leq 1$. Таким образом, для всех значений $0 < k \leq 1$ имеет место неравномерность частотной характеристики и, следовательно, дискриминаторные свойства системы. Наиболее сильный дискриминаторный эффект имеет место

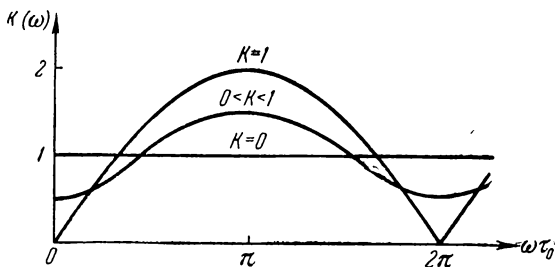


Рис. 14.8.

при значениях k , близких к единице, и фазовых углах $\omega\tau_0$, близких к $0, 2\pi, 4\pi$ и т. д.

2. Проведем расчет метода линии задержки, аналогичный расчету метода контура. Принимая во внимание (14.1.1), (14.2.4) и (14.3.3), можно записать:

$$\begin{aligned}
 B_0[1 + \beta] \cos \left[\omega_0 t + \int_{t_0}^t v_1(\xi) d\xi \right] = \\
 = A_0[1 + \alpha] \cos \left(\omega_0 t + \int_{t_0}^t v(\xi) d\xi \right) - \\
 - k A_0[1 + \alpha'] \cos \left(\omega_0 t - \psi_0 + \int_{t_0}^{t - \tau_0} v(\xi) d\xi \right),
 \end{aligned}$$

где $\alpha' = \alpha(t - \tau_0)$. Отсюда находим, что

$$\begin{aligned}
 B_0[1 + \beta] = A_0 \{ [1 + \alpha]^2 + k^2 [1 + \alpha']^2 - \\
 - 2k[1 + \alpha][1 + \alpha'] \cos(\psi_0 + \Delta\varphi) \}^{1/2},
 \end{aligned}$$

где

$$\Delta\varphi = \varphi(t) - \varphi(t - \tau_0) = \int_{t - \tau_0}^t v(\xi) d\xi.$$

Учитывая, что на основании (14.3.4)

$$B_0 = A_0 \sqrt{1 - 2k \cos \omega_0 \tau_0 + k^2},$$

используя затем малость относительных амплитудных флуктуаций α и α' и $\Delta\varphi$ — флуктуационного набег фазы исследуемого колебания за время задержки, найдем, что

$$\beta(t) = \frac{1}{1+k^2-2k\cos\psi_0} \{ [1-k\cos\psi_0] \alpha(t) + \\ + k[k-\cos\psi_0] \alpha(t-\tau_0) + k\sin\psi_0 \Delta\varphi \}.$$

Находя спектральные плотности мощности левой и правой частей этого соотношения, после несложных, но громоздких вычислений получаем

$$S_\beta(\Omega) = \frac{1}{[1+k^2-2k\cos\psi_0]^2} \left\{ [(1-k^2)^2 + 4k(k-\cos\psi_0) \times \right. \\ \times (1-k\cos\psi_0)\cos^2\frac{\Omega\tau_0}{2}] S_\alpha(\Omega) + 4k^2\sin^2\psi_0 \frac{\sin^2(\Omega\tau_0/2)}{\Omega^2} S_\nu(\Omega) + \\ + 2k[1+k^2-2k\cos\psi_0] \sin\psi_0 \frac{\sin\Omega\tau_0}{\Omega} S_{av}^0(\Omega) + \\ \left. + 4k(1-k^2) \sin\psi_0 \frac{\sin^2(\Omega\tau_0/2)}{\Omega} S_{av}^1(\Omega) \right\}. \quad (14.3.5)$$

За параметр настройки дискриминатора естественно выбрать величину $n = \text{ctg } \psi_0$, поскольку обычно ψ_0 отличается от $2\pi m$ не более чем на $\pi/2$. В таком случае, сравнивая (14.1.3) и (14.3.5), получаем для частотных характеристик дискриминатора следующие выражения:

$$K_\alpha(\Omega, n) = b^2(n) \left[(1-k^2)^2 + \right. \\ \left. + 4k(k-\cos\psi_0)(1-k\cos\psi_0)\cos^2\frac{\Omega\tau_0}{2} \right], \\ K_\nu(\Omega, n) = b^2(n) k^2 \sin^2\psi_0 \frac{\sin^2(\Omega\tau_0/2)}{(\Omega\tau_0/2)^2} \tau_0^2, \quad (14.3.6)$$

$$K_{av}^0(\Omega, n) = 2b(n) k \sin\psi_0 \frac{\sin\Omega\tau_0}{\Omega\tau_0} \tau_0, \\ K_{av}^1(\Omega, n) = b^2(n) (1-k^2) k \sin\psi_0 \frac{\sin^2(\Omega\tau_0/2)}{(\Omega\tau_0/2)^2} \Omega\tau_0^2.$$

Здесь $\cos\psi_0$ и $\sin\psi_0$ являются функциями n ,

$$b(n) = (1+k^2-2k\cos\psi_0)^{-1}.$$

Исходя из тех же требований при измерении $S_\beta(\Omega, n)$, что и в методе контура, необходимо выбрать соответствующее время задержки τ_0 и наивыгоднейшие значения k и ψ_0 . Совершенно очевидно, что для выполнения условия квазистатичности измерений необходимо, чтобы $\Omega_{\max}\tau_0 \ll 2\pi$. Это условие будет удовлетворяться, если

$$\tau_0 \leq 1/(F_{\max}2\pi). \quad (14.3.7)$$

Более того, можно так подобрать условия измерения, чтобы $K_\alpha(\Omega, n)$ вообще не зависела от Ω . Анализируя первую формулу (14.3.6), легко видеть, что это будет выполнено, если будет соблюдено одно из условий

$$k - \cos \psi_0 = 0, \quad 1 - k \cos \psi_0 = 0,$$

совпадающих с (14.3.1) и (14.3.2). Таким образом, эти условия являются чрезвычайно удобными для эксперимента.

При выполнении условий (14.3.1), (14.3.2), (14.3.7) формулы (14.3.6) переходят в следующие:

$$\begin{aligned} K_\alpha(\Omega, n) &= 1, \quad K_\nu(\Omega, n) = n^2 \tau_0^2, \quad K_{\alpha\nu}^0(\Omega, n) = 2n\tau_0, \\ K_{\alpha\nu}^1(\Omega, n) &= \begin{cases} n\tau_0\Omega\tau_0, & k = \cos \psi_0, \\ -n\tau_0\Omega\tau_0, & k = 1/\cos \psi_0. \end{cases} \end{aligned} \quad (14.3.8)$$

При выполнении неравенства (14.3.7) мы, как и в методе контура, имеем малость $K_{\alpha\nu}^1$:

$$|K_{\alpha\nu}^1(\Omega, n)| \ll |K_{\alpha\nu}^0(\Omega, n)|.$$

Поэтому можно для простоты опустить последний член в (14.1.3) и получить

$$\begin{aligned} S_\beta(\Omega, n) &= S_\alpha(\Omega) + \\ &+ n^2 \tau_0^2 S_\nu(\Omega) + 2n\tau_0 S_{\alpha\nu}^0(\Omega). \end{aligned} \quad (14.3.9)$$

График этой зависимости для $S_{\alpha\nu}^0(\Omega) > 0$ показан на рис. 14.9. Проводя измерения спектральной плотности $\beta(t)$ при трех значениях настройки дискриминатора $S_\beta(\Omega, -n)$, $S_\beta(\Omega, 0)$, $S_\beta(\Omega, +n)$, легко найти:

$$S_\alpha(\Omega) = S_\beta(\Omega, 0),$$

$$S_\nu(\Omega) = \frac{1}{2n^2 \tau_0^2} [S_\beta(\Omega, +n) + S_\beta(\Omega, -n) - 2S_\beta(\Omega, 0)], \quad (14.3.10)$$

$$S_{\alpha\nu}^0(\Omega) = \frac{1}{4n\tau_0} [S_\beta(\Omega, +n) - S_\beta(\Omega, -n)].$$

Эти формулы и являются рабочими формулами при измерении флуктуаций амплитуды и частоты методом линии задержки (если спектральной плотностью $S_{\alpha\nu}^1(\Omega)$ можно пренебречь).

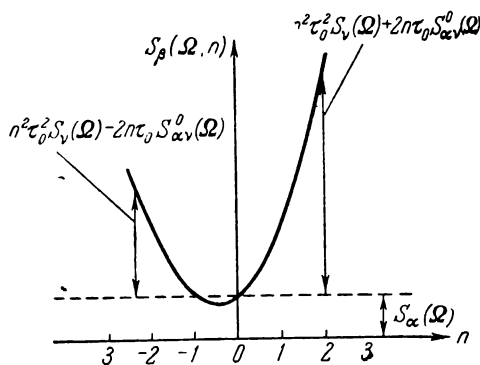


Рис. 14.9.

Метод линии задержки также может быть использован как для генераторов низких частот, так и для высокочастотных генераторов. И. Л. Берштейном (1950 [1]) этот метод применялся, например, для генераторов с частотой 18 МГц, В. Н. Никоновым (1959 [16]), С. К. Лесота (1961 [5]) и другими для измерения флуктуаций амплитуды, частоты и корреляций между ними уотражательных трехсантиметровых клистронов. Сравнение (14.2.7) и (14.3.9) показывает, что, по существу, оба метода чрезвычайно близки друг к другу, что является естественным, поскольку и та, и другая системы являются дискриминаторами.

§ 14.4. Метод балансного моста

1. Как уже неоднократно упоминалось выше, для измерения флуктуаций частоты необходим дискриминатор. Этот дискриминатор, вообще говоря, может быть любым. Поэтому в принципе может существовать много различных методов измерения флуктуаций частоты генераторов, соответствующих различным способам реализации дискриминаторов *).

При этом имеются некоторые общие требования к дискриминаторам не столько принципиального, сколько практического характера, которые позволяют указать наилучшие режимы работы дискриминаторов.

Рассмотрим коэффициент передачи дискриминатора $K(\omega)$, представленный на рис. 14.10. Обратимся к четырем точкам a , b , c , d , в которых, по предположению,

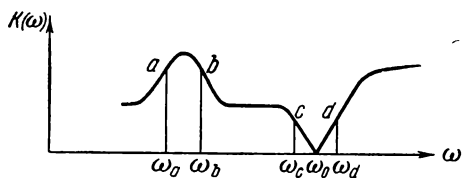


Рис. 14.10.

абсолютные значения производной $dK(\omega)/d\omega$ являются одинаковыми. Какую из этих точек следует выбрать в качестве рабочего режима дискриминатора (считая, что условия квазистатики выполнены)?

Рассмотрим колебание, обладающее флуктуациями амплитуды и частоты. Поскольку на входе и выходе дискриминатора амплитуды колебаний связаны соотношением $B = AK(\omega)$, то для флуктуаций имеем

$$dB = K(\omega) dA + A \frac{dK(\omega)}{d\omega} d\omega.$$

*) В качестве дискриминатора, т. е. частотного детектора, может, например, быть использован частотный детектор, построенный по принципу электронного частотомера (использующего эффект заряда и разряда емкости), имеющего довольно широкое применение в измерителях частотной модуляции колебаний. Такой частотный детектор в качестве дискриминатора использовался Ю. А. Дрягиным (1958 [27]) при измерении флуктуаций частоты генераторов, частота которых лежала в диапазоне $20 \div 200$ МГц.

Отсюда получаем следующее квазистатическое соотношение для $\beta = dB/B$, $\alpha = dA/A$ и $v = d\omega$:

$$\beta = \alpha + \frac{1}{K(\omega)} \frac{dK(\omega)}{d\omega} v. \quad (14.4.1)$$

Отсюда нетрудно получить общие значения частотных характеристик произвольного дискриминатора при соблюдении условий квазистатики:

$$K_\alpha(\Omega, n) = 1, \quad K_v(\Omega, n) = \frac{1}{K^2(\omega)} \left| \frac{dK(\omega)}{d\omega} \right|^2,$$

$$K_{av}^0(\Omega, n) = \frac{1}{K(\omega)} \frac{dK(\omega)}{d\omega}.$$

Легко видеть, что для колебательного контура (14.4.1) дает соотношение (14.2.2), а для линии задержки из (14.3.4) нетрудно получить

$$\beta = \alpha + \frac{k \tau_0 \sin \omega \tau_0}{1 - 2k \cos \omega \tau_0 + k^2} v. \quad (14.4.2)$$

Из § 13.2 следует, что чувствительность тех или иных методов следует оценивать по отношению к *относительным* амплитудным флуктуациям, поступающим на детектор (который следует за дискриминатором). Другими словами, эффективность различных методов следует оценивать по вкладу α и v именно в β — в относительные амплитудные флуктуации колебания, существующего на выходе дискриминатора. Как показывает уравнение (14.4.1), вклад амплитудных флуктуаций исследуемого колебания в β не зависит от характеристик дискриминатора, в то время как вклад флуктуаций частоты существенным образом зависит от значения коэффициента передачи дискриминатора.

Можно считать тот метод измерения флуктуаций частоты более эффективным, для которого величина $\frac{1}{K(\omega)} \left| \frac{dK(\omega)}{d\omega} \right|$, имеющая размерность времени, на частоте изучаемого колебания имеет большее значение, ибо в этом случае вклад частотных флуктуаций в β будет наибольшим.

После этой довольно естественной меры определения качества работы дискриминаторов легко ответить на поставленный выше вопрос. Поскольку по условию $dK(\omega)/d\omega$ во всех точках одинакова (по модулю), то предпочтение следует отдать точкам s и d , так как для них значения $K(\omega)$ меньше (и вклад $v(t)$ в $\beta(t)$, следовательно, больше).

Тем самым рабочую точку дискриминатора следует выбирать не там, где максимальна производная $dK(\omega)/d\omega$, а там, где максимально $\frac{1}{K(\omega)} \frac{dK(\omega)}{d\omega}$. Для $K(\omega)$, представленного на рис. 14.10, наилучшие рабочие точки лежат в окрестности ω_0 .

Нетрудно провести сравнительный анализ методов контура и линии задержки. Пусть для контура $n=1$, тогда (14.2.2) принимает вид

$$\beta = \alpha - \frac{Q}{\omega_0} \nu. \quad (14.4.3)$$

Пусть линия задержки работает в режиме, соответствующем условию (14.3.2), тогда (14.4.2) имеет вид

$$\beta = \alpha + n\tau_0 \nu. \quad (14.4.4)$$

Метод контура и метод линии задержки эквивалентны, если

$$\frac{Q}{\omega_0} = n\tau_0 \quad (14.4.5)$$

(знак перед ν не имеет значения). Тем самым (14.4.5) дает возможность ввести некоторую эквивалентную добротность линии задержки

$$Q_{\text{экв}} = n\omega_0\tau_0 = \omega_0\tau_0 \operatorname{ctg} \psi_0, \quad (14.4.6)$$

позволяющую сравнивать ее с контуром.

Дальнейшие подробности сравнения этих методов будут приведены ниже, при рассмотрении шумов измерительной системы.

2. Вышеизложенное дает основание считать наилучшим коэффициентом передачи дискриминатора такой, который подобен

$K(\omega)$, указанному на рис. 14.10 в районе точки ω_0 . Можно сказать, что он должен быть в какой-то степени «обратным» коэффициенту передачи колебательного контура, т. е. наилучший дискриминатор должен быть, по существу, поглощающим фильтром для некоторой частоты ω_0 . Таким поглощающим

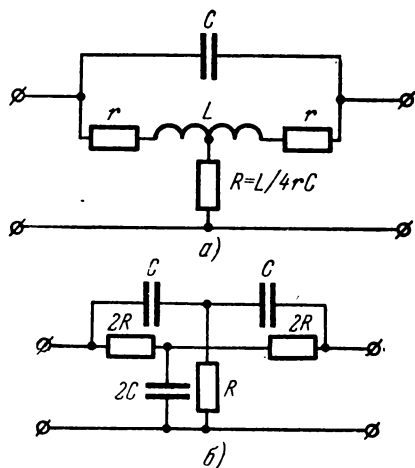


Рис. 14.11.

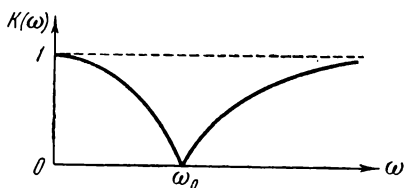


Рис. 14.12

щим фильтром для целого ряда частот $\omega_0 = 2\pi m/\tau_0$ и является, кстати, линия задержки с вычитающим устройством (поглощение является полным, если $k=1$; см. рис. 14.8). Однако такого же вида $K(\omega)$ можно добиться и с помощью сосредоточен-

ных параметров RCL . На рис. 14.11 показаны две схемы T -мостов, являющиеся поглощающими фильтрами и могущие служить хорошими дискриминаторами (на тех частотах, на которых эти схемы работают). На рис. 14.12 приведен график коэффициента передачи указанных T -мостов. Для LCR -моста $\omega_0^2 = 1/LC$, если соблюдено условие баланса моста $4Rr = L/C$. Коэффициент передачи этого моста равен

$$K(\omega) = \frac{|\omega^2 - \omega_0^2|}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4(r/L)^2 \omega^2}}.$$

Для расстройки $\eta = \omega - \omega_0$, много меньшей ω_0 , нетрудно на основании (14.4.1) найти

$$\beta = \alpha + \frac{1}{\eta} v, \quad \eta \neq 0. \quad (14.4.7)$$

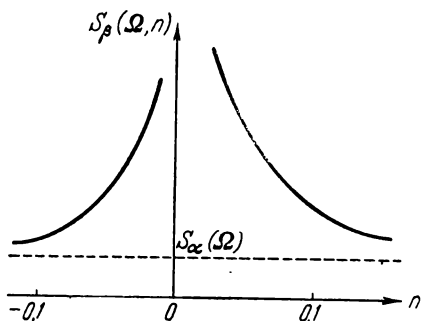


Рис. 14.13.

Отсюда следует, что эффект рассматриваемого дискриминатора тем выше, чем меньше $|\eta|$. Разумеется, слишком малые значения $|\eta|$ брать не следует, так как начинают сказываться медленные уходы параметров и стабильность работы дискриминатора нарушается.

Двойной RC -мост имеет коэффициент передачи, равный

$$K(\omega) = \frac{\sqrt{1 + 4\omega^2\tau^2} |1 - 4\omega^2\tau^2|}{\sqrt{(1 - 20\omega^2\tau^2)^2 + (10 - 8\omega^2\tau^2)^2 \omega^2\tau^2}},$$

где $\tau = RC$. Для него $\omega_0 = 1/2\tau = 1/2RC$. Флуктуационное уравнение для этого моста имеет тот же самый вид (14.4.7). Тем самым рассмотренные два моста эквивалентны.

Следует отметить, что RCL -мост впервые был применен А. И. Чикиным (1962 [2]) в качестве дискриминатора для измерения ширины спектральной линии молекулярного генератора.

3. Если ограничиться условиями квазистатики, то из (14.4.7) нетрудно получить следующее выражение для $S_\beta(\Omega, n)$ (выбрав за параметр настройки $n = \eta/\omega_0$, который по условию много меньше единицы):

$$S_\beta(\Omega, n) = S_\alpha(\Omega) + \frac{1}{n^2 \omega_0^2} S_v(\Omega) + \frac{1}{n \omega_0} S_{av}^0(\Omega).$$

Графически эта зависимость для $S_{av}^0(\Omega) > 0$ показана на рис. 14.13. Задаваясь разными значениями n , нетрудно из $S_\beta(\Omega, n)$ выделить искомые спектральные плотности $S_\alpha(\Omega)$,

$S_v(\Omega)$ и $S_{av}^0(\Omega)$. Недостатком рассмотренного метода является отсутствие такого значения параметра n , при котором $S_\beta(\Omega, n)$ зависит только от $S_\alpha(\Omega)$ (большие значения n трудно реализуемы практически).

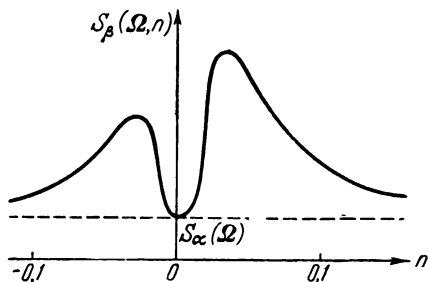


Рис. 14.14.

Для исправления указанного недостатка можно поступить следующим образом. Если RCL -мост несколько разбалансировать (слегка нарушив равенство $R=L/4rC$), то коэффициент передачи дискриминатора в точке $\omega=\omega_0$ пропадет скачок производной, она обратится в нуль и зависимость $S_\beta(\Omega, n)$ от n примет вид, указанный на рис. 14.14. В этом случае $S_\beta(\Omega, 0)=S_\alpha(\Omega)$. Положение максимумов на кривой $S_\beta(\Omega, n)$ зависит от разбалансировки моста.

§ 14.5. Чувствительность методов измерения флуктуаций частоты

При измерении флуктуаций частоты чувствительность сводится к чувствительности измерения амплитудных флуктуаций, поскольку дискриминатор превращает флуктуации частоты в амплитудные флуктуации. Поэтому, воспользовавшись результатами § 13.2 можно для минимально обнаружимой спектральной плотности $S_\beta^{min}(\Omega, n)$ записать следующие соотношения.

1) детектор ламповый, низкие частоты:

$$S_\beta^{min}(\Omega, n) = \frac{10^{-14}}{\Omega}; \quad (14.5.1)$$

2) детектор ламповый, высокие частоты:

$$S_\beta^{min}(\Omega, n) = \frac{e\Gamma^2}{2\pi I}; \quad (14.5.2)$$

3) полупроводниковый детектор:

$$S_\beta^{min}(\Omega, n) = \frac{10^{-2} - 10^{-10}}{\Omega}. \quad (14.5.3)$$

Полагая для простоты, что у исследуемого колебания имеются только частотные флуктуации, на основании (14.1.3) имеем следующее выражение для минимально обнаружимых флуктуаций частоты:

$$S_v^{min}(\Omega) = \frac{1}{K_v(\Omega, n)} S_\beta^{min}(\Omega, n). \quad (14.5.4)$$

Обсудим подробнее эти результаты для методов контура и линии задержки. Рассматривая введенную выше эквивалентную добротность линии задержки $Q_{\text{экв}}$ (см. (14.4.6)), для спектральной плотности $S_v^{\text{min}}(\Omega)$ имеем

$$S_v^{\text{min}}(\Omega) = \frac{\omega_0^2}{Q^2} S_\beta^{\text{min}}(\Omega, n), \quad (14.5.5)$$

где $Q = Q_K$ и $Q = Q_{\text{экв}} = \omega_0 \tau_0 \operatorname{ctg} \psi_0$ соответственно для метода контура и метода линии задержки.

При $Q_K = Q_{\text{экв}}$ чувствительность обоих методов одинакова. Если $Q_K < Q_{\text{экв}}$, то метод контура менее чувствителен, чем метод линии задержки (разумеется, для одной и той же частоты генератора ω_0). Если $Q_K > Q_{\text{экв}}$, то, наоборот, метод линии задержки обладает меньшей чувствительностью, чем метод контура.

Рассмотрим подробнее соотношение между Q_K и $Q_{\text{экв}}$. Казалось бы, что метод линии задержки всегда лучше метода контура, ибо $\operatorname{ctg} \psi_0$ можно сделать сколь угодно большим, выбирая ψ_0 достаточно близко к $2\pi m$ ($m=0, 1, 2, \dots$). Однако при таком угле очень сильно возрастают технические трудности удержания его постоянства, так как начинают сказываться флуктуации параметров линии и т. п. Вместе с этим требуется большая мощность от измеряемого генератора, чтобы на выходе вычитающего устройства получить достаточно большую амплитуду выходного колебания. Опыт показывает, что разумно ограничиться величиной $\psi_0 \approx \pm 5^\circ + 2\pi m$, т. е. значением $n = \operatorname{ctg} \psi_0 = 10$, что и примем для дальнейших оценок.

Итак, пусть частота измеряемого колебания равна f_0 , а максимальная частота измерений F_{max} . В этом случае (14.2.5) и (14.3.7) дают

$$Q_K = f_0 / (10 \cdot F_{\text{max}}), \quad Q_{\text{экв}} = 10 \omega_0 \tau_0 = 10 f_0 / F_{\text{max}} = 100 \cdot Q_K.$$

Следовательно, даже при $n=10$

$$Q_{\text{экв}} \gg Q_K \quad (14.5.6)$$

и метод линии лучше метода контура. Однако условие (14.5.6) не всегда практически может быть выполнено. Дело в том, что мы брали $\tau_0 \approx 1/2\pi F_{\text{max}}$, и если f_0 мала (F_{max} невелика), то для сохранения условия (14.5.6) потребуется линия с очень большим временем задержки, что технически не всегда возможно осуществить. Если брать малое τ_0 , то при уменьшении f_0 эквивалентная добротность линии задержки падает и может оказаться, что $Q_{\text{экв}} < Q_K$.

Рассмотрим два примера.

Пусть $f_0 = 10^{10}$ гц, $F_{\max} = 1,5 \cdot 10^5$ гц. Для неискаженного измерения методом контура требуется колебательный контур с добротностью $Q_K \leq 0,7 \cdot 10^4$. С другой стороны, для неискаженного измерения методом линии задержки ее время задержки должно быть равно

$$\tau_0 \leq 10^{-6} \text{ сек.}$$

Это соответствует электрической длине кабеля, не большей $L = 300$ м. При этом эквивалентная добротность линии задержки будет равна $Q_{\text{экв}} = 10 \cdot 2\pi f_0 \tau_0 = 6,6 \cdot 10^5$. Таким образом, очевидно, что для рассмотренного примера метод линии задержки дает более высокую чувствительность.

Пусть теперь $f_0 = 10^5$ гц и $F_{\max} = 100$ гц. При этих условиях необходим контур с добротностью $Q_K \leq 100$. Чтобы метод линии задержки дал в этих условиях такую же эквивалентную добротность $Q_{\text{экв}} = 100 = 10 \cdot 2\pi f_0 \tau_0$, необходимое время задержки должно быть равным $\tau_0 = 1,6 \cdot 10^{-5}$ сек ($L = 4800$ м). Поэтому, если имеющаяся линия такова, что $L < 4800$ м, следует использовать метод контура, ибо на частоте 100 кгц получить контур с добротностью 100 не представляется трудным.

§ 14.6. Способ приближенной оценки амплитудных флуктуаций

Как уже неоднократно упоминалось, измерение низкочастотных амплитудных флуктуаций у генераторов СВЧ наталкивается на большие трудности вследствие больших шумов детектора. Поэтому представляется важным и интересным даже приближенное определение порядка величины $S_\alpha(\Omega)$ для этих случаев. Можно указать один простой способ приближенной оценки спектральной плотности амплитудных флуктуаций, который не требует дополнительных измерений, кроме измерений спектров флуктуаций частоты.

Будем исходить из того, что нам известны спектральные плотности $S_v(\Omega)$, $S_{av}^0(\Omega)$, $S_{av}^1(\Omega)$, причем последняя спектральная плотность существенно меньше $S_{av}^0(\Omega)$. Предположим, что коррелированные флуктуации амплитуды и частоты исследуемого генератора могут быть представлены следующей взаимосвязью:

$$\alpha(t) = N \frac{v(t)}{\omega_0} + \xi(t), \quad (14.6.1)$$

где N — коэффициент пропорциональности между коррелированными частями относительных флуктуаций амплитуды и частоты, $\xi(t)$ — некоррелированная часть амплитудных флуктуаций.

Спектральные плотности флуктуаций амплитуды и частоты связаны тогда соотношениями

$$S_{\alpha}(\Omega) = \frac{N^2}{\omega_0^2} S_{\nu}(\Omega) + S_{\xi}(\Omega),$$

$$S_{\alpha\nu}^0(\Omega) = \frac{N}{\omega_0} S_{\nu}(\Omega), \quad S_{\alpha\nu}^1(\Omega) \equiv 0.$$

Следовательно, $S_{\alpha}(\Omega)$ может быть представлена следующим образом:

$$S_{\alpha}(\Omega) = \frac{[S_{\alpha\nu}^0(\Omega)]^2}{S_{\nu}(\Omega)} + S_{\xi}(\Omega).$$

Поскольку $S_{\alpha\nu}^0(\Omega)$ и $S_{\nu}(\Omega)$ известны, то отсюда может быть найдена спектральная плотность коррелированной части амплитудных флуктуаций:

$$[S_{\alpha}(\Omega)]_{\text{корр}} = \frac{[S_{\alpha\nu}^0(\Omega)]^2}{S_{\nu}(\Omega)}, \quad (14.6.2)$$

являющаяся первой примерной оценкой для $S_{\alpha}(\Omega)$.

Кроме того, легко может быть определен коэффициент N :

$$N = \frac{\omega_0 S_{\alpha\nu}^0(\Omega)}{S_{\nu}(\Omega)}. \quad (14.6.3)$$

Если этот коэффициент можно считать не зависящим от частоты Ω , то, следовательно, как приближение, соотношение (14.6.1) можно считать справедливым.

Верхнюю границу для $S_{\alpha}(\Omega)$ можно получить из измеренной спектральной плотности суммарных флуктуаций на выходе детектора:

$$S_{\pi}(\Omega, n) = \bar{u}^2 l^2 S_{\beta}(\Omega, n) + S_{\text{ш}}(\Omega).$$

Полагая $n=0$, получим

$$\bar{u}^{-2} l^{-2} S_{\pi}(\Omega, 0) = S_{\alpha}(\Omega) + \bar{u}^{-2} l^{-2} S_{\text{ш}}(\Omega).$$

Таким образом, верхняя граница для $S_{\alpha}(\Omega)$ равна

$$[S_{\alpha}(\Omega)]_{\text{верхн}} = \frac{1}{\bar{u}^2 l^2} S_{\pi}(\Omega, 0). \quad (14.6.4)$$

ГЕТЕРОДИННЫЕ МЕТОДЫ ИЗМЕРЕНИЯ ФЛУКТУАЦИЙ АМПЛИТУДЫ И ЧАСТОТЫ ГЕНЕРАТОРОВ

Из анализа, проведенного в двух предыдущих главах, следует, что основная трудность в экспериментальном исследовании флуктуаций амплитуды и частоты автогенераторов заключается в отделении «полезных» флуктуаций на выходе детектора от собственных шумов детектора. И если на тех частотах, где можно еще использовать ламповые малозумящие детекторы, ситуация более или менее благополучна, то на высоких частотах, где приходится употреблять полупроводниковые диоды, чувствительность рассмотренных методов измерения оставляет желать лучшего. В связи с этим возникает довольно естественная идея — перевести высокочастотные квазимонохроматические колебания в сравнительно низкочастотные, используя метод гетеродинирования. Однако осуществление этой довольно заманчивой идеи наталкивается на ряд достаточно больших трудностей. Для того чтобы высокочастотное колебание перевести в область сравнительно низких частот, необходимо выполнение двух условий.

Во-первых, необходим монохроматический сигнал, частота которого близка к частоте исследуемого колебания. Во-вторых, необходим стабильный нелинейный элемент — смеситель (в простейшем случае диод), работающий на высоких частотах.

Как непрерывно показывается на протяжении всей книги — монохроматических колебаний не существует. Поэтому гетеродин, дающий вспомогательное напряжение, дает тем самым колебание с шириной линии, в лучшем случае сравнимой с шириной спектральной линии исследуемого генератора (поскольку мы рассматриваем малые флуктуации амплитуды и частоты, поэтому предполагается, что исследуемый генератор обладает достаточно малой шириной спектральной линии).

В качестве смесителя на высоких частотах приходится использовать тот же самый полупроводниковый диод, обладающий

фликкерным шумом. Как было сказано в гл. 3, фликкерный шум любых элементов есть свидетельство существования флуктуаций параметров этих элементов. Поэтому любой реальный смеситель обладает флуктуациями коэффициента передачи.

Таким образом, идея гетеродинирования исследуемого высокочастотного сигнала в область низких частот приводит прежде всего к следующей задаче. Как немонохроматичность гетеродина и нестабильность коэффициента передачи смесителя влияют на преобразование спектра исследуемого сигнала?

Решению этой задачи и посвящены первые два параграфа настоящей главы. На основании полученных результатов оценивается чувствительность гетеродинного метода измерения флуктуаций амплитуды и частоты и проводится сравнение с прямым методом измерения (на частоте исследуемого сигнала).

В последнем параграфе обсуждается возможность непосредственного измерения формы спектральной линии автогенератора.

§ 15.1. Прохождение квазимонохроматического сигнала через идеальный смеситель

Рассмотрим преобразование формы спектра сигнала, проходящего через смеситель. Обратимся сначала к такому смесителю, флуктуациями коэффициента передачи которого можно пренебречь. Будем говорить в таком случае, что имеется идеальный смеситель. Примем также для общности; что напряжение гетеродина является случайным сигналом (с заданными характеристиками), статистически независимыми от входного сигнала, который мы также считаем в общем случае случайным.

1. Интересуясь на выходе смесителя только диапазоном разностных частот, можно без потери общности рассматривать следующее уравнение идеального смесителя с коэффициентом передачи K_c

$$z_1(t) = K_c x(t) y(t), \quad (15.1.1)$$

где $z_1(t)$ — выходное напряжение, $x(t)$ — случайное напряжение сигнала, $y(t)$ — случайное напряжение гетеродина. Будем полагать, что вслед за идеальным смесителем следует фильтр, имеющий выходную переменную $z(t)$ и пропускающий только разностную частоту (рис. 15.1). Вследствие статистической независимости $x(t)$ и $y(t)$ имеем

$$Z_{z_1}[t_1, t_2] = K_c^2 K_x[t_1, t_2] K_y[t_1, t_2].$$

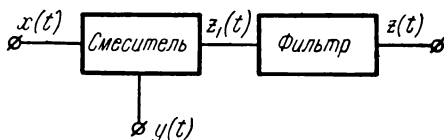


Рис. 15.1.

Предположим также, что справедлива следующая формула:

$$\Phi_{z_1}(\tau) = K_c^2 \Phi_x(\tau) \Phi_y(\tau). \quad (15.1.2)$$

При стационарных $x(t)$ и $y(t)$ справедливость (15.1.2) очевидна. При нестационарных процессах $x(t)$ и $y(t)$ формула (15.1.2) также может иметь место. Следовательно, для спектральной плотности $S_{z_1}(\omega)$ имеем

$$S_{z_1}(\omega) = K_c^2 \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(\xi) S_y(\xi - \omega) d\xi. \quad (15.1.3)$$

Отсюда следует, что в общем случае форма спектра сигнала на выходе смесителя не совпадает с формой входного сигнала, если гетеродинное напряжение не является монохроматическим сигналом. Другими словами, при прохождении какого-либо сигнала через смеситель в общем случае форма спектра сигнала искажается.

Ограничимся для дальнейшего случаям узкополосных сигналов $x(t)$ и $y(t)$. Пусть спектры случайных функций $x(t)$ и $y(t)$ симметричны относительно частот соответственно ω_1 и ω_2 , ширина их много меньше ω_1 , ω_2 и $\omega_p = |\omega_2 - \omega_1|$. В этом случае функции корреляции процесса $x(t)$ и $y(t)$ имеют вид (см., например, [3])

$$\Phi_x = A_x^0(\tau) \cos \omega_1 \tau, \quad \Phi_y = A_y^0(\tau) \cos \omega_2 \tau, \quad (15.1.4)$$

где функции $A^0(\tau)$ — четные функции, медленные по сравнению с $\cos \omega_1 \tau$, $\cos \omega_2 \tau$, $\cos \omega_p \tau$. На основании (15.1.2) имеем

$$\Phi_{z_1}(\tau) = \frac{1}{2} K_c^2 A_x^0(\tau) A_y^0(\tau) [\cos \omega_p \tau + \cos (\omega_1 + \omega_2) \tau].$$

На выходе фильтра получаем

$$\Phi_z(\tau) = A_z^0(\tau) \cos \omega_p \tau, \quad A_z^0(\tau) = \frac{1}{2} K_c^2 A_x^0(\tau) A_y^0(\tau). \quad (15.1.5)$$

Обозначим фурье-сопряженные от $A_z^0(\tau)$, $A_x^0(\tau)$, $A_y^0(\tau)$ соответственно $W_z(\Omega)$, $W_x(\Omega)$, $W_y(\Omega)$. Аргументы этих спектральных плотностей отсчитываются от частот соответственно ω_p , ω_1 , ω_2 , а сами спектральные плотности представляют, по существу, формы спектральных линий выходного сигнала, входного сигнала и сигнала гетеродина (рис. 15.2). Тем самым, формы спектральных линий связаны соотношением

$$W_z(\Omega) = \frac{1}{2} K_c^2 \int_{-\infty}^{+\infty} W_x(\xi) W_y(\xi - \Omega) d\xi, \quad (15.1.6)$$

которое еще раз подтверждает в общем случае сильное влияние формы спектральной линии гетеродина на форму линии выходного колебания.

2. Рассмотрим сначала два предельных случая. Пусть ширина спектральной линии сигнала Π_x много меньше ширины спектра гетеродина Π_y . Такой случай может быть тогда, когда

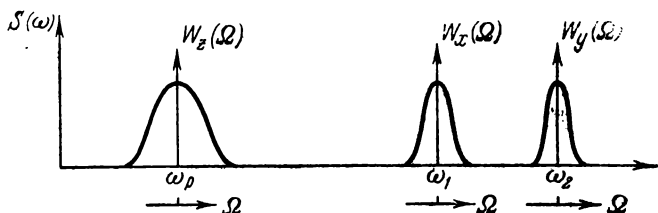


Рис. 15.2.

для гетеродинирования высокостабильного генератора в качестве гетеродина используется худший генератор. Можно считать, что $W_x(\Omega)$ отлично от нуля только на интервале $(-\Pi_x, \Pi_x)$ и на интервале такой длины $W_y(\Omega)$ постоянно. Тогда

$$\begin{aligned} W_z(\Omega) &= \frac{K_c^2}{2} \int_{[-\Pi_x, \Pi_x]} W_x(\xi) W_y(\xi - \Omega) d\xi = \\ &= \frac{K_c^2}{2} W_y(\Omega) \int_{[-\Pi_x, \Pi_x]} W_x(\xi) d\xi = A_x(0) \frac{K_c^2}{2} W_y(\Omega). \end{aligned}$$

Форма спектральной линии выходного колебания пропорциональна форме линии гетеродина, а от формы линии сигнала никаких следов не осталось.

Если же $\Pi_y \ll \Pi_x$ (ситуация, в которой сигнал гетеродина можно считать монохроматическим), то аналогично имеем

$$W_z(\Omega) = A_y(0) \frac{K_c^2}{2} W_x(\Omega), \quad (15.1.7)$$

т. е. только в этом случае форма спектральной линии колебания не искажается при прохождении через смеситель.

Пусть теперь $x(t)$ и $y(t)$ являются выходами каких-либо автогенераторов:

$$\begin{aligned} x(t) &= A_0 [1 + \alpha(t)] \cos \left[\omega_1 t + \int v_1(t) dt \right], \\ y(t) &= B_0 [1 + \beta(t)] \cos \left[\omega_2 t + \int v_2(t) dt \right], \end{aligned} \quad (15.1.8)$$

где $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $v_1(t)$, $v_2(t)$ — малые флуктуации амплитуды и частоты, являющиеся нормально распределенными и стационарными случайными процессами. Предположим также для простоты рассмотрения, что амплитудные флуктуации статистически независимы от частотных. В этом случае, как следует из гл. 4,

$$\begin{aligned} A_x^0(\tau) &= \frac{A_0^2}{2} [1 + \Phi_\alpha(\tau)] \exp[-\chi_1(\tau)], \\ A_y^0(\tau) &= \frac{B_0^2}{2} [1 + \Phi_\beta(\tau)] \exp[-\chi_2(\tau)], \end{aligned} \quad (15.1.9)$$

где $\chi_{1,2}(\tau)$ связано с $\Phi_{v_{1,2}}(\tau)$ в соответствии с формулой (4.5.9).

Выходное колебание разностной частоты также, очевидно, может быть представлено в виде

$$z(t) = C_0 [1 + \gamma(t)] \cos \left[\omega_p t + \int \nu(t) dt \right].$$

Кроме того, имеем

$$A_z^0(\tau) = \frac{C_0^2}{2} [1 + \Phi_\gamma(\tau)] \exp[-\chi(\tau)]. \quad (15.1.10)$$

Чтобы можно было воспользоваться формулой (15.1.5), необходимо убедиться в том, что для рассматриваемого случая соотношение (15.1.2) является справедливым. Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} K_x[t, t + \tau] &= \frac{A_0^2}{2} [1 + K_\alpha[\tau]] \cos \omega_1 \tau e^{-\chi_1(\tau)} + \\ &+ \frac{A_0^2}{2} [1 + K_\alpha[\tau]] \cos(\omega_1 \tau + 2\omega_1 t) \left\langle \cos \left[\int^t v_1(\xi) d\xi + \int^{t+\tau} v_1(\xi) d\xi \right] \right\rangle; \end{aligned}$$

такой же вид имеют корреляционные функции для $y(t)$ и $z(t)$. Первое слагаемое зависит только от τ , а второе — от τ и от t , причем от t — осцилляционным образом. Это приводит как раз к тому, что для функций корреляции $\Phi_x(\tau)$, $\Phi_y(\tau)$, $\Phi_z(\tau)$, связанных с корреляционными функциями известным образом (см. (1.4.2)), справедливо соотношение (15.1.2).

Сравнивая (15.1.5) с (15.1.9) и (15.1.10), нетрудно получить следующие соотношения:

$$C_0^2 = K_c^2 A_0^2 B_0^2 / 4,$$

$$\Phi_\gamma(\tau) = \Phi_\alpha(\tau) + \Phi_\beta(\tau) + \Phi_\alpha(\tau) \Phi_\beta(\tau),$$

$$\chi(\tau) = \chi_1(\tau) + \chi_2(\tau).$$

Учитывая малость амплитудных флуктуаций и формулу (4.5.9), будем иметь окончательно

$$\Phi_{\gamma}(\tau) = \Phi_{\alpha}(\tau) + \Phi_{\beta}(\tau), \quad \Phi_{\nu}(\tau) = \Phi_{\nu_1}(\tau) + \Phi_{\nu_2}(\tau), \quad (15.1.11)$$

а следовательно, и

$$\begin{aligned} S_{\gamma}(\Omega) &= S_{\alpha}(\Omega) + S_{\beta}(\Omega), \quad \langle \gamma^2 \rangle = \langle \alpha^2 \rangle + \langle \beta^2 \rangle, \\ S_{\nu}(\Omega) &= S_{\nu_1}(\Omega) + S_{\nu_2}(\Omega), \quad \langle \nu^2 \rangle = \langle \nu_1^2 \rangle + \langle \nu_2^2 \rangle. \end{aligned} \quad (15.1.12)$$

Амплитудные и частотные флуктуации выходного напряжения получаются, таким образом, как результат сложения соответственно амплитудных и частотных флуктуаций сигнала и гетеродина. И если только флуктуации гетеродина много меньше соответствующих флуктуаций сигнала, ими можно пренебрегать.

Из полученных результатов следует также, что в общем случае ширина спектральной линии колебания на выходе смесителя всегда больше ширины спектральной линии входного колебания.

§ 15.2. Учет неустойчивости смесителя

Как уже указывалось выше (см. гл. 3), параметры как ламповых, так и полупроводниковых диодов испытывают флуктуации. Нетрудно понять, что это приводит в общем случае к неустойчивости коэффициента передачи смесителя, использующего эти диоды (см. [130, 132]).

Рассмотрим, как влияют флуктуации коэффициента передачи смесителя на прохождение через него квазимонохроматического сигнала [133].

1. Пусть коэффициент передачи смесителя равен

$$K = K_c [1 + \sigma(t)], \quad (15.2.1)$$

где для простоты полагаем, что $\langle \sigma^2(t) \rangle \ll 1$, $\langle \sigma(t) \rangle = 0$ и $\sigma(t)$ — стационарный случайный процесс, статистически независимый от входного сигнала и сигнала гетеродина. Тогда вместо (15.1.1) будем иметь

$$u_1(t) = K_c [1 + \sigma(t)] x(t) y(t).$$

Пусть функция корреляции выхода смесителя равна

$$\Phi_{u_1}(\tau) = [1 + \Phi_{\sigma}(\tau)] \Phi_{z_1}(\tau).$$

На выходе фильтра разностной частоты будем иметь колебание, которое обозначим $u(t)$. Его функция корреляции будет равна

$$\Phi_u(\tau) = A_u^0(\tau) \cos \omega_p \tau,$$

где на основании (15.1.5)

$$A_u^0(\tau) = A_z^0(\tau) + \Phi_\sigma(\tau) A_z^0(\tau). \quad (15.2.2)$$

Совершая фурье-преобразование (15.2.2), получим

$$W_u(\Omega) = W_z(\Omega) + \int_{-\infty}^{+\infty} W_z(\xi) S_\sigma(\xi - \Omega) d\xi. \quad (15.2.3)$$

Отсюда следует, что $W_u(\Omega)$ — спектр (форма спектральной линии) колебания на выходе реального смесителя, состоит из спектра $W_z(\Omega)$ — формы линии выхода идеального смесителя и свертки спектров $W_z(\Omega)$ и $S_\sigma(\Omega)$. Структура спектра $W_z(\Omega)$ подробно рассмотрена в предыдущем параграфе; будем считать ее заданной и рассмотрим вопрос о том, насколько спектр $W_u(\Omega)$ отличается от спектра $W_z(\Omega)$.

Проанализируем (15.2.3). Предположим сначала, что флуктуации коэффициента передачи смесителя $\sigma(t)$ имеют весьма узкий спектр, ширина которого Π_σ много меньше Π_z — ширины спектра сигнала $z(t)$. Это может иметь место, например, в случае очень медленных флуктуаций коэффициента передачи смесителя. На основании § 15.1 будем иметь тогда

$$W_u(\Omega) = W_z(\Omega) + \langle \sigma^2 \rangle S_\sigma(\Omega) = W_z(\Omega).$$

Итак, в этом случае флуктуации коэффициента передачи смесителя не вносят дополнительных искажений в форму спектра на выходе смесителя ни на каких частотах Ω .

В действительности, однако, по-видимому, чаще всего имеет место обратная ситуация. Ширина спектральной линии генераторов, как было показано ранее, сравнительно невелика даже на СВЧ. Если за относительную ширину линии взять величину 10^{-7} , то для $f_p = 10^{10}$ гц ширина спектра составит всего 1 кГц, в то время как спектр флуктуаций $\sigma(t)$ (спектр фликкерного шума диодов) может быть существен (особенно для полупроводниковых диодов) до гораздо более высоких частот. Поэтому в реальных условиях может быть такой случай, когда спектр $S_\sigma(\Omega)$ следует считать много шире спектра $W_z(\Omega)$. В этом случае

$$W_u(\Omega) = W_z(\Omega) + \langle z^2 \rangle S_\sigma(\Omega), \quad (15.2.4)$$

где $\langle z^2 \rangle = \frac{1}{8} K_c^2 A_0^2 B_0^2$.

Таким образом, если спектр $S_\sigma(\Omega)$ много шире спектра $W_z(\Omega)$, то из (15.2.4) следует, что для достаточно малых частот $\Omega \ll \Omega_K$, где Ω_K — некоторая критическая частота, $W_z(\Omega) \gg \langle z^2 \rangle S_\sigma(\Omega)$ и $W_u(\Omega) \approx W_z(\Omega)$.

С другой стороны, для достаточно больших частот $\Omega \gg \Omega_K$ $W_z(\Omega) \ll \langle z^2 \rangle S_\sigma(\Omega)$, и тогда $W_u(\Omega) \approx \langle z^2 \rangle S_\sigma(\Omega)$.

Критическая частота Ω_K может быть определена, например, следующим соотношением:

$$W_z(\Omega_K) = \langle z^2 \rangle S_\sigma(\Omega_K).$$

Существование Ω_K говорит о том, что флуктуации коэффициента передачи смесителя не вносят существенных искажений в спектр сигнала для $\Omega \ll \Omega_K$, но они существенно искажают спектр сигнала для $\Omega \approx \Omega_K$ и полностью определяют спектр колебания на выходе смесителя для $\Omega \gg \Omega_K$.

2. Оценим теперь вклад флуктуаций коэффициента передачи смесителя в амплитудные и частотные флуктуации выходного напряжения.

Используя (15.2.2), (15.1.10), (15.1.11) и учитывая малость $\Phi_\sigma(\tau)$, представляя далее выходное колебание $u(t)$ в виде

$$u(t) = D_0 [1 + \varepsilon(t)] \cos \left[\omega_p t + \int v_u(t) dt \right],$$

и соответственно

$$A_u^0(\tau) = \frac{D_0^2}{2} [1 + \Phi_\varepsilon(\tau)] e^{-\chi_u(\tau)},$$

можно после несложных вычислений найти, что

$$\begin{aligned} D_0 &= C_0, \quad \chi_u(\tau) = \chi(\tau), \\ \Phi_\varepsilon(\tau) &= \Phi_\alpha(\tau) + \Phi_\beta(\tau) + \Phi_\sigma(\tau), \\ \Phi_{v_u}(\tau) &= \Phi_{v_1}(\tau) + \Phi_{v_2}(\tau). \end{aligned} \quad (15.2.5)$$

Тем самым существование неустойчивости коэффициента передачи смесителя не оказывает никакого влияния на флуктуации частоты выходного сигнала, влияя лишь на амплитудные флуктуации.

Спектральная плотность относительных амплитудных флуктуаций на выходе неустойчивого смесителя равна

$$S_\varepsilon(\Omega) = S_\alpha(\Omega) + S_\beta(\Omega) + S_\sigma(\Omega). \quad (15.2.6)$$

Отсюда следует, что на $\varepsilon(t)$ одинаково влияют амплитудные флуктуации входного напряжения, амплитудные флуктуации гетеродина и флуктуации коэффициента передачи смесителя.

Что касается влияния флуктуаций коэффициента передачи смесителя на форму спектральной линии проходящего через смеситель сигнала, то из (15.2.5) и (15.2.6) следует, что на форму пика спектральной линии флуктуации $\sigma(t)$ не влияют, искажая главным образом пьедестал и сравнительно меньше крылья линии.

§ 15.3. Чувствительность гетеродинного метода измерений амплитудных и частотных флуктуаций

1. Теперь уже нетрудно оценить чувствительность гетеродинного метода измерений флуктуаций частоты и амплитуды. Пусть у нас имеется исследуемый высокочастотный генератор частоты ω_1 , вспомогательный генератор частоты ω_2 , служащий гетеродином, смеситель с нестабильным коэффициентом передачи и фильтр разностной частоты. С выхода фильтра колебание подается на дискриминатор, выполненный, например, по методу

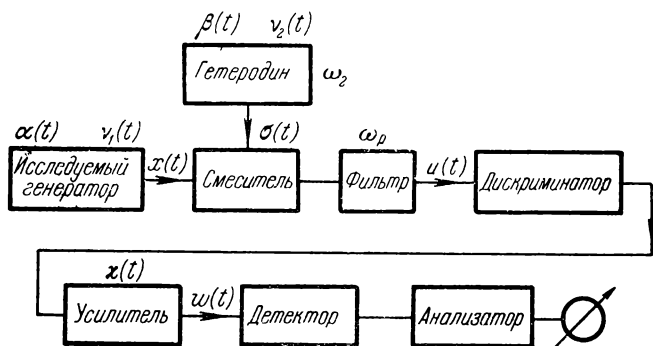


Рис. 15.3.

балансного моста или линии задержки. При этом амплитуда колебания на выходе дискриминатора может быть очень малой (малое значение $K(\omega)$). Поэтому, для того чтобы детектор, следующий за дискриминатором, нормально функционировал, необходимо перед детектором поставить усилитель. Любой реальный усилитель, как было ранее указано, обладает флуктуациями коэффициента передачи. Поэтому мы примем, что коэффициент передачи усилителя для колебания частоты ω_0 равен $K_y[1 + \kappa(t)]$. Флуктуации усиления $\kappa(t)$ будем считать малым, случайным стационарным процессом ($\langle \kappa(t) \rangle = 0$, $\langle \kappa^2(t) \rangle \ll 1$). Вместе с этим предположим, что сигнал на выходе дискриминатора не слишком мал, так чтобы по сравнению с ним шумами усилителя, существующими в его полосе, можно было пренебречь. Нетрудно видеть, что полоса этого усилителя определяется F_{\max} — максимальной частотой, на которой измеряются спектральные плотности амплитудно-частотных флуктуаций, и может быть достаточно малой по сравнению с f_p . За усилителем следует детектор и, наконец, анализатор спектра. Блок-схема всей этой измерительной установки показана на рис. 15.3.

Колебание разностной частоты ω_p , существующее на входе детектора, представим как

$$w(t) = W_0[1 + \mu(t)] \cos[\omega_p t + \varphi_w(t)].$$

Амплитудные флуктуации этого колебания $\mu(t)$ включают в себя флуктуации амплитуды и частоты исследуемого колебания $\alpha(t)$ и $\nu_1(t)$, флуктуации амплитуды и частоты гетеродина $\beta(t)$ и $\nu_2(t)$, флуктуации коэффициента передачи смесителя $\sigma(t)$ и, наконец, флуктуации коэффициента усиления усилителя $\kappa(t)$.

На основании полученных выше результатов можно написать следующее выражение для спектральной плотности $S_\mu(\Omega)$:

$$\begin{aligned} S_\mu(\Omega, n) = & S_\kappa(\Omega) + K_\alpha(\Omega, n)[S_\alpha(\Omega) + S_\beta(\Omega) + S_\sigma(\Omega)] + \\ & + K_\nu(\Omega, n)[S_{\nu_1}(\Omega) + S_{\nu_2}(\Omega)] + K_{\alpha\nu}^0(\Omega, n)[S_{\alpha\nu_1}^0(\Omega) + S_{\beta\nu_2}^0(\Omega)] + \\ & + K_{\alpha\nu}^1(\Omega, n)[S_{\alpha\nu_1}^1(\Omega) + S_{\beta\nu_2}^1(\Omega)]. \end{aligned} \quad (15.3.1)$$

Это точное выражение учитывает все вышеперечисленные флуктуации, а также корреляции между амплитудными и частотными флуктуациями исследуемого колебания и между амплитудными и частотными флуктуациями гетеродина.

Если даже считать, что все спектральные плотности всех флуктуаций (кроме $\alpha(t)$ и $\nu_1(t)$) известны, то все равно, измеряя $S_\mu(\Omega)$, довольно сложно извлечь из (15.3.1) информацию о спектральных плотностях $S_\alpha(\Omega)$, $S_{\nu_1}(\Omega)$, $S_{\alpha\nu_1}^0(\Omega)$, $S_{\alpha\nu_1}^1(\Omega)$.

В действительности же ситуация, имеющая место при использовании гетеродинного метода является еще более сложной, ибо неизвестны флуктуационные характеристики гетеродина. Предполагается, что измерить их отдельно невозможно, ибо если бы мы смогли измерить каким-либо способом спектральные плотности $S_\beta(\Omega)$, $S_{\nu_2}(\Omega)$, $S_{\beta\nu_2}^0(\Omega)$, $S_{\beta\nu_2}^1(\Omega)$, то мы смогли бы измерить подобные характеристики и для исследуемого генератора и тем самым не нуждались бы в гетеродинном методе*). Тем не менее задача определения флуктуаций амплитуды и частоты исследуемого генератора методом гетеродинирования остается. Для решения этой задачи можно, например, поступить следующим образом. Взять три генератора A , B , C и измерить $S_\beta(\Omega, n)$ для трех пар AB , AC , BC , в которых первый генератор стоит на месте исследуемого, а второй — на месте гетеродина. Вследствие

*) Разумеется, кроме того тривиального случая, когда флуктуациями гетеродина вообще можно пренебречь по сравнению с флуктуациями исследуемого генератора.

симметричности формулы (15.3.1) по отношению к спектральным плотностям флуктуаций исследуемого генератора и гетеродина они полностью равноправны для рассматриваемого гетеродинного метода. Поэтому фактически мы получаем данные лишь о суммарных спектральных плотностях:

$$S_{\alpha}(\Omega) + S_{\beta}(\Omega), \quad S_{v_1}(\Omega) + S_{v_2}(\Omega), \quad S_{\alpha v_1}^0(\Omega) + S_{\beta v_2}^0(\Omega), \\ S_{\alpha v_1}^1(\Omega) + S_{\beta v_2}^1(\Omega).$$

Измеряя эти суммы последовательно для трех указанных пар автогенераторов, можно найти спектральные плотности для каждого генератора в отдельности. Например, если измерения дали:

$$S_{\alpha A}(\Omega) + S_{\alpha B}(\Omega) = S_1(\Omega), \\ S_{\alpha A}(\Omega) + S_{\alpha C}(\Omega) = S_2(\Omega), \\ S_{\alpha B}(\Omega) + S_{\alpha C}(\Omega) = S_3(\Omega),$$

то отсюда элементарно находим:

$$S_{\alpha A}(\Omega) = \frac{1}{2} [S_1(\Omega) + S_2(\Omega) - S_3(\Omega)], \\ S_{\alpha B}(\Omega) = \frac{1}{2} [S_1(\Omega) + S_3(\Omega) - S_2(\Omega)], \\ S_{\alpha C}(\Omega) = \frac{1}{2} [S_2(\Omega) + S_3(\Omega) - S_1(\Omega)].$$

Имеется еще и другой, более простой способ. Исследуемый генератор и гетеродин берутся почти идентичными, так что можно считать, что они обладают одинаковыми (но статистически независимыми) спектральными плотностями. В этом случае следует измеренные суммарные спектральные плотности просто поделить пополам. Именно таким образом, например, А. И. Чикиным (1962 [2]) было проведено измерение спектральной плотности флуктуаций частоты молекулярных генераторов на аммиаке ($\lambda = 1,25$ см), которые сбивались на звуковую частоту, равную $f_p = 3$ кГц. Блок-схема экспериментальной установки А. И. Чикина как раз соответствует рис. 15.3.

2. Оценим чувствительность рассматриваемого метода отдельно для амплитудных и частотных флуктуаций, полагая генератор и гетеродин идентичными и пренебрегая совместными спектральными плотностями. При этом предположим, что условия квазистатичности соблюдаются, а также $K_{\alpha}(\Omega, n) = 1$, $K_v(\Omega, n^*) = Q^2/\omega_p^2$, где n^* — конкретное (оптимальное) значение параметра настройки дискриминатора при изменении флуктуаций частоты.

Пусть генераторы обладают только амплитудными флуктуациями; тогда из (15.3.1) следует, что

$$S_{\mu}(\Omega, n) = S_{\kappa}(\Omega) + 2S_{\alpha}(\Omega) + S_{\sigma}(\Omega). \quad (15.3.2)$$

Если генераторы обладают только частотными флуктуациями, то из (15.3.1) следует, что при $n = n^*$

$$S_{\mu}(\Omega, n^*) = S_{\kappa}(\Omega) + S_{\sigma}(\Omega) + \frac{Q^2}{\omega_p^2} 2S_{\nu}(\Omega). \quad (15.3.3)$$

Как уже было показано выше, собственные шумы детектора и анализатора определяют минимально обнаружимую спектральную плотность относительных флуктуаций амплитуды на входе детектора, которая в нашем случае есть $S_{\mu}^{\min}(\Omega, n)$, и ее численные значения определяются формулами (14.5.1) — (14.5.3). Анализируя (15.3.2), нетрудно видеть следующее. Если «паразитные» спектральные плотности $S_{\kappa}(\Omega)$ и $S_{\sigma}(\Omega)$ таковы, что для интересующих нас частот

$$S_{\kappa}(\Omega) + S_{\sigma}(\Omega) \ll S_{\mu}^{\min}(\Omega, n),$$

то чувствительность измерения амплитудных флуктуаций определяется формулой

$$S_{\alpha}^{\min}(\Omega) = \frac{1}{2} S_{\mu}^{\min}(\Omega, n). \quad (15.3.4)$$

Если сумма $S_{\kappa}(\Omega) + S_{\sigma}(\Omega)$ сравнима с $S_{\mu}^{\min}(\Omega, n)$ или больше и известна с точностью лучшей, чем $S_{\mu}^{\min}(\Omega, n)$, то по-прежнему справедлива формула (15.3.4). Если $S_{\kappa}(\Omega) + S_{\sigma}(\Omega)$ известна с какой-либо худшей точностью, то с этой же точностью известна и $2S_{\alpha}(\Omega)$. Если же указанная сумма совсем неизвестна, то из измеренной $S_{\mu}(\Omega)$ следует только то, что $S_{\mu}(\Omega)$ является верхним пределом для $2S_{\alpha}(\Omega)$.

Таким образом, для успешного определения амплитудных флуктуаций генератора методом гетеродинирования необходимо довольно точное знание спектральной плотности $S_{\kappa}(\Omega) + S_{\sigma}(\Omega)$.

Флуктуации коэффициента усиления усилителя, работающего на разностной частоте ω_p , измерить с достаточной степенью точности не сложно. Основная трудность состоит в определении величины $S_{\sigma}(\Omega)$. При ее измерении возникают те же трудности, что и при определении шумов детектора (при непосредственном измерении флуктуаций амплитуды). Более того, для полупроводникового диода спектральные плотности $S_{\kappa}(\Omega)$ и $\frac{1}{u} S_{ш. д}(\Omega)$ (см. § 13.2) имеют одинаковый порядок величины. Это значит,

что гетеродинный метод фактически не дает никаких преимуществ перед непосредственным детектированием при измерении флуктуаций амплитуды генераторов СВЧ (см. также (1964 [2])).

Иное дело в отношении чувствительности измерения флуктуаций частоты генератора. Поскольку $S_\mu(\Omega, n)$ зависит от n , то в формуле (15.3.3) можно выделить последний член, исчезающий при некоторых значениях n . Следовательно, вместо (15.3.3) следует писать

$$S_\mu(\Omega, n^*) = \frac{Q^2}{\omega_p^2} 2S_v(\Omega).$$

Тогда

$$S_v^{\text{min}}(\Omega) = \frac{\omega_p^2}{2Q^2} S_\mu^{\text{min}}(\Omega, n^*).$$

Здесь спектральная плотность $S_\mu^{\text{min}}(\Omega, n^*)$ определяется шумами детектора, работающего на разностной частоте, т. е. здесь можно брать ламповый детектор, для которого на основании § 14.5 эта спектральная плотность по крайней мере на три-четыре порядка меньше, чем для полупроводникового диода.

Следовательно, чувствительность гетеродинного метода измерений спектра флуктуаций частоты лучше на три-четыре порядка по сравнению с измерением на основной частоте генератора.

§ 15.4. О возможности непосредственного измерения формы спектральной линии автогенератора

1. Для целого ряда практических задач необходимо знать не спектры амплитудных и частотных флуктуаций автогенераторов, а непосредственно форму спектральной линии, спектр самого колебания $W_x(\Omega)$. Как следует из гл. 4, форма спектральной линии $W_x(\Omega)$ сложным образом зависит от амплитудных и частотных флуктуаций. Если флуктуации амплитуды и частоты имеют нормальное распределение, то в принципе по известным спектральным плотностям $S_a(\Omega)$, $S_v(\Omega)$, $S_{av}^0(\Omega)$, $S_{av}^1(\Omega)$ можно вычислить $W_x(\Omega)$, хотя в общем случае это представляется довольно сложной процедурой. Если флуктуации не обладают нормальным распределением, то знания спектральных плотностей амплитудно-частотных флуктуаций недостаточно для нахождения $W_x(\Omega)$.

Таким образом, представляется важным и интересным рассмотрение способов непосредственного измерения формы линии $W_x(\Omega)$ какого-либо реального генератора. При этом иногда даже ставится задача измерения не всей формы линии, не всего спектра $W_x(\Omega)$, а лишь какого-либо небольшого участка, ска-

жем, от частоты F_1 до частоты F_2 . Чаще всего этот участок относится к пьедесталу и крыльям спектральной линии (рис. 15.4).

Поскольку $\Delta f/f_1$ — относительная ширина спектральной линии реального генератора — даже в худшем случае не превышает величины $10^{-5} \div 10^{-6}$ и поскольку почти вся мощность генератора сосредоточена внутри полосы Δf , непосредственное использование обычных фильтров прямого усиления для выделения заданных участков спектра является, по-видимому, безнадежным делом. Причина этого лежит в том, что мощность генератора, попадая в крылья даже высокоселективного фильтра (его частотная характеристика показана на рис. 15.4 пунктиром), существенно превышает полезную мощность, попадающую в центральную полосу фильтра. Кроме того, использование фильтров прямого усиления приводит к требованию, чтобы их добротности по крайней мере были не меньше чем 10^6 . Поэтому, если и можно измерять непосредственно форму спектральной линии, то не на частоте генератора f . Посмотрим, что дает для решения этой задачи метод гетеродинирования.

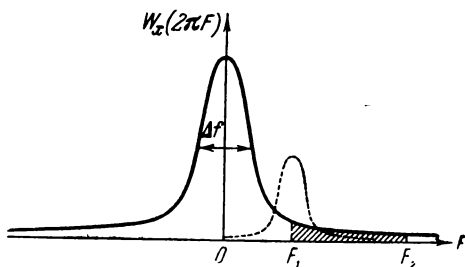


Рис. 15.4.

2. При гетеродинировании частоту генератора f_1 всегда можно свести на такую низкую разностную частоту f_p , что для фильтрации крыльев линии можно использовать обычные фильтры. Кроме того, пик спектральной линии, содержащий основную мощность, можно также с помощью особого фильтра подавить.

Таким образом, гетеродинирование может полностью решить поставленную задачу, если при переходе от f_1 к f_p форма спектральной линии $W_x(\Omega)$ перейдет без искажений в $W_u(\Omega)$, где $u(t)$ — напряжение разностной частоты.

Анализ, проведенный выше, показал, однако, что формы спектральных линий $W_x(\Omega)$ и $W_u(\Omega)$ в общем случае сильно отличаются, если принимать во внимание форму линии гетеродина $W_y(\Omega)$ и спектральную плотность флуктуаций коэффициента передачи смесителя $S_o(\Omega)$. Из (15.1.6) и (15.2.3) имеем

$$W_u(\Omega) = \frac{1}{2} K_c^2 \int_{-\infty}^{+\infty} W_x(\xi) W_y(\xi - \Omega) d\xi + \\ + \frac{1}{2} K_c^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} W_x(\xi) W_y(\xi - \eta) S_o(\eta - \Omega) d\xi d\eta.$$

Значение спектральной плотности $W_u(\Omega)$ на любой частоте, скажем на частоте F_1 , определяется *полными* спектрами сигнала, гетеродина и спектром флуктуаций смесителя. Таким образом, измеренная часть спектра $W_u(\Omega)$, скажем от F_1 до F_2 , может быть совершенно непохожа на $W_x(\Omega)$ для тех же значений частоты. Более того, из измеренной части спектра $W_u(\Omega)$, даже зная полные спектры $W_y(\Omega)$ и $S_\sigma(\Omega)$, принципиально невозможно определить $W_x(\Omega)$ ни для какой частоты, так как для этого необходимо знать *весь спектр* $W_u(\Omega)$. Лишь в том случае $W_u(\Omega)$ близка по форме к $W_x(\Omega)$, когда гетеродином служит генератор, обладающий существенно большей стабильностью, чем исследуемый, и когда ширина спектра флуктуаций смесителя много меньше ширины спектральной линии исследуемого генератора, или флуктуации смесителя достаточно малы (частота Ω_k , введенная в § 15.2, достаточно велика).

ПРИЛОЖЕНИЯ

I. Сходимость и суммируемость несобственных интегралов

В спектрально-корреляционном анализе часто приходится сталкиваться с необходимостью разложения некоторых функций (четных $F^0(\tau)$, или нечетных $F^1(\tau)$), определенных в $(-\infty, +\infty)$, в интеграл Фурье.

Если эти функции абсолютно интегрируемы, то, как известно, несобственные интегралы

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F^0(\tau) \cos \omega \tau d\tau, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} F^1(\tau) \sin \omega \tau d\tau \quad (I.1)$$

существуют для всех ω — существуют в смысле Коши — Римана, т. е. существуют пределы

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^{+T} F^0(\tau) \cos \omega \tau d\tau, \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^{+T} F^1(\tau) \sin \omega \tau d\tau.$$

В этом случае говорят о *сходимости* несобственных интегралов (I.1), и их вычисление особых трудностей не представляет.

Если $F^0(\tau)$ или $F^1(\tau)$ абсолютно не интегрируемы, то попытки вычисления (I.1) могут привести к некоторым специфическим трудностям. Пусть, например, $F^0(\tau) = 1$. Тогда интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cos \omega \tau d\tau = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^{+T} \cos \omega \tau d\tau$$

становится невычислимым. Интеграл, как говорят, получается *расходящимся* (но не в смысле его обращения в бесконечность, а в том смысле, что неизвестно чему он равен). Возникает естественный вопрос, как же все-таки вычислить этот интеграл?

Однако такая постановка вопроса по существу не имеет смысла. Дело в том, что обычное определение несобственного интеграла, определение его сходимости

$$\int_{-\infty}^{+\infty} A(x) dx \equiv \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^{+T} A(x) dx, \quad (I.2)$$

уже дает нам алгоритм его вычисления, и если это вычисление не приносит успеха, то, следовательно, в данном случае этот алгоритм несовершенен. Это особенно становится ясным тогда, когда несобственный интеграл имеет вполне определенный физический смысл и может быть в принципе измерен. В этом случае можно считать, что трудность данной ситуации порождается неудачным определением несобственного интеграла. Другими словами, можно сказать, что несобственный интеграл, определенный в смысле Коши — Римана, несовершенен и отказывается «работать» в некоторых случаях. Поэтому вопросом, который следует задать, должен быть следующий: как *определить* несобственный интеграл более лучшим способом? (Лучшим в сравнении с методом сходимости.)

Очевидно, что этот лучший способ, или, будем говорить, метод, во-первых, должен «работать» и приводить к определенному результату в тех случаях, когда метод сходимости (1.2) «не работает». Во-вторых, этот лучший метод должен давать результат, *совпадающий* с (1.2), для тех случаев, когда несобственный интеграл сходится, т. е. когда «работает» определение (1.2). Это второе условие есть требование так называемой *регулярности* метода. Такими методами определения несобственных интегралов являются так называемые *методы суммирования интегралов* [134, 135]. Существует несколько регулярных методов суммирования несобственных интегралов. Мы подробно рассмотрим только два: метод суммирования Чезаро и метод суммирования Абеля. Эти методы являются достаточно сильными и позволяют определить все трудные несобственные интегралы, встречающиеся в книге.

Рассмотрим метод суммирования Чезаро, который обычно пишется как *суммирование* (C, a) .

Говорят, что интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} A(x) dx$ суммируем (C, a) , где $a \geq 0$, к значению B , если существует предел

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^{+T} \left(1 - \frac{|x|}{T}\right)^a A(x) dx = B.$$

Это обстоятельство записывается следующим образом:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} A(x) dx = B(C, a).$$

При $a=0$ суммируемость превращается в обычную сходимость в смысле Коши — Римана. Регулярность этого метода суммирования выражается следующей теоремой.

Теорема 1. Если некоторый интеграл суммируем (C, a) , где $a \geq 0$, то он суммируем (C, b) для всех $b > a$ к тому же самому значению.

Суммируемость (C, b) при $b > a$ является более сильной, чем суммируемость (C, a) ; есть интегралы, которые суммируются (C, a) лишь при доста-

точно больших значениях a . Например, $\int_0^{\infty} t^4 \sin \omega t dt$ суммируем (C, a) только

для $a \geq 5$ и равен $24/\omega^5$.

Рассмотрим второй метод суммирования — метод Абеля, который пишется как *суммирование* (A) .

Говорят, что интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} A(x) dx$ суммируем (A) к значению B , если

$$B(\gamma) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\gamma|x|} A(x) dx$$

сходится для всех $\gamma > 0$ и $\lim_{\gamma \rightarrow +0} B(\gamma) = B$. Суммируемость интеграла в этом случае записывается следующим образом

$$\int_{-\infty}^{+\infty} A(x) dx = B(A).$$

Суммируемость (A) является в некотором смысле более сильной суммируемостью, чем (C, a) . Иллюстрацией этого утверждения является следующая теорема.

Т е о р е м а 2. Если

$$\int_{-\infty}^{+\infty} A(x) dx = B(C, a)$$

и $B(\gamma)$ сходится для любого положительного γ , то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} A(x) dx = B(A).$$

Например, интеграл $\int_0^{\infty} e^{j\omega\tau + b\sqrt{\tau}} d\tau$, где $\omega > 0$, $b > 0$, суммируем (A) , но не суммируем (C, a) ни для какого a . Заметим, что, с другой стороны, условие сходимости $B(\gamma)$ для любого $\gamma > 0$ является обязательным для суммируемости (A) . Например,

$$\int_0^{\infty} e^{2t} \cos e^t dt = -\cos 1 - \sin 1 (C, 1),$$

но $\int_0^{\infty} e^{2t} e^{-\gamma t} \cos e^t dt$ не сходится при $\gamma \leq 1$, и поэтому этот интеграл не суммируем (A) .

Таким образом, в общем случае взаимосвязь суммируемостей (A) и (C, a) не является простой, но для тех функций $A(x)$, для которых $\int_{-\infty}^{+\infty} A(x) dx$

суммируем обоими методами, мы получаем одно и то же значение B . Это же справедливо и для всех прочих регулярных методов суммирования.

На основании вышеизложенного мы теперь можем любые несобственные интегралы определять методами суммирования. Те несобственные интегралы,

которые заведомо сходятся, мы будем по-прежнему обозначать $\int_{-\infty}^{+\infty} A(x) dx$. Интегралы, не сходящиеся, но поддающиеся хотя бы одному регулярному методу суммирования (неважно какому), мы будем обозначать как $\oint_{-\infty}^{+\infty} A(x) dx$ и понимать под этим символом следующее:

$$\oint_{-\infty}^{+\infty} A(x) dx \equiv \left\{ \begin{array}{l} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^{+T} \left(1 - \frac{|x|}{T}\right)^a A(x) dx, \quad a > 0 \text{ (суммирование Чезаро);} \\ \lim_{\gamma \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\gamma|x|} A(x) dx, \quad \gamma > 0 \text{ (суммирование Абеля);} \\ \text{или суммирование каким-либо другим регулярным методом.} \end{array} \right\} \quad (I.3)$$

Так определенный несобственный интеграл существует практически для всех функций $F^0(\tau)$, $F^1(\tau)$, с которыми можно встретиться в спектрально-корреляционном анализе сигналов (включая и функции, возрастающие как τ^n для любого $n > 0$). Поэтому использование «суммированного» несобственного интеграла вместо обычного является (хотя бы с прикладной точки зрения) более перспективным *).

Отметим еще следующее. В радиотехнической литературе очень часто при вычислении спектров сигналов пользуются фактически методом суммирования (A). Однако это делается, во-первых, без всякого обоснования, что, естественно, вызывает вопрос о законности такой процедуры, и, во-вторых, допускается ошибочное ее толкование. Умножение на $e^{-\gamma x}$, интегрирование и дальнейший переход к пределу $\gamma \rightarrow 0$ трактуется не как *определение*, а как *рецепт* вычисления интеграла $\int_{-\infty}^{+\infty} A(x) dx$, понимаемого в смысле (I.2).

Обратимся теперь к некоторым конкретным интегралам. Нетрудно, во-первых, получить, что

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T \left(1 - \frac{t}{T}\right) \cos \omega t dt = 0, \quad \omega \neq 0,$$

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} \int_0^{\infty} e^{-\gamma t} \cos \omega t dt = \lim_{\gamma \rightarrow 0} \frac{\gamma}{\gamma^2 + \omega^2} = 0, \quad \omega \neq 0.$$

*) При этом можно указать даже на большую физичность суммированного несобственного интеграла. Из (I.3) следует, что события, относящиеся к «далеким» временам, берутся с меньшим (со сколь угодно меньшим) весом. Прибор, реализующий интеграл, «забывает» то, что было очень давно.

Тем самым, следовательно,

$$\oint_{-\infty}^{+\infty} \cos \omega t \, dt = 0, \quad \omega \neq 0.$$

Если положить $\omega=0$, то рассматриваемый интеграл обращается в бесконечность. Таким образом, в известном спектральном разложении дельта-функции

$$\delta(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos \omega \tau \, d\omega$$

интеграл следует понимать в смысле суммирования. Следовательно, строгими и законными являются и спектральные разложения производных дельта-функции, которые следует понимать как

$$\delta^{(2n)}(\tau) = (-1)^n \frac{1}{2\pi} \oint_{-\infty}^{+\infty} \omega^{2n} \cos \omega \tau \, d\omega,$$

$$\delta^{(2n-1)}(\tau) = (-1)^n \frac{1}{2\pi} \oint_{-\infty}^{+\infty} \omega^{2n-1} \sin \omega \tau \, d\omega.$$

Аналогично рассмотренному примеру можно найти для любого целого $n > 0$ ($\omega \neq 0$):

$$\oint_0^{\infty} t^{2n} \sin \omega t \, dt = (-1)^n \frac{2n!}{\omega^{2n+1}}, \quad \oint_0^{\infty} t^{2n-1} \sin \omega t \, dt = 0. \quad (I. 4)$$

$$\oint_0^{\infty} t^{2n-1} \cos \omega t \, dt = (-1)^n \frac{(2n-1)!}{\omega^{2n}}, \quad \oint_0^{\infty} t^{2n} \cos \omega t \, dt = 0. \quad (I. 5)$$

Объединяя эти формулы, получим

$$\oint_0^{\infty} t^{2n} e^{j\omega t} \, dt = j (-1)^n \frac{(2n)!}{\omega^{2n+1}}, \quad \oint_0^{\infty} t^{2n-1} e^{j\omega t} \, dt = (-1)^n \frac{(2n-1)!}{\omega^{2n}}. \quad (I. 6)$$

Укажем еще две полезные теоремы, позволяющие суммировать довольно широкий класс расходящихся интегралов.

Теорема 3. Если: 1) $F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$, 2) $\omega > 0$, $\mu > -1$, 3) ряд

$\sum_{n=0}^{\infty} n! a_n t^n$ имеет радиус сходимости $R > 1/\omega$, 4) интеграл

$\int_0^{\infty} e^{-(\gamma + j\omega)t} t^{\mu} F(t) dt$ сходится для $\tau > 0$, то

$$\oint_0^{\infty} t^{\mu} e^{-j\omega t} F(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n + \mu + 1) e^{-\frac{1}{2}(n + \mu + 1)\pi j}}{\omega^{n + \mu + 1}} a_n. \quad (I. 7)$$

Условие 3) можно заменить любым из следующих более общих условий:

$$3') \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n! |a_n|}{\omega^n} < \infty, \quad 3'') \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n! \sqrt{n} a_n}{(j\omega)^n} \text{ сходится.}$$

Нетрудно видеть, кстати, что формулы (I. 6) могут быть выведены из (I. 7).

Следующая теорема является еще более общей и фактически содержит в себе предыдущую теорему.

Теорема 4. Если: 1) $|\varphi(t)| < M e^{\epsilon t}$ для каждого $\epsilon > 0$, где M — некоторое положительное конечное число, так что

$\psi(\gamma) = \int_0^{\infty} e^{-\gamma t} \varphi(t) dt$ сходится для $\gamma > 0$, 2) функция $\psi(\gamma)$ регулярна для

$|\gamma| < \omega$, 3) ряд $\sum_{n=0}^{\infty} n! a_n x^n$ имеет радиус сходимости $R > 1/\omega$, 4) интеграл

$\int_0^{\infty} e^{-\gamma t} \varphi(t) F(t) dt$ сходится для $\gamma > 0$, то

$$\oint_0^{\infty} \varphi(t) F(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \oint_0^{\infty} t^n \varphi(t) dt. \quad (I. 8)$$

$$\text{где } F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n.$$

Применим теперь теорему 3 для получения разложения спектральной плотности по обратным степеням частоты. Рассмотрим интеграл

$$\int_0^{\infty} \Phi(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau,$$

где $\Phi(\tau)$ есть некоторая непрерывная функция, существующая для всех τ и достаточно быстро убывающая при возрастании τ . Запишем $\Phi(\tau)$ в виде ряда для $\tau > 0$:

$$\Phi(\tau) = \Phi(+0) + \Phi'(+0)\tau + \frac{1}{2!}\Phi''(+0)\tau^2 + \dots + \frac{1}{n!}\Phi^{(n)}(+0)\tau^n + \dots$$

Производные здесь нужно вычислять обязательно при $\tau \rightarrow +0$, так как, во-первых, в исследуемый интеграл входит только правая полуось $\tau \in \mathbb{R}_+$

во-вторых, в общем случае производные $\Phi(\tau)$ могут испытывать разрыв в точке $\tau=0$.

Поскольку для $\omega > 0$ условие 2) выполнено и выполнено условие 4), ибо $\int_0^{\infty} \Phi(\tau) d\tau$ сходится, необходимо лишь выполнение условия 3). Если это условие выполнено, т. е. ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \Phi^{(n)}(+0) \tau^n$ имеет радиус сходимости $R > 1/\omega$, то для $\omega > 0$

$$\begin{aligned} \oint_0^{\infty} \Phi(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+1) e^{-\frac{1}{2}(n+1)j\pi}}{\omega^{n+1}} \frac{\Phi^{(n)}(+0)}{n!} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-j)^{n+1} \frac{\Phi^{(n)}(+0)}{\omega^{n+1}}. \end{aligned} \quad (I.9)$$

Разделяя здесь вещественную и мнимую части, нетрудно найти

$$\oint_0^{\infty} \Phi(\tau) \cos \omega\tau d\tau = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\Phi^{(2n-1)}(+0)}{\omega^{2n}}, \quad (I.10)$$

$$\oint_0^{\infty} \Phi(\tau) \sin \omega\tau d\tau = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\Phi^{(2n)}(+0)}{\omega^{2n+1}}. \quad (I.11)$$

Эти последние формулы имеют довольно широкое применение. Так, например, полагая, что $\Phi(\tau)$ есть функция корреляции, мы получаем с помощью (I.10), (I.11) разложение спектральных плотностей какого-либо сигнала по степеням $1/\omega$.

Следует заметить, что если у функции $\Phi(\tau)$ все производные $\Phi^{(2n-1)}(+0) = 0$, то это значит, что интеграл $\oint_0^{\infty} \Phi(\tau) \cos \omega\tau d\tau$ не может быть

представлен рядом по степеням ω^{-2n} . Это имеет место, например, для $\Phi(\tau) = e^{-a\tau^2}$. Нетрудно видеть, что в этом случае $\int_0^{\infty} \Phi(\tau) \cos \omega\tau d\tau \sim e^{-\frac{\omega^2}{a^2}}$

и эта функция убывает при $\omega \rightarrow \infty$ быстрее, чем любая степень ω . Аналогичная ситуация имеет место и для интеграла (I.11).

Значения некоторых других суммируемых интегралов, встречающихся в книге, даны в Приложении II.

Читатель, желающий глубже изучить суммирование не сходящихся интегралов, может обратиться к прекрасной монографии [135].

$$\int_t^T \int_t^T A(x-y) dx dy = 2 \int_0^{T-t} (T-t-x) A^0(x) dx =$$

$$= \int_{-(T-t)}^{T-t} (T-t-|x|) A^0(x) dx. \quad (\text{II. 10})$$

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2 - a^2)^2 + b^2 x^2} = \frac{\pi}{2ba^2}. \quad (\text{II. 11})$$

$$\int_0^\infty \frac{x^2 dx}{(x^2 - a^2)^2 + b^2 x^2} = \frac{\pi}{2b}. \quad (\text{II. 12})$$

$$\int_0^\infty \exp[-Bp\tau - Ce^{-p\tau}] \cos \Omega \tau d\tau = p \sum_{\lambda=0}^\infty \frac{(-C)^\lambda}{\lambda!} \frac{B+\lambda}{p^2 (B+\lambda)^2 + \Omega^2} =$$

$$= p \sum_{\lambda=0}^\infty \frac{(-C)^\lambda}{\lambda!} \frac{(B-C)\Omega^2 + (B-C)(B+\lambda)^2 p^2 + Bp^2(1+2B+2\lambda)}{[p^2 (B+\lambda)^2 + \Omega^2] [p^2 (B+\lambda+1)^2 + \Omega^2]}, \quad (\text{II. 13})$$

$$B, p > 0.$$

$$\int_0^\infty \exp[-Bp\tau - Ce^{-p\tau}] \sin \Omega \tau d\tau = \sum_{\lambda=0}^\infty \frac{(-C)^\lambda}{\lambda!} \frac{\Omega}{p^2 (B+\lambda)^2 + \Omega^2}, \quad (\text{II. 14})$$

$$B, p > 0.$$

$$\int_0^\infty \exp[-D\tau - Re^{-p\tau} - Se^{-q\tau} \cos \Omega_a \tau + Te^{-q\tau} \sin \Omega_a \tau] \cos \Omega \tau d\tau =$$

$$= \frac{D}{D^2 + \Omega^2} - R \frac{D+p}{(D+p)^2 + \Omega^2} + \frac{1}{2} \frac{T(\Omega_a - \Omega) - S(D+q)}{(D+q)^2 + (\Omega_a - \Omega)^2} +$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{T(\Omega_a + \Omega) - S(D+q)}{(D+q)^2 + (\Omega_a + \Omega)^2}, \quad R, S, T \ll 1. \quad (\text{II. 15})$$

$$\int_0^\infty \exp[-D\tau - Re^{-p\tau} - Se^{-q\tau} \cos \Omega_a \tau + Te^{-q\tau} \sin \Omega_a \tau] \sin \Omega \tau d\tau =$$

$$= \frac{\Omega}{D^2 + \Omega^2} - R \frac{\Omega}{(D+p)^2 + \Omega^2} + \frac{1}{2} \frac{T(D+q) + S(\Omega_a - \Omega)}{(D+q)^2 + (\Omega_a - \Omega)^2} -$$

$$- \frac{1}{2} \frac{T(D+q) + S(\Omega_a + \Omega)}{(D+q)^2 + (\Omega_a + \Omega)^2}, \quad R, S, T \ll 1. \quad (\text{II. 16})$$

II. Некоторые интегралы

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-au-a_1v} \cos \Omega(u-v) du dv = \frac{aa_1 + \Omega^2}{(\Omega^2 + a^2)(\Omega^2 + a_1^2)}, \quad a, a_1 > 0. \quad (\text{II. 1})$$

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-au-a_1v} \sin \Omega(u-v) du dv = \frac{(a_1 - a)\Omega}{(\Omega^2 + a^2)(\Omega^2 + a_1^2)}, \quad a, a_1 > 0. \quad (\text{II. 2})$$

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-az-au-a_1v} \cos \Omega(v-u+z) du dv dz = \frac{a_1}{(\Omega^2 + a^2)(\Omega^2 + a_1^2)}, \quad (\text{II. 3})$$

$$a, a_1 > 0.$$

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-az-au-a_1v} \sin \Omega(v-u+z) du dv dz = \frac{\Omega}{(\Omega^2 + a^2)(\Omega^2 + a_1^2)}, \quad (\text{II. 4})$$

$$a, a_1 > 0.$$

$$\int_0^t \int_0^t e^{-p(x+y)} \min\{x, y\} dx dy = \frac{1}{2p^3} - \frac{2}{p^3} e^{-pt} + \frac{2pt+3}{2p^3} e^{-2pt}, \quad (\text{II. 5})$$

$$p > 0.$$

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-p(x+y)-a|\tau+x-y|} dx dy = \frac{1}{p(p^2 - a^2)} (pa^{-a|\tau|} - ae^{-p|\tau|}), \quad (\text{II. 6})$$

$$p, a > 0.$$

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-au-a_1v} \delta(\tau+u-v) du dv = \begin{cases} \frac{1}{a+a_1} e^{-a_1\tau}, & \tau \geq 0, \\ \frac{1}{a+a_1} e^{a\tau}, & \tau \leq 0, \end{cases} \quad a, a_1 > 0. \quad (\text{II. 7})$$

$$\int_0^{\infty} e^{-au} \delta(\tau+u) du = \begin{cases} 0, & \tau > 0, \\ \frac{1}{2}, & \tau = 0, \\ e^{a\tau}, & \tau < 0, \end{cases} \quad a > 0. \quad (\text{II. 8})$$

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-au-ax-a_1v} \delta(x+v-u-\tau) du dv dx =$$

$$= \begin{cases} \frac{e^{-a_1\tau}}{a^2 - a_1^2} - \frac{e^{-a\tau}}{2a(a - a_1)}, & \tau > 0, \\ \frac{1}{2a(a + a_1)} e^{a\tau}, & \tau < 0, \end{cases} \quad a, a_1 > 0. \quad (\text{II. 9})$$

$$\int_0^t y(x_1) dx_1 \int_0^{x_1} y(x_2) dx_2 \dots \int_0^{x_{n-1}} y(x_n) dx_n = \frac{1}{n!} \left[\int_0^t y(x) dx \right]^n. \quad (\text{II. 17})$$

$$\int_0^T \int_0^T D(\xi - \eta) E(\xi + \eta) d\xi d\eta = \int_0^T D^0(y) dy \int_y^{2T-y} E(x) dx. \quad (\text{II. 18})$$

$$\oint_0^\infty \frac{1}{\omega^\alpha} \cos \omega \tau d\omega = \Gamma(1 - \alpha) \sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \tau^{\alpha-1}, \quad 0 < \alpha < 1. \quad (\text{II. 19})$$

$$\begin{aligned} \oint_0^\infty \frac{p^2 \cos \omega \tau}{\omega^\alpha (p^2 + \omega^2)} d\omega = \\ = \frac{1}{2} \Gamma(1 - \alpha) \sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) p^{1-\alpha} \{2 \operatorname{ch} p\tau \Gamma(\alpha) + e^{-p\tau} \gamma(\alpha, -p\tau) - e^{p\tau} \gamma(\alpha, p\tau)\}. \end{aligned} \quad (\text{II. 20})$$

$$\int_0^\infty \frac{1 - \cos \omega \tau}{\omega^{1+p}} d\omega = \frac{\frac{\pi}{2}}{\sin \frac{\pi p}{2} \Gamma(1 + p)} \tau^p, \quad 0 < p < 2. \quad (\text{II. 21})$$

$$\begin{aligned} \int_0^b \frac{1}{\sqrt{x^{\beta-1}}} e^{-\frac{a}{x^{\beta-1}}} dx = \frac{a^\delta}{\beta-1} \Gamma(-\delta) + \frac{2}{3-\beta} b^{\frac{3-\beta}{2}} \Phi(1, -\delta; ab^\beta) e^{-ab^{1-\beta}} = \\ = \frac{a^\delta}{\beta-1} \Gamma\left(-\delta, \frac{a}{b^{\beta-1}}\right), \quad 1 < \beta < 3, \quad \delta = (3-\beta)/2(\beta-1). \end{aligned} \quad (\text{II. 22})$$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-a(u+v)} F(\tau + u - v) du dv = \frac{1}{2a} \int_0^\infty [F(\tau + x) + F(\tau - x)] e^{-ax} dx = \\ = \frac{1}{2a} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|x|} F(\tau \pm x) dx, \quad a > 0. \end{aligned} \quad (\text{II. 23})$$

$$\oint_0^\infty \tau^k e^{-j\omega\tau} d\tau = \frac{\Gamma(k+1)}{\omega^{k+1}} e^{-\frac{1}{2}(k+1)\frac{\pi j}{\omega}}, \quad k > -1, \quad \omega > 0. \quad (\text{II. 24})$$

$$\oint_0^\infty \tau^k \cos \omega \tau d\tau = \frac{\Gamma(k+1)}{\omega^{k+1}} \operatorname{Re} [(-j)^{k+1}], \quad k > -1, \quad \omega > 0. \quad (\text{II. 25})$$

$$\oint_0^\infty \tau^k \sin \omega \tau d\tau = -\frac{\Gamma(k+1)}{\omega^{k+1}} \operatorname{Im} [(-j)^{k+1}], \quad k > -1, \quad \omega > 0. \quad (\text{II. 26})$$

III. Основные формулы для функций корреляции, структурных функций и спектральных плотностей

В настоящем приложении приводятся, во-первых, сводка основных формул, дающих взаимоотношения функций корреляции различных индексов, во-вторых, основные формулы связи между преобразованными функциями корреляции и соответствующими спектрами и, в-третьих, сводка основных пар: функция корреляции — спектральная плотность.

В этих формулах почти все функции корреляции и спектральные плотности снабжены индексами, смысл которых раскрыт в гл. I. Например, $\Phi_x(\tau)$, $\Phi_{xy}^0(\tau)$, $\Phi_{xy}^1(\tau)$, $\Phi_{xy}(\tau) = \Phi_{xy}^0(\tau) + \Phi_{xy}^1(\tau)$; $S_x(\omega)$, $S_{xy}^0(\omega)$, $S_{xy}^1(\omega)$.

Если в некоторых формулах нижние индексы опущены или заменены цифрами, то они могут быть любыми. Например, если в какой-либо формуле фигурируют $\Phi^0(\tau)$ и $S^0(\omega)$, то это значит, что эта формула справедлива для любой четной функции корреляции и четной спектральной плотности (для $\Phi_x(\tau)$, $\Phi_{xy}^0(\tau)$; $S_x(\omega)$, $S_{xy}^0(\omega)$).

Нижеприведенные формулы даны для функций корреляции второго рода $\Phi(\tau)$ и спектральных плотностей мощности $S(\omega)$. Все эти формулы остаются справедливыми и для $K[\tau]$, и для $\Psi(\tau)$ (в этом последнем случае в формулы вместо $S(\omega)$ следует подставлять $\mathcal{E}(\omega)$). Поскольку для большинства формул аргументами функций корреляции и спектральных плотностей являются соответственно τ и ω , то в ряде случаев они будут опущены.

В настоящем параграфе приведены также основные формулы для структурных функций, их связи с функциями корреляции и спектральными плотностями.

а. Функции корреляции производных. В гл. I были получены формулы

$$\Phi_{xy}(\tau) = \Phi_{yx}(-\tau), \quad \Phi_{x\dot{y}}(\tau) = \frac{d\Phi_{xy}(\tau)}{d\tau}.$$

С помощью этих формул легко получить следующие формулы, связывающие функции корреляции производных с функциями корреляции самих процессов.

Для одного сигнала $x(t)$:

$$\begin{aligned} \Phi_{\dot{x}}(\tau) &= -\frac{d^2\Phi_x}{d\tau^2}, & \Phi_{\ddot{x}}(\tau) &= \frac{d^4\Phi_x}{d\tau^4}, \dots, & \Phi_{x^{(n)}}(\tau) &= (-1)^n \frac{d^{2n}\Phi_x}{d\tau^{2n}}; \\ \Phi_{x\dot{x}}(\tau) &= \frac{d\Phi_x}{d\tau}, & \Phi_{x\ddot{x}}(\tau) &= \frac{d^2\Phi_x}{d\tau^2}, \dots, & \Phi_{xx^{(n)}}(\tau) &= \frac{d^n\Phi_x}{d\tau^n}; \\ \Phi_{\dot{x}\dot{x}}(\tau) &= -\frac{d\Phi_x}{d\tau}, & \Phi_{\ddot{x}\dot{x}}(\tau) &= \frac{d^2\Phi_x}{d\tau^2}, \dots, & \Phi_{x^{(n)}x}(\tau) &= (-1)^n \frac{d^n\Phi}{d\tau^n}. \end{aligned}$$

Общая формула:

$$\Phi_{x^{(n)}x^{(m)}}(\tau) = (-1)^n \frac{d^{n+m}\Phi_x}{d\tau^{n+m}}, \quad x^{(n)} \equiv \frac{d^n x(t)}{dt^n}. \quad (\text{III. 1})$$

Для двух сигналов $x(t)$ и $y(t)$:

$$\begin{aligned} \Phi_{x\dot{y}} &= \frac{d\Phi_{xy}}{d\tau}, & \Phi_{x\ddot{y}} &= \frac{d^2\Phi_{xy}}{d\tau^2}, \dots, & \Phi_{xy^{(n)}} &= \frac{d^n\Phi_{xy}}{d\tau^n}; \\ \Phi_{\dot{x}y} &= -\frac{d\Phi_{xy}}{d\tau}, & \Phi_{\ddot{x}y} &= \frac{d^2\Phi_{xy}}{d\tau^2}, \dots, & \Phi_{x^{(n)}y} &= (-1)^n \frac{d^n\Phi_{xy}}{d\tau^n}. \end{aligned}$$

Общая формула:

$$\Phi_{x^{(n)}y^{(m)}}(\tau) = (-1)^n \frac{d^{n+m} \Phi_{xy}(\tau)}{d\tau^{n+m}}. \quad (\text{III. 2})$$

6. Некоторые формулы взаимосвязи функций корреляции со спектральными плотностями. Из основных определяющих формул

$$\begin{aligned} S^0(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi^0(\tau) \cos \omega \tau d\tau, & \Phi^0(\tau) &= \int_{-\infty}^{+\infty} S^0(\omega) \cos \omega \tau d\omega; \\ S^1(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi^1(\tau) \sin \omega \tau d\tau, & \Phi^1(\tau) &= \int_{-\infty}^{+\infty} S^1(\omega) \sin \omega \tau d\omega \end{aligned} \quad (\text{III. 3})$$

нетрудно получить следующие соответствия спектральных плотностей функциям корреляции:

$$\Phi_3^0(\tau) = \Phi_1^0(\tau) \Phi_2^0(\tau), \quad S_3^0(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_1^0(u) S_2^0(\omega \pm u) du. \quad (\text{III. 4})$$

$$\Phi_3^0(\tau) = \Phi_1^1(\tau) \Phi_2^1(\tau), \quad S_3^0(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_1^1(u) S_2^1(\omega \pm u) du. \quad (\text{III. 5})$$

$$\Phi_3^1(\tau) = \Phi_1^0(\tau) \Phi_2^1(\tau), \quad S_3^1(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_1^0(u) S_2^1(\omega \pm u) du. \quad (\text{III. 6})$$

$$\Phi_4^0(\tau) = \Phi_1^0(\tau) \Phi_2^0(\tau) \Phi_3^0(\tau), \quad S_4^0(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} S_1^0(v) S_2^0(u \pm v) S_3^0(\omega \pm u) dv du. \quad (\text{III. 7})$$

$$\Phi_4^0(\tau) = \Phi_1^1(\tau) \Phi_2^1(\tau) \Phi_3^0(\tau), \quad S_4^0(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} S_1^1(v) S_2^1(u \pm v) S_3^0(\omega \pm u) dv du. \quad (\text{III. 8})$$

$$\Phi_3^0(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_1^0(u) \Phi_2^0(\tau \pm u) du, \quad S_3^0(\omega) = S_1^0(\omega) S_2^0(\omega). \quad (\text{III. 9})$$

$$\Phi_3^0(\tau) = \Phi_1^1(\tau) \operatorname{sign} \tau, \quad S_3^0(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{S_1^1(u + \omega) + S_1^1(u - \omega)}{u} du. \quad (\text{III. 10})$$

$$\Phi_3^1(\tau) = \Phi_1^0(\tau) \operatorname{sign} \tau, \quad S_3^1(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{S_1^0(u - \omega)}{u} du. \quad (\text{III. 11})$$

$$\Phi_{xy}(\tau) = \int_0^{\infty} e^{-au} \Phi_{\xi\eta}(\tau + u) du, \quad S_{xy}^0 = \frac{aS_{\xi\eta}^0 + \omega S_{\xi\eta}^1}{\omega^2 + a^2}, \quad S_{xy}^1 = \frac{aS_{\xi\eta}^1 - \omega S_{\xi\eta}^0}{\omega^2 + a^2},$$

$$a > 0, \quad (\text{III. 12})$$

$$\Phi^1(\tau) = \int_0^{\tau} \Phi_{xy}^0(u) du, \quad S^1(\omega) = \begin{cases} \frac{S_{xy}^0(\omega)}{\omega}, & \omega \neq 0, \\ 0, & \omega = 0. \end{cases} \quad (\text{III. 13})$$

в. Фурье-преобразования от некоторых операций над функциями корреляции.

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{xy}(\pm\tau + u) \cos \omega\tau d\tau = S_{xy}^0(\omega) \cos \omega u + S_{xy}^1(\omega) \sin \omega u. \quad (\text{III. 14})$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{xy}(\pm\tau + u) \sin \omega\tau d\tau = \pm S_{xy}^1(\omega) \cos \omega u \mp S_{xy}^0(\omega) \sin \omega u. \quad (\text{III. 15})$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^{2n}\Phi_{xy}(\tau)}{d\tau^{2n}} \cos \omega\tau d\tau = (-1)^n \omega^{2n} S_{xy}^0(\omega). \quad (\text{III. 16})$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^{2n+1}\Phi_{xy}(\tau)}{d\tau^{2n+1}} \cos \omega\tau d\tau = (-1)^n \omega^{2n+1} S_{xy}^1(\omega). \quad (\text{III. 17})$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^{2n}\Phi_{xy}(\tau)}{d\tau^{2n}} \sin \omega\tau d\tau = (-1)^n \omega^{2n} S_{xy}^1(\omega). \quad (\text{III. 18})$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^{2n+1}\Phi_{xy}(\tau)}{d\tau^{2n+1}} \sin \omega\tau d\tau = (-1)^{n+1} \omega^{2n+1} S_{xy}^0(\omega). \quad (\text{III. 19})$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \Phi^1(\tau) \cos \omega\tau d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{S^1(u + \omega) + S^1(u - \omega)}{u} du. \quad (\text{III. 20})$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \Phi^0(\tau) \sin \omega\tau d\tau = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{S^0(u - \omega)}{u} du. \quad (\text{III. 21})$$

г. Пары: функция корреляции — спектральная плотность.

$$\Phi^0 = B = \text{const}, \quad S^0(\omega) = B\delta(\omega). \quad (\text{III. 22})$$

$$\Phi^0 = 2\pi S_0\delta(\tau), \quad S^0(\omega) = S_0. \quad (\text{III. 23})$$

$$\Phi^0 = \frac{\pi D}{a} e^{-a|\tau|}, \quad S^0(\omega) = \frac{D}{a^2 + \omega^2}. \quad (\text{III. 24})$$

$$\Phi^0 = \frac{\pi D_1 D_2}{a_1 a_2 (a_1^2 - a_2^2)} (a_1 e^{-a_2 |\tau|} - a_2 e^{-a_1 |\tau|}), \quad S^0(\omega) = \frac{D_1 D_2}{(a_1^2 + \omega^2)(a_2^2 + \omega^2)}. \quad (\text{III. 25})$$

$$\Phi^0 = k \delta(\tau) - \frac{ka}{2} e^{-a |\tau|}, \quad S^0(\omega) = \frac{k}{2\pi} \frac{\omega^2}{\omega^2 + a^2}. \quad (\text{III. 26})$$

$$\begin{aligned} \Phi^0 &= \frac{2\pi}{a} e^{-a |\tau|} \cos \omega_a \tau, \quad S^0(\omega) = \frac{1}{a^2 + (\omega - \omega_a)^2} + \frac{1}{a^2 + (\omega + \omega_a)^2} = \\ &= \frac{2(\omega^2 + \omega_0^2)}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4a^2 \omega^2}, \quad \omega_0^2 = a^2 + \omega_a^2. \end{aligned} \quad (\text{III. 27})$$

$$\begin{aligned} \Phi^0 &= \frac{\pi}{2} e^{-a |\tau|} \left[\frac{1}{a} \cos \omega_a \tau - \frac{1}{\omega_a} \sin \omega_a |\tau| \right], \\ S^0(\omega) &= \frac{\omega}{4\omega_a} \left[\frac{1}{a^2 + (\omega - \omega_a)^2} - \frac{1}{a^2 + (\omega + \omega_a)^2} \right] = \frac{\omega^2}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4a^2 \omega^2}. \end{aligned} \quad (\text{III. 28})$$

$$\begin{aligned} \Phi^0 &= \frac{\pi}{2} e^{-a |\tau|} \left[\frac{1}{a} \cos \omega_a \tau + \frac{1}{\omega_a} \sin \omega_a |\tau| \right], \\ S^0(\omega) &= \frac{\omega_0^2}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4a^2 \omega^2}, \quad \omega_0^2 = a^2 + \omega_a^2. \end{aligned} \quad (\text{III. 29})$$

$$\Phi^1 = \frac{\pi D_1 D_2}{a_1^2 - a_2^2} [e^{-a_2 |\tau|} - e^{-a_1 |\tau|}] \operatorname{sign} \tau, \quad S^1(\omega) = \frac{D_1 D_2 \omega}{(a_1^2 + \omega^2)(a_2^2 + \omega^2)}. \quad (\text{III. 30})$$

$$\Phi^0 = \frac{A}{\pi} \Gamma(1 - \gamma) \sin \frac{\pi \gamma}{2} \frac{1}{|\tau|^{1-\gamma}}, \quad S^0(\omega) = \frac{A}{2\pi |\omega|^\gamma}, \quad 0 < \gamma < 1. \quad (\text{III. 31})$$

д. Формулы взаимосвязи функции корреляции и структурной функции второго рода. Если $x(t)$ есть стационарный случайный процесс, то

$$y(t) = \int_{t_0}^t x(u) du \quad (t > t_0)$$

есть процесс со стационарными приращениями. Между структурной функцией второго рода $\Delta_y(\theta, \tau) = d_y[\theta; \tau]$ и функцией корреляции $\Phi_x(\tau) = K_x[\tau]$ существует следующая связь:

$$\Delta_y(0, \tau) = \int_0^\tau (\tau - u) \Phi_x(u) du, \quad \tau > 0. \quad (\text{III. 32})$$

Ниже приведены пары $\Delta_y(0, \tau)$, $\Phi_x(\tau)$ для некоторых конкретных функций корреляции процесса $x(t)$ ($\tau > 0$):

$$\Phi_x(\tau) = B = \text{const}, \quad \Delta_y(0, \tau) = \frac{1}{2} B \tau^2. \quad (\text{III. 33})$$

$$\Phi_x(\tau) = 2\pi S_0 \delta(\tau), \quad \Delta_y(0, \tau) = \pi S_0 \tau. \quad (\text{III. 34})$$

$$\Phi_x(\tau) = \frac{\pi D}{a} e^{-a\tau}, \quad \Delta_y(0, \tau) = \frac{\pi D}{a^3} [a\tau - 1 + e^{-a\tau}]. \quad (\text{III. 35})$$

$$\begin{aligned} \Phi_x(\tau) &= e^{-a\tau} [m \cos \Omega_a \tau + n \sin \Omega_a \tau], \\ \Delta_y(0, \tau) &= \frac{ma + n\Omega_a}{\Omega_0^2} \tau - \frac{(ma + n\Omega_a)a - (m\Omega_a - na)\Omega_a}{\Omega_0^4} + \\ &+ \frac{e^{-a\tau}}{\Omega_0^4} \{[(ma + n\Omega_a)a - (m\Omega_a - na)\Omega_a] \cos \Omega_a \tau - \\ &- [(ma + n\Omega_a)\Omega_a + (m\Omega_a - na)a] \sin \Omega_a \tau\} \quad (\Omega_0^2 = a^2 + \Omega_a^2). \end{aligned} \quad (\text{III. 36})$$

$$\Phi_x(\tau) = \frac{A}{\pi} \Gamma(1 - \gamma) \sin \frac{\pi\gamma}{2} \frac{1}{\tau^{1-\gamma}}, \quad \Delta_y(0, \tau) = \frac{A\tau^{1+\gamma}}{2 \sin \frac{\pi(1+\gamma)}{2} \Gamma(2+\gamma)}. \quad (\text{III. 37})$$

е. Некоторые формулы для структурной функции второго рода. Найдем прежде всего взаимную структурную функцию второго рода для процессов dx/dt и y . На основании (1.8.1)

$$\begin{aligned} d_{xy}[t_1, t_2; \tau] &= \frac{1}{2} \langle [\dot{x}(t_1 + \tau) - \dot{x}(t_1)] [y(t_2 + \tau) - y(t_2)] \rangle = \\ &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{2} \left\langle \left[\frac{x(t_1 + \tau + \Delta) - x(t_1 + \Delta)}{\Delta} - \frac{x(t_1 + \tau) - x(t_1)}{\Delta} \right] [y(t_2 + \tau) - y(t_2)] \right\rangle = \\ &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} \{d_{xy}[t_1 + \Delta, t_2; \tau] - d_{xy}[t_1, t_2; \tau]\} = \frac{\partial d_{xy}[t_1, t_2; \tau]}{\partial t_1}. \end{aligned}$$

Аналогично нетрудно получить

$$d_{xy}[t_1, t_2; \tau] = \frac{\partial d_{xy}[t_1, t_2; \tau]}{\partial t_1}.$$

Пользуясь обеими формулами, найдем

$$d_{xy}[t_1, t_2; \tau] = \frac{\partial^2 d_{xy}[t_1, t_2; \tau]}{\partial t_1 \partial t_2}.$$

Используя (1.8.12), нетрудно получить

$$\Delta_{xy}(\theta, \tau) = \frac{\partial \Delta_{xy}(\theta, \tau)}{\partial \theta}.$$

Отсюда легко найти

$$\Delta_{xy}(\theta, \tau) = \Delta_{yx}(-\theta, \tau) = \frac{\partial \Delta_{yx}(-\theta, \tau)}{\partial (-\theta)} = -\frac{\partial \Delta_{xy}(\theta, \tau)}{\partial \theta}.$$

Для произвольного порядка производных имеем

$$\Delta_{x^{(n)}y^{(m)}}(\theta, \tau) = (-1)^n \frac{\partial^{n+m} \Delta_{xy}(\theta, \tau)}{\partial \theta^{n+m}}. \quad (\text{III. 38})$$

Все эти формулы справедливы, разумеется, если все необходимые производные $\Delta_{xy}(\theta, \tau)$ по θ существуют почти для всех точек θ . При $y = x$ (III. 38) дает

$$\Delta_{x^{(n)}}(\theta, \tau) = (-1)^n \frac{\partial^{2n} \Delta_x(\theta, \tau)}{\partial \theta^{2n}}. \quad (\text{III. 39})$$

Нетрудно видеть, что при $\tau \rightarrow \infty$ полученные формулы для структурных функций переходят в соответствующие формулы для функций корреляции, если, разумеется, последние существуют.

Поскольку $\Delta_{xx}(\theta, \tau) = \Delta_x(\theta, \tau)$ есть функция четная по первому аргументу θ , а производная четной функции есть нечетная и наоборот, легко видеть, что

$$\Delta_{x^{(n)}x^{(m)}}(\theta, \tau) = \begin{cases} 0, & n+m \text{ нечетно,} \\ (-1)^n \frac{\partial^{n+m} \Delta_x(\theta, \tau)}{\partial \theta^{n+m}}, & n+m \text{ четно.} \end{cases} \quad (\text{III. 40})$$

ж. Фурье-преобразования от некоторых операций над структурными функциями.

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^{2n} \Delta_{\xi\eta}(\theta, \tau)}{\partial \theta^{2n}} \cos \omega \theta d\theta = (-1)^n \omega^{2n} (1 - \cos \omega \tau) S_{\xi\eta}^0(\omega). \quad (\text{III. 41})$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^{2n+1} \Delta_{\xi\eta}(\theta, \tau)}{\partial \theta^{2n+1}} \cos \omega \theta d\theta = (-1)^n \omega^{2n+1} (1 - \cos \omega \tau) S_{\xi\eta}^1(\omega). \quad (\text{III. 42})$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^{2n} \Delta_{\xi\eta}(\theta, \tau)}{\partial \theta^{2n}} \sin \omega \theta d\theta = (-1)^n \omega^{2n} (1 - \cos \omega \tau) S_{\xi\eta}^1(\omega). \quad (\text{III. 43})$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^{2n+1} \Delta_{\xi\eta}(\theta, \tau)}{\partial \theta^{2n+1}} \sin \omega \theta d\theta = (-1)^{n+1} \omega^{2n+1} (1 - \cos \omega \tau) S_{\xi\eta}^0(\omega). \quad (\text{III. 44})$$

$$\frac{1}{2\pi} \oint_{-\infty}^{+\infty} \sin \omega \tau \int_0^\tau \Delta(0, u) du d\tau = -\frac{S^0(\omega)}{\omega}, \quad \omega \neq 0. \quad (\text{III. 45})$$

IV. Вынужденное решение линейного дифференциального уравнения

Пусть имеем неоднородное линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами:

$$L_n(y) = \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = F(t). \quad (\text{IV. 1})$$

Рассмотрим такой случай, когда общее решение соответствующего однородного уравнения

$$L_n(y) = 0 \quad (\text{IV. 2})$$

затухает при $t \rightarrow \infty$. В этом случае вынужденное решение уравнения (IV. 1) (если считать, что переходные процессы начались при $t = -\infty$) имеет вид

$$y(t) = \int_0^{\infty} \varphi(u) F(t-u) du. \quad (\text{IV. 3})$$

Здесь $\varphi(t)$ есть решение однородного уравнения (IV. 2) при начальных условиях

$$\varphi(0) = (\varphi')_0 = \dots = (\varphi^{(n-2)})_0 = 0, \quad (\varphi^{(n-1)})_0 = 1. \quad (\text{IV. 4})$$

Нулик означает взятие значений в точке $t=0$. Функцию $\varphi(t)$ называют часто переходной функцией системы (IV. 1), а интеграл (IV. 3) есть по существу интеграл Дюамеля, хорошо известный из теории переходных процессов.

Рассмотрим конкретный вид $y(t)$ для трех частных случаев.

а. Уравнение первого порядка.

$$\frac{dy}{dt} + a_0 y = F(t).$$

Переходная функция $\varphi(t)$ должна удовлетворять условиям

$$\frac{d\varphi}{dt} + a_0 \varphi = 0, \quad \varphi(0) = 1.$$

Легко видеть, что она равна $\varphi(t) = e^{-a_0 t}$. Тогда на основании (IV. 3) вынужденное решение равно

$$y(t) = \int_0^{\infty} e^{-a_0 u} F(t-u) du. \quad (\text{IV. 5})$$

б. Уравнение второго порядка.

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = F(t).$$

Пусть характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0$$

имеет различные вещественные отрицательные корни, равные $-\lambda_1, -\lambda_2$ ($\lambda_1, \lambda_2 > 0$). Тогда легко проверить, что $\varphi(t)$, подчиняющееся начальным условиям (IV. 4), имеет вид

$$\varphi(t) = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}).$$

Тем самым

$$y(t) = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \int_0^{\infty} [e^{-\lambda_1 u} - e^{-\lambda_2 u}] F(t-u) du. \quad (\text{IV. 6})$$

Если корни характеристического уравнения являются комплексными равными $-m \pm jn$, то

$$\varphi(t) = \frac{1}{n} e^{-mt} \sin nt,$$

и тогда

$$y(t) = \frac{1}{n} \int_0^{\infty} e^{-mu} \sin nu F(t-u) du. \quad (\text{IV. 7})$$

в. Уравнение третьего порядка.

$$\frac{d^3 y}{dt^3} + a_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = F(t).$$

Пусть характеристическое уравнение

$$\lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0$$

имеет различные вещественные отрицательные корни, равные $-\lambda_1, -\lambda_2, -\lambda_3$ ($\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 > 0$). Тогда можно показать, что

$$\varphi(t) = \frac{\lambda_3 - \lambda_2}{\Delta} e^{-\lambda_1 t} + \frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\Delta} e^{-\lambda_2 t} + \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\Delta} e^{-\lambda_3 t}$$

и, следовательно,

$$y(t) = \frac{1}{\Delta} \int_0^{\infty} [(\lambda_3 - \lambda_2) e^{-\lambda_1 u} + (\lambda_1 - \lambda_3) e^{-\lambda_2 u} + (\lambda_2 - \lambda_1) e^{-\lambda_3 u}] F(t-u) du, \quad (\text{IV. 8})$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \end{vmatrix}.$$

Если один корень является вещественным отрицательным, равным $-\lambda_1$, а два других являются комплексно-сопряженными $-m \pm jn$, то

$$\varphi(t) = \frac{e^{-\lambda_1 t}}{\Delta_1} + \frac{e^{-mt}}{\Delta_1} \left[\frac{\lambda_1 - m}{n} \sin nt - \cos nt \right].$$

В этом случае (IV. 3) приводит к

$$y(t) = \frac{1}{\Delta_1} \int_0^{\infty} \left[e^{-\lambda_1 u} + e^{-mu} \left(\frac{\lambda_1 - m}{n} \sin nu - \cos nu \right) \right] F(t-u) du, \quad (\text{IV. 9})$$

где

$$\Delta_1 = \lambda_1^2 - 2m\lambda_1 + m^2 + n^2.$$

V. Специальные функции $c(x, \sigma)$, $s(x, \sigma)$

Рассмотрим функции $c(x, \sigma)$, $s(x, \sigma)$, определенные следующим образом ($0 < \sigma < 1$):

$$c(x, \sigma) \equiv \int_0^x \frac{\cos u}{u^\sigma} du, \quad s(x, \sigma) \equiv \int_0^x \frac{\sin u}{u^\sigma} du. \quad (V. 1)$$

Эти функции не являются элементарными и, вообще говоря, могут быть выражены через неполные гамма-функции.

Рассмотрим поведение этих функций при больших и малых x . Прежде всего имеем

$$c(0, \sigma) = 0, \quad c(\infty, \sigma) = \Gamma(1 - \sigma) \cos \frac{\pi(1 - \sigma)}{2},$$

$$s(0, \sigma) = 0, \quad s(\infty, \sigma) = \Gamma(1 - \sigma) \sin \frac{\pi(1 - \sigma)}{2}.$$

Разлагая $\cos u$ и $\sin u$ в (V. 1) по степеням u и совершая интегрирование, нетрудно получить следующие разложения исследуемых функций по степеням x :

$$\begin{aligned} c(x, \sigma) &= \frac{x^{(1-\sigma)}}{(1-\sigma)} \left[1 - \frac{x^2(1-\sigma)}{2!(3-\sigma)} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}(1-\sigma)}{(2n)!(2n+1-\sigma)} + \dots \right], \\ s(x, \sigma) &= \frac{x^{(2-\sigma)}}{(2-\sigma)} \left[1 - \frac{x^2(2-\sigma)}{3!(4-\sigma)} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}(2-\sigma)}{(2n+1)!(2n+2-\sigma)} + \dots \right]. \end{aligned} \quad (V. 2)$$

При $x \ll 1$

$$c(x, \sigma) = \frac{x^{(1-\sigma)}}{1-\sigma}, \quad s(x, \sigma) = \frac{x^{(2-\sigma)}}{2-\sigma}. \quad (V. 3)$$

Для нахождения асимптотического поведения $c(x, \sigma)$ и $s(x, \sigma)$ при $x \gg 1$ рассмотрим интегралы

$$\int_x^\infty \frac{\cos u}{u^\sigma} du = \frac{1}{x^{\sigma-1}} \int_1^\infty \frac{\cos xv}{v^\sigma} dv, \quad \int_x^\infty \frac{\sin u}{u^\sigma} du = \frac{1}{x^{\sigma-1}} \int_1^\infty \frac{\sin xv}{v^\sigma} dv. \quad (V. 3a)$$

Используя многократное интегрирование по частям, можно найти следующее представление неопределенных интегралов, не выражающихся при σ нецелом через элементарные функции, в виде рядов:

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos xv}{v^\sigma} dv &= \frac{\sin xv}{xv^\sigma} - \frac{\sigma}{x^2} \frac{\cos xv}{v^{\sigma+1}} - \frac{\sigma(\sigma+1)}{x^3} \frac{\sin xv}{v^{\sigma+2}} + \\ &\quad + \frac{\sigma(\sigma+1)(\sigma+2)}{x^4} \frac{\cos xv}{v^{\sigma+3}} + \dots, \\ \int \frac{\sin xv}{v^\sigma} dv &= -\frac{\cos xv}{xv^\sigma} - \frac{\sigma}{x^2} \frac{\sin xv}{v^{\sigma+1}} + \frac{\sigma(\sigma+1)}{x^3} \frac{\cos xv}{v^{\sigma+2}} + \\ &\quad + \frac{\sigma(\sigma+1)(\sigma+2)}{x^4} \frac{\sin xv}{v^{\sigma+3}} + \dots \end{aligned}$$

Как нетрудно видеть, эти ряды удобно использовать тогда, когда x достаточно велико, — в этом случае всегда можно обрезать ряд на достаточно малом члене.

Интегрируя эти ряды от 1 до ∞ и подставляя в формулы (V.3а), получим

$$\int_x^{\infty} \frac{\cos u}{u^{\sigma}} du = -\frac{\sin x}{x^{\sigma}} + \sigma \frac{\cos x}{x^{\sigma+1}} +$$

$$+ \sigma(\sigma+1) \frac{\sin x}{x^{\sigma+2}} - \sigma(\sigma+1)(\sigma+2) \frac{\cos x}{x^{\sigma+3}} + \dots,$$

$$\int_x^{\infty} \frac{\sin u}{u^{\sigma}} du = \frac{\cos x}{x^{\sigma}} + \sigma \frac{\sin x}{x^{\sigma+1}} - \sigma(\sigma+1) \frac{\cos x}{x^{\sigma+2}} + \sigma(\sigma+1)(\sigma+2) \frac{\sin x}{x^{\sigma+3}} + \dots$$

Воспользовавшись этими рядами и формулами (II.25) и (II.26), получим, наконец, следующее разложение $c(x, q)$, $s(x, q)$ по степеням $1/x$:

$$\left. \begin{aligned} c(x, \sigma) &= \Gamma(1-\sigma) \cos \frac{\pi(1-\sigma)}{2} + \\ &\quad + \frac{\sin x}{x^{\sigma}} - \sigma \frac{\cos x}{x^{\sigma+1}} - \sigma(\sigma+1) \frac{\sin x}{x^{\sigma+2}} + \dots, \\ s(x, \sigma) &= \Gamma(1-\sigma) \sin \frac{\pi(1-\sigma)}{2} - \\ &\quad - \frac{\cos x}{x^{\sigma}} - \sigma \frac{\sin x}{x^{\sigma+1}} + \sigma(\sigma+1) \frac{\cos x}{x^{\sigma+2}} + \dots \end{aligned} \right\} \quad (\text{V. 4})$$

VI. Средние значения некоторых функций

При различных расчетах, проводимых в основном тексте книги, часто возникает необходимость вычисления средних значений различных функций $f(x)$, $f(x, y)$, $f(x, y, z)$, аргументами которых являются или случайные величины, или случайные функции времени $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$.

В том случае, когда аргументы x , y , z являются нормально распределенными, вычисление средних значений может быть упрощено и проведено для некоторых случаев в общем виде.

Рассмотрим три нормально распределенные случайные величины x , y , z такие, что $\langle x \rangle = \langle y \rangle = \langle z \rangle = 0$. Пусть заданы их вторые моменты $\langle x^2 \rangle$, $\langle y^2 \rangle$, $\langle z^2 \rangle$, $\langle xy \rangle$, $\langle xz \rangle$, $\langle yz \rangle$, определяющие совместные плотности вероятностей $W_{12}(x, y)$, $W_{13}(x, y, z)$. Требуется вычислить $\langle yf(x) \rangle$ и $\langle zy\psi(x) \rangle$, где $f(x)$ и $\psi(x)$ — некоторые функции. Очевидно,

$$\langle yf(x) \rangle = \int \int yf(x) W_{12}(x, y) dx dy,$$

$$\langle zy\psi(x) \rangle = \int \int \int zy\psi(x) W_{13}(x, y, z) dx dy dz.$$

Вычисление по этим формулам бывает подчас весьма громоздким и неудобным. Приведем один простой метод вычисления $\langle yf(x) \rangle$ и $\langle zy\psi(x) \rangle$, не требующий многократного интегрирования.

Введем новые переменные ξ, η, ζ с помощью следующего аффинного преобразования:

$$\begin{aligned}\xi &= x, & x &= \xi, \\ \eta &= x + ay, & y &= \frac{1}{a}(\eta - \xi), \\ \zeta &= x + by + cz, & z &= \frac{1}{c}\left[\zeta - \frac{b}{a}\eta - \left(1 - \frac{b}{a}\right)\xi\right].\end{aligned}$$

Постоянные a, b, c выберем так, чтобы $\langle \xi \eta \rangle = \langle \xi \zeta \rangle = \langle \eta \zeta \rangle = 0$. Тогда переменные ξ, η, ζ будут статистически независимыми, причем $\langle \xi \rangle = \langle \eta \rangle = \langle \zeta \rangle = 0$. В этом случае легко получить

$$\langle yf(x) \rangle = \frac{1}{a} \langle (\eta - \xi) f(\xi) \rangle = -\frac{1}{a} \langle \xi f(\xi) \rangle, \quad (VI. 1)$$

$$\begin{aligned}\langle zy\psi(x) \rangle &= \frac{1}{ac} \left\langle \left[\zeta - \frac{b}{a}\eta - \left(1 - \frac{b}{a}\right)\xi \right] [\eta - \xi] \psi(\xi) \right\rangle = \\ &= \frac{1}{ac} \left[-\frac{b}{a} \langle \eta^2 \rangle \langle \psi(\xi) \rangle + \left(1 - \frac{b}{a}\right) \langle \xi^2 \psi(\xi) \rangle \right].\end{aligned} \quad (VI. 2)$$

Здесь интегрирование является уже однократным*). Легко получить следующие значения для постоянных a, b, c :

$$a = -\frac{\langle x^2 \rangle}{\langle xy \rangle}, \quad b = \frac{\langle xz \rangle \langle xy \rangle - \langle x^2 \rangle \langle yz \rangle}{\langle yz \rangle \langle xy \rangle - \langle xz \rangle \langle y^2 \rangle}, \quad c = \frac{\langle x^2 \rangle \langle y^2 \rangle - \langle xy \rangle^2}{\langle yz \rangle \langle xy \rangle - \langle xz \rangle \langle y^2 \rangle}. \quad (VI. 3)$$

Вычисляя $\langle \eta^2 \rangle$ и подставляя (VI.3) в (VI.1) и (VI.2), окончательно получаем

$$\langle yf(x) \rangle = \frac{\langle xy \rangle}{\langle x^2 \rangle} \langle xf(x) \rangle,$$

$$\langle zy\psi(x) \rangle = \frac{1}{\langle x^2 \rangle} [\langle x^2 \rangle \langle yz \rangle - \langle xz \rangle \langle xy \rangle] \langle \psi(x) \rangle + \frac{\langle xy \rangle \langle xz \rangle}{\langle x^2 \rangle^2} \langle x^2 \psi(x) \rangle. \quad (VI. 4)$$

Для одной нормально распределенной величины имеем, в частности, следующие формулы:

$$\left. \begin{aligned}\langle \cos x \rangle &= \exp \left[-\frac{1}{2} \langle x^2 \rangle \right], & \langle \sin x \rangle &= 0, \\ \langle x \cos x \rangle &= 0, & \langle x \sin x \rangle &= \langle x^2 \rangle \exp \left[-\frac{1}{2} \langle x^2 \rangle \right], \\ \langle x^2 \cos x \rangle &= \langle x^2 \rangle [1 - \langle x^2 \rangle] \exp \left[-\frac{1}{2} \langle x^2 \rangle \right], & \langle x^2 \sin x \rangle &= 0,\end{aligned}\right\} \quad (VI. 5)$$

*) Можно ввести и другие новые переменные ξ', η', ζ' , например, с помощью ортогонального преобразования такого, что квадратичная форма в $W_{\text{из}}(x, y, z)$ приводится к сумме квадратов в новых переменных. Это также приведет к вычислению одномерных интегралов, однако более сложных, чем предлагаемые, ибо, например, $f(x)$ будет зависеть уже от всех трех переменных ξ', η', ζ' .

а также

$$\left. \begin{aligned} \langle e^{\pm x} \rangle &= \exp \left[\frac{1}{2} \langle x^2 \rangle \right], \\ \langle x e^x \rangle &= \langle x^2 \rangle \exp \left[\frac{1}{2} \langle x^2 \rangle \right], \\ \langle x^2 e^x \rangle &= \langle x^2 \rangle [1 + \langle x^2 \rangle] \exp \left[\frac{1}{2} \langle x^2 \rangle \right]. \end{aligned} \right\} \quad (\text{VI.6})$$

Используя эти формулы, на основании (VI. 4) нетрудно найти

$$\left. \begin{aligned} \langle y \cos x \rangle &= 0, \quad \langle y \sin x \rangle = \langle xy \rangle \exp \left[-\frac{1}{2} \langle x^2 \rangle \right], \\ \langle zy \cos x \rangle &= [\langle yz \rangle - \langle xy \rangle \langle xz \rangle] \exp \left[-\frac{1}{2} \langle x^2 \rangle \right], \quad \langle zy \sin x \rangle = 0, \\ \langle y e^x \rangle &= \langle xy \rangle \exp \left[\frac{1}{2} \langle x^2 \rangle \right], \\ \langle z y e^x \rangle &= [\langle yz \rangle + \langle xy \rangle \langle xz \rangle] \exp \left[\frac{1}{2} \langle x^2 \rangle \right]. \end{aligned} \right\} \quad (\text{VI. 7})$$

Если x и y — две нормально распределенные величины, то их сумма $x+y$ и разность $x-y$ также имеют нормальное распределение. В этом случае, используя (VI. 5), нетрудно получить:

$$\left. \begin{aligned} \langle \cos x \cos y \rangle &= \text{ch} \langle xy \rangle \exp \left[-\frac{1}{2} \langle x^2 \rangle - \frac{1}{2} \langle y^2 \rangle \right], \\ \langle \sin x \sin y \rangle &= \text{sh} \langle xy \rangle \exp \left[-\frac{1}{2} \langle x^2 \rangle - \frac{1}{2} \langle y^2 \rangle \right], \\ \langle \cos x \sin y \rangle &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (\text{VI. 8})$$

VII. Поправка к квазистатистическому решению системы двух уравнений первого порядка

Рассмотрим систему двух уравнений, определяющих функции времени $x(t)$ и $y(t)$:

$$\left. \begin{aligned} \alpha(x, y) \frac{dx}{dt} + X(x, y) &= K(x, y, f(t)), \\ \beta(x, y) \frac{dy}{dt} + Y(x, y) &= L(x, y, f(t)). \end{aligned} \right\} \quad (\text{VII. 1})$$

Функция $f(t)$ является достаточно медленной задающей функцией.

Пусть $f(t)$ является постоянной величиной. Нас интересует решение системы (VII.1), также постоянное во времени; обозначим его x_0 и y_0 . Нетрудно видеть, что x_0 и y_0 определяются уравнениями

$$X(x_0, y_0) = K(x_0, y_0, f), \quad Y(x_0, y_0) = L(x_0, y_0, f).$$

Допустим, что решением этих уравнений являются

$$x_0 = x_0[f], \quad y_0 = y_0[f]. \quad (\text{VII. 2})$$

Пусть теперь функция $f(t)$ является не постоянной, а переменной, но достаточно медленной. Требуется найти поправку к полученному решению (VII.2). Решение уравнения (VII.1) будем искать в виде

$$x = x_0 + a_1 \dot{f} + a_2 \ddot{f} + \dots, \quad y = y_0 + b_1 \dot{f} + b_2 \ddot{f} + \dots, \quad (\text{VII. 3})$$

где вторые, третьи и т. д. члены являются поправками к x_0, y_0 , пропорциональными соответствующим производным функции $f(t)$. Очевидно, что необходимо найти коэффициенты $a_1, a_2, \dots; b_1, b_2, \dots$. Ограничимся здесь отысканием поправки в первом приближении, т. е. нахождением коэффициентов a_1 и b_1 . Подставляя (VII.3) в (VII.1), учитывая неравенства

$$|a_1 \dot{f}| \ll |x_0|, \quad |b_1 \dot{f}| \ll |y_0|$$

и приравнявая, наконец, члены при \dot{f} , получим два уравнения

$$\left. \begin{aligned} \alpha_0 x'_{0f} + X'_{x0} a_1 + X'_{y0} b_1 &= K'_{x0} a_1 + K'_{y0} b_1, \\ \beta_0 y'_{0f} + Y'_{x0} a_1 + Y'_{y0} b_1 &= L'_{x0} a_1 + L'_{y0} b_1. \end{aligned} \right\} \quad (\text{VII. 4})$$

Здесь введены обозначения:

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \alpha(x_0, y_0), & X'_{x0} &= (\partial X(x, y)/\partial x)_{x_0, y_0}, \\ \beta_0 &= \beta(x_0, y_0), & X'_{y0} &= (\partial X(x, y)/\partial y)_{x_0, y_0}, \\ x'_{0f} &= dx_0[f]/df, & Y'_{x0} &= [\partial Y(x, y)/\partial x]_{x_0, y_0}, \\ y'_{0f} &= dy_0[f]/df, & Y'_{y0} &= [\partial Y(x, y)/\partial y]_{x_0, y_0}, \\ L'_{x0} &= [\partial L(x, y, f)/\partial x]_{x_0, y_0}, & K'_{x0} &= [\partial K(x, y, f)/\partial x]_{x_0, y_0}, \\ L'_{y0} &= [\partial L(x, y, f)/\partial y]_{x_0, y_0}, & K'_{y0} &= [\partial K(x, y, f)/\partial y]_{x_0, y_0}. \end{aligned}$$

Преобразовывая (VII.4), получаем для искоемых a_1 и b_1 линейную систему двух уравнений:

$$\left. \begin{aligned} (X'_{x0} - K'_{x0}) a_1 + (X'_{y0} - K'_{y0}) b_1 &= -\alpha_0 x'_{0f}, \\ (Y'_{x0} - L'_{x0}) a_1 + (Y'_{y0} - L'_{y0}) b_1 &= -\beta_0 y'_{0f} \end{aligned} \right\} \quad (\text{VII. 5})$$

Отсюда легко найти коэффициенты a_1 и b_1 :

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{\beta_0 y'_{0f} (X'_{y0} - K'_{y0}) - \alpha_0 x'_{0f} (Y'_{y0} - L'_{y0})}{(X'_{x0} - K'_{x0}) (Y'_{y0} - L'_{y0}) - (X'_{y0} - K'_{y0}) (Y'_{x0} - L'_{x0})}, \\ b_1 &= \frac{\alpha_0 x'_{0f} (Y'_{x0} - L'_{x0}) - \beta_0 y'_{0f} (X'_{x0} - K'_{x0})}{(X'_{x0} - K'_{x0}) (Y'_{y0} - L'_{y0}) - (X'_{y0} - K'_{y0}) (Y'_{x0} - L'_{x0})}. \end{aligned}$$

Из вышеприведенного расчета очевидно, что для справедливости последних двух формул достаточно потребовать дифференцируемости $x_0[f], y_0[f]$ по f , дифференцируемости $X(x, y), Y(x, y), L(x, y, f), K(x, y, f)$ по x и по y и неравенства нулю определителя системы (VII.5).

Аналогичным образом могут быть найдены коэффициенты a_k, b_k при высших производных.

Приведем несколько примеров. Одному линейному уравнению первого порядка

$$\frac{dz}{dt} + az = f(t)$$

соответствует, как нетрудно получить, следующий ряд:

$$z(t) = \frac{1}{a} f(t) - \frac{1}{a^2} \frac{df}{dt} + \frac{1}{a^3} \frac{d^2 f}{dt^2} - \frac{1}{a^4} \frac{d^3 f}{dt^3} + \dots$$

Нелинейному уравнению первого порядка

$$\frac{dx}{dt} + B(x) = F(t)$$

соответствует решение первого приближения

$$x(t) = x_0(t) - \frac{\partial x_0 / \partial F}{[\partial B / \partial x]_{x_0}} \frac{dF}{dt},$$

где $x_0 = x_0(t) = x_0[F(t)]$ есть решение уравнения $B(x) = F(t)$.

Рассмотрим систему двух уравнений первого порядка

$$\alpha \frac{d\varphi}{dt} + A(\rho) = \cos(\varphi - \psi), \quad \beta \frac{d\rho}{dt} + B(\rho) = \sin(\varphi - \psi).$$

Можно показать, что с учетом поправок первого приближения, решение имеет вид

$$\rho = \rho_0 - \frac{\alpha A}{BB' + AA'} \frac{d\psi}{dt}, \quad \varphi = \psi(t) + D - \frac{\beta B'}{BB' + AA'} \frac{d\psi}{dt}.$$

Здесь $D = \arctg B(\rho_0)/A(\rho_0)$, а ρ_0 есть постоянная величина, равная корню уравнения

$$A^2(\rho) + B^2(\rho) = 1.$$

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. А. М. Яглом, Введение в теорию стационарных случайных функций, УМН 7, 3 (1952).
2. С. Райс, Теория флуктуационных шумов, в сб. «Теория передачи электрических сигналов при наличии помех», ИЛ, 1953.
3. В. И. Бунимович, Флуктуационные процессы в радиоприемных устройствах, «Сов. радио», 1951.
4. Б. Р. Левин, Теоретические основы статистической радиотехники, «Сов. радио», 1966.
5. Дж. Л. Дуб, Вероятностные процессы, ИЛ, 1956.
6. А. Н. Колмогоров, Локальная структура турбулентности в несжимаемой жидкости при очень больших числах Рейнольдса, ДАН СССР 30, 299 (1941).
7. А. Н. Колмогоров, Рассеяние энергии при локально-изотропной турбулентности, ДАН СССР 32, 19 (1941).
8. В. И. Татарский, Теория флуктуационных явлений при распространении волн в турбулентной атмосфере, Изд-во АН СССР, 1959, гл. I.
9. В. И. Татарский, Распространение волн в турбулентной атмосфере, Докторская диссертация, ИФА АН СССР, 1964.
10. А. Н. Малахов, К спектрально-корреляционному анализу сигналов с неинтегрируемыми спектрами, Изв. вузов (Радиофизика) 9, 595 (1966).
11. Р. Л. Стратонович, Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике, «Сов. радио», 1961, гл. I.
12. С. Чандрасекар, Стохастические проблемы в физике и астрономии, ИЛ, 1947.
13. С. М. Рытов, Введение в статистическую радиофизику, «Наука», 1966, гл. IV.
14. Д. Х. Лэннинг, Р. Г. Бэттин, Случайные процессы в задачах автоматического управления, ИЛ, 1958.
15. В. Б. Давенпорт, В. Л. Рут, Введение в теорию случайных сигналов и шумов, ИЛ, 1960.
16. В. И. Тихонов, Статистическая радиотехника, «Сов. радио», 1966.
17. В. Л. Грановский, Электрические флуктуации, ОНТИ, 1936.
18. С. Гольдман, Гармонический анализ, модуляция и шумы, ИЛ, 1951.
19. А. Ван-дер-Зил, Флуктуации в радиотехнике и физике, Госэнергоиздат, 1958.
20. Шумы в электронных приборах, сб. статей, пер. с англ. под ред. К. И. Палатова, «Энергия», 1964.
21. H. Nyquist, Thermal agitation of electric charge in conductors, Phys. Rev. 32, 110 (1928).
22. С. М. Рытов, Теория электрических флуктуаций и теплового излучения, Изд-во АН СССР, 1953.
23. Г. С. Горелик, Некоторые применения второго закона термодинамики к электрическим флуктуациям, УФН 44, 33 (1951).

24. В. Л. Гинзбург, Некоторые вопросы теории электрических флуктуаций, УФН **46**, 348 (1952).
25. W. Schottky, Spontaneous current fluctuations in various conductors, Ann. Phys. **57**, 541 (1918).
26. J. B. Johnson, The Schottky effect in low frequency circuits, Phys. Rev. **26**, 71 (1925).
27. W. Schottky, Small-shot effect and flicker effect, Phys. Rev. **28**, 74 (1926).
28. R. C. Meyer, E. A. Johnson, Measurement of flicker effect, Phys. Rev. **46**, 143 (1934).
29. W. Graffunder, Das Röhrenrauschen bei Niederfrequenz, Telefunkenröhre **5**, 41 (1932).
30. Q. Orsini, L'amplification sélective en basse fréquence, L'Onde Electrique **30**, 91 (1950).
31. К. Кроненбергер, Experimentelle Untersuchung der Schwankungserscheinungen, die Verstärkung von Gleichspannungs- und Tiefstfrequenzverstärkern begrenzen, Z. angew. Phys. **3**, 1 (1951).
32. H. Rothe, W. Dahlke, J. Schubert, Messung der Konstanten des Funkeleffekts, Telefunken-Ztg. **26**, 77 (1953).
33. H. J. Hannam, A. Van der Ziel, On the flicker noise generated in an interface layer, J. Appl. Phys. **25**, 1336 (1954).
34. А. Н. Малахов, В. Е. Дубровин, Некоторые исследования эффекта мерцания, ЖТФ **26**, 1451 (1956).
35. Б. В. Абрамов, В. И. Тихонов, Экспериментальные исследования низкочастотных шумов ламп и полупроводниковых приборов, Радиотехника **12**, № 6, 45 (1957).
36. А. Н. Малахов, Флуктуации коэффициента усиления ламповых усилителей, Радиотехника и электроника **2**, 438 (1957).
37. А. И. Чикин, Фликкер-шум пальчиковых радиоламп, Изв. вузов (Радиофизика) **3**, 419 (1960).
38. G. G. Macfarlane, Flicker noise in semiconductors and thermoionic tubes, Proc. Phys. Soc. **B59**, 366 (1947).
39. W. W. Lindemann, A. Van der Ziel, New mechanism for the generation of flicker noise in tubes with oxide-coated cathodes, J. Appl. Phys. **27**, 1179 (1956).
40. J. G. Van Vijnngaarden, K. M. Van Vliet, C. J. Van Leeuwen, Low frequency fluctuations in thermoionic emitters, Physica **18**, 689 (1952).
41. А. Н. Малахов, К вопросу о спектре фликкер-шума, Радиотехника и электроника **4**, 54 (1959).
42. C. J. Christensen, G. L. Pearson, Spontaneous resistance fluctuations in carbon microphones and other granular resistances, Bell Syst. Techn. J. **15**, 197 (1936).
43. J. Bernamont, Fluctuations de potentiel aux bornes d'un conducteur métallique de faible volume parcouru par un courant, Ann. phys. **7**, 71 (1937).
44. R. H. Campbell, R. A. Chipman, Noise from current-carrying resistors 20 to 200 kc, Proc. IRE **37**, 938 (1949).
45. G. T. Conrad, Noise measurements of composition resistors, Trans. IRE **CP-4**, 61 (1955).
46. Т. Д. Разина, Фликкер-шум непроволочных сопротивлений в диапазоне частот 1—300 гц, Изв. вузов (Радиофизика) **3**, 234 (1960).
47. P. H. Miller, Noise spectrum of crystal rectifiers, Proc. IRE **35**, 252 (1947).
48. M. N. Nifontoff, Sur l'effet de scintillation des cristaux detecteurs, C. R. Acad. Sci. **235**, 1117, 1952.

49. H. M. Vliet, C. J. Leeuwen, J. Bloc, C. Ris, Measurement on current noise in carbon resistors and in thermistors, *Physica* **20**, 481 (1954).
50. S. Okazaki, H. Oki, Noise in germanium, *J. Phys. Soc. Japan* **10**, 910 (1955).
51. D. Barber, Measurements of current noise in lead sulphide (photoconductive cells) at audio frequencies, *Proc. Phys. Soc.* **B68**, 898 (1955).
52. F. J. Hyde, Measurement of noise spectra of a germanium $p-n$ -junction diode, *Proc. Phys. Soc.* **B69**, 231 (1956).
53. А. Ван-дер-Зил, Флуктуационные явления в полупроводниках, ИЛ, 1961.
54. M. N. Nifontoff, One interprétation possible de l'effet de scintillation dans les détecteurs à cristaux, *C. R. Acad. Sci.* **240**, 1695 (1955).
55. K. W. Böger, K. Junge, Zur Frequenzabhängigkeit von Elektronenschwankungserscheinungen in Halbleitern, *Z. Naturforsch.* **8a**, 753 (1953).
56. А. Н. Малахов, Высокочувствительный спектральный анализатор низких частот, ПТЭ № 1, 79 (1958).
57. R. J. Zijlstra, C. J. Alkemade, Flicker noise in vacuum photoelectric diodes, *J. Appl. Phys.* **27**, 656 (1956).
58. R. C. Schwantes, H. J. Hannam, A. Van der Ziel, Flicker noise in secondary emission tubes and multiplier phototubes, *J. Appl. Phys.* **27**, 573 (1956).
59. D. K. Baker, Flicker noise in germanium rectifiers at very-low and audio frequencies, *J. Appl. Phys.* **25**, 922 (1954).
60. B. V. Rollin, I. M. Templeton, Noise in semiconductors at very low frequencies, *Proc. Phys. Soc.* **B66**, 259 (1953).
61. B. V. Rollin, I. M. Templeton, Noise in germanium filaments at very low frequencies, *Proc. Phys. Soc.* **B67**, 271 (1954).
62. T. E. Firlie, H. Winston, Noise measurements in semiconductors at very low frequencies, *J. Appl. Phys.* **26**, 716 (1955).
63. M. Surdin, Une theorie des fluctuations électriques dans les semiconducteurs, *J. Phys. et Radium* **12**, 777 (1951).
64. D. A. Bell, Phenomenological approach to «current noise», *Brit. J. Appl. Phys.* **6**, 284 (1955).
65. H. Schönfeld, Beitrag zum $1/f$ -Gesetz beim Rauschen von Halbleitern, *Z. Naturforsch.* **10a**, 291 (1955).
66. Ф. Ф. Власов, Электровакуумные приборы, Связьиздат, 1949.
67. Л. А. Вайнштейн, Депрессия дробового эффекта в цилиндрических диодах, ЖТФ **17**, 1035 (1947).
68. А. Н. Малахов, Стабилизация феррорезонансным стабилизатором хаотических флуктуаций напряжения, Изв. АН СССР (ОТН) № 7, 3 (1955).
69. К. С. Популях, Эффект мерцания и методы испытания конденсаторов, Изв. Ленингр. электротехнического ин-та, вып. 26, 89 (1955).
70. М. Д. О. Стретт, Современные многосеточные электронные лампы, Оборонгиз, 1940, т. II.
71. C. S. Bull, The capacitance between diode electrodes in the presence of space charges, *Proc. IEE* **B-104**, 374 (1957).
72. М. Е. Жаботинский, Ю. Л. Свердлов, Фазовая нестабильность многокаскадных умножителей частоты, Радиотехника **19**, № 5, 5 (1964).
73. М. Е. Жаботинский, Ю. Л. Свердлов, Основы теории и техники умножения частоты, «Сов. радио», 1964, гл. IV.
74. C. S. Bull, Space charge as a source of flicker effect, *Proc. IEE* **B-105**, 190 (1958).
75. P. W. Anderson, P. R. Weiss, Exchange narrowing in paramagnetic resonance, *Rev. Mod. Phys.* **25**, 269 (1953).

76. P. W. Anderson, A mathematical model for the narrowing of spectral lines by exchange or motion, J. Phys. Soc. Japan **9**, 316 (1954).
77. J. H. Van Vleck, Spectral line width and theory of magnetism, Nuovo Cimento, Suppl. **2**, 993 (1957).
78. D. Middleton, The distribution of energy in randomly modulated waves, Phil. Mag. **42**, 689 (1951).
79. D. Middleton, On the distribution of energy in noise- and signal-modulated waves, Quart. Appl. Math. **9**, 337; **10**, 35 (1952).
80. А. Н. Малахов, Флуктуации параметров некоторых колебательных систем, Кандидатская диссертация, Горьковский ун-т, 1953.
81. J. L. Stewart, The power spectrum of a carrier frequency modulated by Gaussian noise, Proc. IRE **42**, 1539 (1954).
82. С. Я. Раевский, К теории колебаний, стохастически модулированных по амплитуде и фазе, Вестник МГУ (мат., мех.) № 2, 109 (1956).
83. N. M. Blachman, Limiting frequency-modulated spectra, Inform. a. Control. **1**, 26 (1957).
84. J. A. Muller, D. Middleton, Limiting forms of FM noise spectra, Proc. IRE **45**, 874 (1957).
85. Д. Миддлтон, Введение в статистическую теорию связи, «Сов. радио», 1962, т. II.
86. Ю. Э. Аптэк, А. М. Гершт, К вопросу о крыльях спектра квазигармонического сигнала, Изв. вузов (Радиофизика) **6**, 311 (1963).
87. A. Erdélyi, Asymptotic approximations to fourier integral and the principle of stationary phase, J. Soc. Ind. Appl. Math. **3**, 17 (1955).
88. Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, Физматгиз, 1958.
89. С. М. Рытов, А. М. Прохоров, Ф. Е. Жаботинский, К теории стабилизации частоты, ЖЭТФ **15**, 557, 613 (1945).
90. Р. В. Хохлов, К теории захватывания при малой амплитуде внешней силы, ДАН СССР **97**, 411 (1954).
91. Р. В. Хохлов, Об одном случае взаимной синхронизации отражательных клистронов, Радиотехника и электроника **1**, 88 (1956).
92. H. A. Kramers, Brownian motion in a field of force and the diffusion model of chemical reactions, Physica **7**, 284 (1940).
93. Отражательные клистроны, пер. с англ. под ред. Е. Д. Науменко, «Сов. радио», 1954.
94. Магнетроны сантиметрового диапазона, пер. с англ. под ред. С. А. Зусмановского, «Сов. радио», 1950.
95. С. И. Бычков, Вопросы теории и практического применения много-резонаторных магнетронов, ЛКВВИА им. А. Ф. Можайского, 1958.
96. В. Н. Никонов, Режим стационарного одночастотного колебания магнетронного генератора, Изв. вузов (Радиофизика) **5**, 260 (1962).
97. В. М. Лопухин, Возбуждение электромагнитных колебаний и волн электронными потоками, Гостехиздат, 1953.
98. Г. А. Гринберг, В. С. Лукошков, К теории магнетрона с разрезным анодом, ЖТФ **5**, 1426 (1935).
99. M. T. Grechowa, Experimentelle Untersuchung der Bahnkurven der Elektronen in Magnetron mit geschlitzter Anode, Techn. Phys. USSR **2**, 560 (1935).
100. M. T. Grechowa, Untersuchung der Elektronenbahnkurven in Magnetron, Techn. Phys. USSR **3**, 633 (1936).
101. В. И. Калинин, Генерирование дециметровых и сантиметровых волн, Связьиздат, 1948.
102. Г. А. Гринберг, Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений, Изд. АН СССР, 1948.

103. В. Ф. Коваленко, Введение в электронику сверхвысоких частот, «Сов. радио», 1955.
104. А. И. Герещенко, М. Я. Минц, Влияние различных факторов на величину электронного смещения частоты магнетрона, Изв. вузов (Радиофизика) 3, 1054 (1960).
105. Г. В. Кисунько, Электродинамика полых систем, ВКАС, 1949.
106. А. Г. Гуревич, Полые резонаторы и волноводы, «Сов. радио», 1952.
107. Л. И. Мандельштам, Н. Д. Папалекси, О параметрическом возбуждении электрических колебаний, ЖТФ 3, 5 (1934).
108. Л. И. Мандельштам, Полное собрание сочинений, Изд. АН СССР, 1947.
109. М. А. Дивильковский, С. М. Рытов, К вопросу о самовозбуждении и резонансе в системе с периодически изменяющейся самоиндукцией, ЖТФ 6, 471 (1936).
110. К. Ф. Теодорчик, Автоколебательные системы, Гостехиздат, 1948.
111. Н. Г. Басов, А. М. Прохоров, Применение молекулярных пучков для радиоспектроскопического изучения вращательных спектров молекул, ЖЭТФ 27, 431 (1954).
112. Н. Г. Басов, А. М. Прохоров, Теория молекулярного генератора и молекулярного усилителя мощности, ДАН СССР 101, 47 (1955).
113. Н. Г. Басов, А. М. Прохоров, Молекулярный генератор и усилитель, УФН 57, 485 (1955).
114. J. P. Gordon, H. J. Zeiger, C. H. Townes, Molecular microwave oscillator and new hyperfine structure in the microwave spectrum of NH_3 , Phys. Rev. 95, 282 (1954).
115. J. P. Gordon, H. J. Zeiger, C. H. Townes, The maser-new type of microwave amplifier, frequency standart, and spectrometer, Phys. Rev. 99, 1264 (1955).
116. Н. Г. Басов, А. М. Прохоров, Теория молекулярного генератора и молекулярного усилителя мощности, ЖЭТФ 30, 560 (1956).
117. K. Shimoda, T. C. Wang, C. H. Townes, Further aspects of the theory of the maser, Phys. Rev. 102, 1308 (1956).
118. Н. Г. Басов, Молекулярный генератор, Радиотехника и электроника, 1, 752 (1956).
119. Ю. Л. Климонтович, Р. В. Хохлов, К теории молекулярного генератора, ЖЭТФ 32, 1150 (1957).
120. В. М. Файн, Об уравнениях колебаний молекулярного генератора, ЖЭТФ 33, 945 (1957).
121. Н. Г. Басов, А. П. Петров, Об относительной стабильности частоты молекулярных генераторов, Радиотехника и электроника 3, 298 (1958).
122. Х. Ю. Халдре, Р. В. Хохлов, Об устойчивости колебаний в молекулярном генераторе, Изв. вузов (Радиофизика) 1, № 5—6, 60 (1958).
123. А. С. Гуртовник, К теории молекулярного генератора, Изв. вузов (Радиофизика) 1, № 5—6, 83 (1958).
124. А. Н. Ораевский, К теории молекулярного генератора, Радиотехника и электроника 4, 718 (1959).
125. А. Ф. Мухамедгалиева, Р. В. Хохлов, К вопросу об устойчивости колебаний в молекулярном генераторе, Изв. вузов (Радиофизика) 4, 259 (1961).
126. А. Н. Ораевский, Теоретическое исследование стабильности частоты молекулярного генератора, Труды ФИАН 21, 3 (1963).
127. Ф. В. Бункин, О понятии эффективной температуры для стационарных неравновесных систем, Изв. вузов (Радиофизика) 4, 496 (1961).
128. В. С. Троицкий, В. Б. Цареградский, О шумах возбужденной среды с двумя уровнями, Изв. вузов (Радиофизика) 4, 508 (1961).

129. I. R. Senitzky, Dissipation in quantum mechanics. The harmonic oscillator, Phys. Rev. **119**, 670 (1960).
 130. А. Н. М а л а х о в, Флуктуации коэффициента передачи смесителя на кристаллическом диоде, Изв. вузов (Радиофизика) **3**, 1001 (1960).
 131. А. Н. М а л а х о в, Флуктуации сопротивления полупроводниковых детекторов, Радиотехника и электроника **3**, 547 (1958).
 132. М. С. С к а б о в с к и й, В. И. Ч у г а е в а, Экспериментальное исследование флуктуаций коэффициента передачи кристаллического смесителя, Радиотехника и электроника **9**, 546 (1964).
 133. А. Н. М а л а х о в, Прохождение квазимонохроматического сигнала через нестабильный смеситель, Изв. вузов (Радиофизика) **3**, 1004 (1960).
 134. Е. Т и т ч м а р ш, Введение в теорию интегралов Фурье, Гостехиздат, 1948.
 135. Г. Х а р д и, Расходящиеся ряды, ИЛ, 1951.
-

БИБЛИОГРАФИЯ

1933

1. Л. С. Понтрягин, А. А. Андронов, А. А. Витт, О статистическом рассмотрении динамических систем, ЖЭТФ 3, 165.

1938

1. И. Л. Берштейн, О флуктуациях вблизи периодического движения автоколебательной системы, ДАН СССР 20, 11.

1941

1. И. Л. Берштейн, Флуктуации в автоколебательной системе и определение естественной размытости частоты лампового генератора, ЖТФ 11, 305.

1948

1. D. R. Hamilton, J. K. Knipp, J. B. H. Kuper, Klystrons and microwave triodes, MIT, Radiation laboratory series 7, McGraw-Hill Book, New York.
2. F. F. Rieke, Microwave magnetrons, McGraw-Hill Book, New York.

1949

1. И. Л. Берштейн, О флуктуациях в ламповом генераторе, ДАН СССР 68, 469.

1950

1. И. Л. Берштейн, Флуктуации амплитуды и фазы лампового генератора, Изв. АН СССР (сер. физ.) 14, 145.
2. Г. С. Горелик, Нелинейные колебания, интерференция, флуктуации, Изв. АН СССР (сер. физ.) 14, 187.
3. Г. С. Горелик, К вопросу о технической и естественной ширине линии лампового генератора, ЖЭТФ 20, 351.

1952

1. M. A. Blaquièrre, Effet du bruit de fond sur la fréquence des auto-oscillateurs à lampes. Précision ultime des horloges radioélectriques, C. r. Acad. Sci. 234, 419.
2. M. A. Blaquièrre, Effet du bruit de fond sur l'amplitude des oscillateurs entretenus, C. r. Acad. sci. 234, 710.

1953

1. K. Shimoda, Length of coherent microwaves generated by electronic oscillator, J. Phys. Soc. Japan 8, 131.
2. M. A. Blaquièrre, Effet du bruit de fond sur la fréquence des auto-oscillateurs à lampes. Précision ultime des horloges radioélectriques, Ann. radio-électr. 8, № 31, 36.
3. M. A. Blaquièrre, Spectre de puissance d'un oscillateur non lineaire perturbé par le bruit, Ann. radioélectr. 8, № 32, 153.
4. M. A. Blaquièrre, Influence du bruit de la lampe dans les oscillateurs, C. r. Acad. sci. 237, 1316.
5. M. A. Blaquièrre, Effet du bruit de fond sur la fréquence des auto-oscillateurs à lampes, Paris, Gauthier-Villars.
6. J. van Slooten, Noise properties of LC-oscillators, Electronic Applic. Bull. 14, 33.
7. D. Middleton, W. M. Gottschalk, J. B. Wiesner, Noise in CW-magnetrons, J. Appl. Phys. 24, 1065.

1954

1. И. С. Гоноровский, О флуктуационном характере установления колебаний в автогенераторе, ДАН СССР 94, 869.
2. E. Nicolaïu, Stabilitate oscilatorilor electronici, Bul. stiint. Acad. R. P. Române Sec. mat. și fiz. 6, 691.
3. П. И. Кузнецов, Р. Л. Стратонович, В. И. Тихонов, О воздействии электрических флуктуаций на ламповый генератор, ДАН СССР 97, 639.
4. М. Е. Жаботинский, О флуктуациях в генераторе с инерционной нелинейностью, ЖЭТФ 26, 758.
5. R. Mueller, Noise measurements of microwave local oscillators, Trans. IRE ED-1, № 4, 42.
6. G. C. Dalman, A. S. Rhoads, Microwave oscillator noise spectrum measurements, Trans. IRE ED-1, № 4, 51.
7. D. Middleton, Theory of phenomenological models and measurements of the fluctuating output of CW-magnetrons, Trans. IRE ED-1, № 4, 56.
8. W. M. Gottschalk, Direct detection measurements of noise in CW-magnetrons, Trans. IRE ED-1, № 4, 91.
9. R. A. La Plante, Development of a low-noise X-band CW-klystron power oscillator, Trans. IRE ED-1, № 4, 99.
10. C. G. Lehr, A. L. Collins, Physical mechanism of noise generation in magnetrons, Trans. IRE ED-1, № 4, 260.
11. R. L. Krulee, Carcinotron noise measurements, Trans. IRE ED-1, № 4, 131.
12. G. Convert, O. Doehler, The signal to noise ratio in the M-carcinotron, Trans. IRE ED-1, № 4, 184.

1955

1. L. Jampierre, Etude des fluctuations relatives de fréquence de deux klystrons reflex stabilisés par divers procédés, Ann. Télécomm. 10, 65, 87.
2. И. С. Гоноровский, О флуктуационном характере установления колебаний в электронном автогенераторе, Тр. Моск. авиац. ин-та, вып. 50, 125.
3. П. И. Кузнецов, Р. Л. Стратонович, В. И. Тихонов, Воздействия электрических флуктуаций на ламповый генератор, ЖЭТФ 28, 509.
4. И. С. Гоноровский, О флуктуациях фазы в ламповом генераторе, ДАН СССР 101, 657.
5. С. М. Рытов, Флуктуации в автоколебательных системах томсоновского типа, ЖЭТФ 29, № 3(9), 304, 315.

1956

1. M. A. Blaquièrre, Limite imposée par le bruit de fond a la précision des horloges radioélectriques, *Ann. franc. chronom.*, **10**, № 1, 15.
2. Н. Ф. Алексеев, Исследование процесса установления колебаний в генераторе, *Радиотехника* **11**, № 8, 52.
3. C. C. Cheng, Frequency stability of point-contact transistor oscillators, *Proc. IRE* **44**, 219.
4. C. T. Kohn, The effect of the cathode interface layer on the frequency stability of oscillators, *ATE Journal* **12**, № 2, 106.
5. J. van Slooten, Oscillations and noise, *Philips Res. Repts.* **11**, № 1, 19.
6. R. L. Beurle, A comparison of the noise, and random frequency and amplitude fluctuations in different types of oscillators, *Proc. IRE*, **B-103**, 182.
7. J. L. Stewart, Frequency modulation noise in oscillators, *Proc. IRE* **44**, 372.
8. В. И. Тихонов, И. Н. Амиантов, Воздействие медленных флуктуаций на автогенератор, *Радиотехника и электроника* **1**, 428.
9. А. Н. Малахов, О форме спектральной линии генератора при флуктуациях его частоты, *ЖЭТФ* **30**, 884.
10. С. М. Рытов, К вопросу о флуктуациях фазы в ламповом генераторе, *Радиотехника и электроника* **1**, 114.
11. В. С. Троицкий, К теории спектральной ширины линии радиочастотных генераторов и ее измерения по методу И. Л. Берштейна, *Радиотехника и электроника* **1**, 818.
12. В. С. Троицкий, В. В. Хрулев, Измерение спектральной ширины линии клистронного генератора на волне 3,2 см. *Радиотехника и электроника* **1**, 831.
13. R. L. Bell, Klystron oscillator noise theory, *Brit. J. Appl. Phys.* **7**, 262.
14. И. Л. Берштейн, Флуктуации колебания клистронного генератора, *ДАН СССР* **106**, 453.
15. Л. И. Гудзенко, О флуктуациях в ламповом генераторе при наличии сеточного тока, *Радиотехника и электроника* **1**, 1240.
16. В. Н. Тихонов, О флуктуационном характере установления амплитуды колебаний в автогенераторе, *Радиотехника и электроника* **1**, 1262.
17. П. Ф. Фролов, К вопросу о флуктуациях амплитуды лампового генератора при некоторых режимах его работы, *Учен. зап. Куйбышевского пед. ин-та*, вып. **14**, 163.

1957

1. Г. С. Горелик, Г. А. Елкин, О преобразовании флуктуаций амплитуды и фазы автоколебаний резонансными системами, *Радиотехника и электроника* **2**, 28.
2. I. Berstein, G. Gorelik, Frequency modulation noise in oscillators, *Proc. IRE* **45**, 94.
3. M. A. Garstens, Noise in nonlinear oscillators, *J. Appl. Phys.* **28**, 352.
4. Я. И. Хургин, О ширине спектральных линий импульсных автоколебательных систем, *Радиотехника и электроника* **2**, 515.
5. И. С. Гоноровский, Еще о флуктуации фазы в ламповом генераторе, *Радиотехника и электроника* **2**, 1279.
6. А. Н. Малахов, О ширине спектральной линии генератора при флуктуациях его частоты, *Радиотехника и электроника* **2**, 1295.
7. В. И. Тихонов, Влияние собственных флуктуаций на работу автогенератора, *Вестник МГУ (сер. мат., астр., физ., хим.)* № 2, 53.
8. J. B. Cicchetti, Statistical fluctuations and stability criteria in oscillators, *Proc. Nat. Electronics Conf.* **13**, 339.

1958

1. В. С. Троицкий, Некоторые вопросы теории флуктуаций в автогенераторах, Влияние фликкер-шума, Изв. вузов (Радиофизика) 1, № 1, 20.
2. С. И. Евтянов, В. Н. Кулешов, Флуктуации в одноконтурных автогенераторах, Научн. докл. высш. школы (Радиотехника и электроника), № 4, 93.
3. И. Л. Берштейн, К теории фазовой автоподстройки частоты, Радиотехника и электроника 3, 288.
4. С. А. Ахманов, К. А. Эннок, Флуктуации амплитуды в системе двух взаимно синхронизированных отражательных клистронов, Радиотехника и электроника 3, 279.
5. В. С. Троицкий, К теории молекулярного генератора и флуктуаций его колебаний, ЖЭТФ 34, 390.
6. Kuo Ju Sung, Влияние флуктуаций на автоколебательную систему томсоновского типа, Acta scient. natur., Univ. pekinensis 4, № 3, 287.
7. J. B. Ciccetti, J. Munusian, Noise characteristics of backward wave oscillator, IRE Nat. Conv. Rec. 6, № 3, 84.
8. А. А. Первозванский, Приближенный метод исследования автоколебательных систем при наличии случайных воздействий, Изв. АН СССР (ОТН), № 3, 14.
9. Я. И. Хургин, Спектр импульсных случайных процессов с независимыми интервалами и ширина спектральных линий импульсных автоколебаний, Науч. докл. высш. школы (Радиотехника и электроника), № 1, 96.
10. Б. Г. Горбань, Дисперсия фазового набег клистронного генератора, стабилизированного по методу автоматической подстройки, Научн. докл. высш. школы (Радиотехника и электроника), № 1, 280.
11. М. В. Капранов, Фильтрация помех при фазовой автоподстройке частоты, Научн. докл. высш. школы (Радиотехника и электроника), № 1, 162.
12. С. Я. Раевский, К вопросу об установлении амплитуды стационарных автоколебаний в автогенераторе при наличии флуктуаций, Вестник МГУ (сер. мат., мех., астр., физ., хим.), № 4, 137.
13. С. Я. Раевский, Р. В. Хохлов, О синхронизации автогенератора синусоидальной силой при наличии флуктуационных помех, Радиотехника и электроника 3, 507.
14. Р. Л. Стратонович, Синхронизация автогенератора при наличии помех, Радиотехника и электроника 3, 497.
15. И. Г. Акопян, Р. Л. Стратонович, Установление амплитуды в синхронизируемом автогенераторе при наличии флуктуационных помех, Научн. докл. высш. школы (сер. физ., мат.), № 1, 167.
16. И. Г. Акопян, Р. Л. Стратонович, Установление синхронной фазы в автогенераторе при наличии флуктуационных помех, Научн. докл. высш. школы (сер. физ., мат.) № 1, 162.
17. В. С. Троицкий, О статье В. И. Тихонова и И. Н. Амиантова «Воздействие медленных флуктуаций на автогенератор», Радиотехника и электроника, 3, 579.
18. В. И. Тихонов, И. Н. Амиантов, Ответ В. С. Троицкому, Радиотехника и электроника 3, 580.
19. А. Н. Малахов, Флуктуации амплитуды и частоты и естественная ширина спектральной линии колебания в автоколебательных системах со многими степенями свободы, Изв. вузов (Радиофизика) 1, № 2, 79.
20. М. Е. Жаботинский, П. Е. Зильберман, О флуктуациях в кварцевых генераторах, ДАН СССР 119, 918.
21. В. С. Троицкий, К теории молекулярного генератора и флуктуаций его колебаний, Радиотехника и электроника 3, 1298.

22. R. Liebscher, R. Müller, Frequency noise in travelling-wave tubes, Proc. IEE B-105, suppl. № 11, 796.
23. N. W. W. Smith, Noise in backward-wave oscillators, Proc. IEE B-105, suppl. 11, 800.
24. D. Ashby, R. Dyott, Measuring modulation noise from a high-power CW-klystron amplifier, Proc. IEE B-105, suppl. № 12, 879.
25. C. S. Aitchison, Frequency synchronization of an x-band reflex klystron, Proc. IEE B-105, suppl. № 12, 944.
26. А. Н. Малахов, В. М. Файн, О ширине спектральной линии квантового генератора на трех уровнях, Изв. вузов (Радиофизика) 1, № 5—6, 66.
27. Ю. А. Дрягин, Исследование технических уходов частоты генераторов, Изв. вузов (Радиофизика) 1, № 5—6, 93.
28. Р. Л. Стратонович, Ю. М. Романовский, Параметрическое воздействие случайной силы на линейные и нелинейные колебательные системы, Научн. докл. высш. школы (сер. физ., мат.), № 3, 221.
29. Р. Л. Стратонович, Ю. М. Романовский, Одновременное параметрическое воздействие гармонической и случайной силы на колебательные системы, Научн. докл. высш. школы (сер. физ., мат.), № 4, 161.

1959

1. Л. И. Гудзенко, Малые флуктуации в существенно нелинейной автоколебательной системе, ДАН СССР 125, 62.
2. Л. И. Гудзенко, О флуктуациях амплитуды колебаний автономного лампового генератора, Радиотехника и электроника 4, 97.
3. Г. М. Уткин, Синхронизация, деление и умножение частоты с повышенной стабильностью фазы, Научн. докл. высшей школы (Радиотехника и электроника) № 1, 141.
4. С. М. Рытов, К теории флуктуаций в автоколебательных системах с кусочно-линейными характеристиками, Изв. вузов (Радиофизика) 2, 50.
5. В. И. Григулевич, К вопросу о флуктуационном характере установлений колебаний в электронном автогенераторе, Изв. вузов (Радиотехника) 2, 65.
6. Р. Л. Стратонович, П. С. Ланда, Воздействие шумов на генератор с жестким возбуждением, Изв. вузов (Радиофизика) 2, 37.
7. С. И. Евтянов, Р. К. Исакова, Фазовая автоподстройка частоты с ослабленной нестабильностью фазы, Научн. докл. высш. школы (Радиотехника и электроника), № 1, 134.
8. П. С. Ланда, Изучение с помощью моделирующей установки воздействия шумов на генератор с жестким возбуждением, Изв. вузов (Радиофизика) 2, 400.
9. В. С. Троицкий, Влияние спонтанного излучения на спектральную ширину линии молекулярного генератора, Изв. вузов (Радиофизика) 2, 377.
10. И. Г. Акопян, Экспериментальное исследование флуктуационных помех на процессы синхронизации автогенератора, Изв. вузов (Радиофизика) 2, 408.
11. А. М. Васильев, Синхронизация релаксационного генератора случайным напряжением, Радиотехника и электроника 4, 942.
12. В. И. Григулевич, О флуктуационном характере спектра электронного автогенератора в импульсном режиме, Изв. вузов (Радиотехника) 2, 446.
13. В. С. Троицкий, О влиянии фликкер-эффекта на ширину линии автогенератора, Изв. вузов (Радиофизика) 2, 573.
14. В. И. Тихонов, Влияние шумов на работу схемы фазовой автоподстройки частоты, Автоматика и телемеханика 20, 1188.
15. Е. Н. Базаров, М. Е. Жаботинский, Флуктуации в отражательном клистроне, Радиотехника и электроника 4, 1685,

16. В. Н. Никонов, Исследование флуктуаций колебания клистронного генератора, Изв. вузов (Радиофизика) 2, 915.
17. П. С. Ланда, Об устойчивости автоколебательных систем и систем автоматического управления при наличии случайных воздействий, Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата физ.-мат. наук, М.
18. И. Г. Акопян, Исследование влияния флуктуационных помех на процессы синхронизации лампового генератора. Кандидатская диссертация, МГУ.
19. A. Whitwell, N. Williams, A new microwave technique for determining noise spectra at frequencies close to the carrier, Microwave J. 2, № 11, 27.

1960

1. С. А. Ахманов, О флуктуационном характере установления амплитуды колебания в автогенераторе, Изв. вузов (Радиофизика) 3, 110.
2. В. И. Тихонов, Работа фазовой автоподстройки частоты при наличии шумов, Автоматика и телемеханика 21, 301.
3. А. Н. Малахов, Ширина спектральной линии и флуктуации параметров в автоколебательных системах, Изв. вузов (Радиофизика) 3, 241.
4. T. C. Wang, Influence des fluctuations du nombre des molécules sur la fréquence d'un maser oscillateur à faisceau moléculaire, J. phys. et radium 21, 261.
5. С. А. Ахманов, Г. Ф. Антонов, Флуктуации амплитуды в импульсном генераторе на отражательном клистроне, Изв. вузов (Радиофизика) 3, 405.
6. M. J. E. Golay, Monochromaticity and noise in a regenerative electrical oscillator, Proc. IRE 48, 1473.
7. C. L. Tang, The behavior of nonlinear oscillating systems in the presence of noise, Proc. IRE 48, 1493.
8. W. A. Edson, Noise in oscillators, Proc. IRE 48, 1454.
9. Р. Х. Садеков, Мультивибратор под действием случайных сил, Изв. вузов (Радиофизика) 3, 789.
10. Р. Х. Садеков, К вопросу о флуктуациях в кусочно-линейных автоколебательных системах, Изв. вузов (Радиофизика) 3, 796.
11. И. Л. Берштейн, Флуктуации колебания параметрического генератора, Изв. вузов (Радиофизика) 3, 995.
12. J. R. Singer, Maser oscillator line shapes, в сб. «Quantum Electronics» (Sympos., N. Y., 1959), 525.
13. А. Н. Ораевский, Теоретическое исследование стабильности частоты молекулярного генератора, Кандидатская диссертация, ИРЭ, М.

1961

1. Е. Н. Базаров, М. Е. Жаботинский, Флуктуации в генераторе на отражательном клистроне, обусловленные разбросом скоростей электронов в потоке, дробовым и тепловым эффектами, Радиотехника и электроника 6, 166.
2. А. Н. Малахов, В. Н. Никонов, О корреляции флуктуаций амплитуды и частоты генераторов, Изв. вузов (Радиофизика) 4, 104.
3. A. Redhardt, Kompensation von Schwankungen der Generatorfrequenz bei Elektronenresonanzspektrometern, Z. angew. Phys. 13, № 3, 108.
4. С. И. Евтянов, В. Н. Кулешов, Флуктуации в автогенераторах, Радиотехника и электроника 6, 496.
5. С. К. Лесота, Измерение корреляции между амплитудными и частотными флуктуациями в отражательном клистроне, Вестник МГУ (сер. физ.), № 2, 3.

6. M. J. E. Golay, Note on coherence vs narrow-handedness in regenerative oscillators, masers, lasers, etc., Proc. IRE 49, 958.
7. E. A. Rinehart, C. C. Lin, Sensitive triple modulation method for measuring widths of microwave spectral lines, Rev. Scient. Instrum. 32, 562.
8. В. С. Троицкий, В. Б. Цареградский, О шумах возбужденной среды с двумя уровнями, Изв. вузов (Радиофизика) 4, 508.
9. Л. И. Гудзенко, О спектре малых флуктуаций установившихся колебаний автогенератора общего типа, Изв. вузов (Радиофизика) 4, 671.
10. С. А. Ахманов, О влиянии флуктуаций начальных условий на процесс установления колебаний в генераторе с двумя устойчивыми состояниями, Изв. вузов (Радиофизика) 4, 769.
11. А. Н. Малахов, Некоторые исследования формы спектральной линии колебания, Изв. вузов (Радиофизика) 4, 912.
12. А. Н. Шустерович, Об одном случае определения статистических характеристик фазы лампового автогенератора, находящегося под воздействием ЭДС малой амплитуды, Радиотехника и электроника 6, 1936.
13. С. А. Корнилов, В. М. Лавров, Измерение мощности амплитудных флуктуаций отражательного клистрона, Радиотехника и электроника 6, 1941.
14. А. Н. Малахов, В. Н. Никонов, Т. Д. Разина, О некоторых методах и результатах измерения флуктуаций амплитуды и частоты колебаний генераторов, Изв. вузов (Радиофизика) 4, 1052.
15. Р. Л. Стратонович, Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике, «Сов. радио», гл. IV.
16. Л. И. Гудзенко, Флуктуации в автоколебательных системах, Кандидатская диссертация, ФИАН.
17. M. A. Blaquière, L'effet de scintillation dans les autooscillateurs à lampes, C. r. Acad. sci. 252, 2390.

1962

1. П. С. Ланда, Р. Л. Стратонович, К теории флуктуационных переходов различных систем из одного стационарного состояния в другое, Вестник МГУ (сер. физ., астр.) № 1, 33.
2. А. И. Чикин, Измерение ширины спектральной линии молекулярного генератора, ЖЭТФ 42, 649.
3. В. Н. Никонов, Флуктуации амплитуды и частоты магнетронного генератора, Изв. вузов (Радиофизика) 5, 270.
4. А. Н. Малахов, Влияние флуктуаций параметров автогенератора на его поведение вблизи точки бифуркации, Изв. вузов (Радиофизика) 5, 516.
5. И. Г. Акопян, П. С. Ланда, Синхронизация автоколебаний на обертонах при наличии шумов, Радиотехника и электроника 7, 1285.
6. A. Blaquière, Spectre d'un oscillateur maser; relation avec la théorie des autooscillateurs non linéaires classiques, C. r. Acad. Sci. 255, 2929.
7. С. А. Ахманов, В. П. Комолов, Экспериментальное исследование флуктуационных явлений при установлении колебаний в генераторе с двумя устойчивыми состояниями, Изв. вузов (Радиофизика) 5, 1175.
8. С. А. Ахманов, В. Н. Ештокин, В. Ф. Марченко, К методике измерения спектров флуктуаций частоты СВЧ генераторов, Радиотехника и электроника 7, 2024.

1963

1. В. И. Тихонов, К. Б. Чельшев, Статистическая динамика фазовой автоподготовки частоты, Радиотехника и электроника 8, 331.
2. А. Н. Малахов, К вопросу о флуктуациях амплитуды и фазы автогенератора, Изв. вузов (Радиофизика) 6, 495.

3. С. С. Каратецкий, С. А. Корнилов, Е. И. Хацкевич, Возможность когерентного метода измерения низкочастотных флуктуаций маломощных СВЧ генераторов, *Радиотехника* **18**, № 6, 62.
4. А. Н. Малахов, Синхронизация генератора случайным квазимонохроматическим сигналом, *Изв. вузов (Радиофизика)* **6**, 501.
5. P. Grivet, M. A. Blaquière, Nonlinear effects of noise in electronic clocks, *Proc. IEEE* **51**, 1606.
6. Е. А. Здорнова, А. Н. Малахов, Измерения амплитудных флуктуаций генератора на полупроводниковых триодах, *Изв. вузов (Радиофизика)* **6**, 854.
7. А. Н. Малахов, В. С. Серебрянников, Измерение технической ширины спектральной линии клистронного генератора, *Изв. вузов (Радиофизика)* **6**, 1062.
8. Д. А. Дмитренко, А. И. Чикин, Ширина спектральной линии некоторых низкочастотных и радиочастотных генераторов, *Изв. вузов (Радиофизика)* **6**, 1271.
9. P. Grivet, A. Blaquière, Masers and classical oscillators, *Proc. Symp. on optical masers*, Polytechn. Inst. Brooklyn.
10. В. Н. Нионов, Исследование флуктуаций колебаний некоторых генераторов СВЧ диапазона, Кандидатская диссертация, ГГУ, Горький.
11. С. А. Ахманов, О влиянии флуктуаций на протекание переходных процессов в автоколебательных системах, Кандидатская диссертация, МГУ.

1964

1. J. A. Bellisio, C. Freed, H. A. Haus, Noise measurements on He—Ne laser oscillators, *Appl. Phys. Letts* **4**, № 1, 5.
2. И. В. Кораблев, В. В. Потемкин, О чувствительности супергетеродинного метода измерения амплитудных флуктуаций, *Радиотехника и электроника* **9**, 172.
3. И. Л. Берштейн, Флуктуации частоты генератора при применении схем автоматической стабилизации частоты, *Изв. вузов (Радиофизика)* **7**, 328.
4. М. С. Скабовский, Супергетеродинная схема измерения флуктуаций колебаний СВЧ, *Радиотехника и электроника* **9**, 434.
5. В. И. Тихонов, Влияние флуктуаций на точность работы устройств синхронизации, *УФН* **83**, 665.
6. H. Hermann, Noise in masers, *J. Res. Nat. Bur. Standards* **D-68**, 669.
7. В. П. Комолов, Экспериментальное исследование флуктуационных явлений при установлении колебаний в генераторе с тремя устойчивыми состояниями, *Вестник МГУ (сер. физ., астр.)*, № 3, 52.
8. И. В. Кораблев, Измерение частотных флуктуаций умножителя частоты на нелинейной емкости, *Вестник МГУ (сер. физ., астр.)*, № 3, 82.
9. R. L. Bailey, J. H. Sanders, The amplitude fluctuations of optical maser light, *Phys. Letts* **10**, 295.
10. В. А. Ларьков, Переходные процессы в схеме частотной автоподстройки частоты при наличии шума, *Электросвязь*, № 7, 33.
11. L. J. Prescott, A. van der Ziel, Cross-correlation between discharge current noise and laser light noise in He—Ne lasers, *Appl. Phys. Letts* **5**, № 3, 48.
12. В. И. Тихонов, К. Б. Челышев, Преобразование фазы автоколебаний резонансными системами, *Радиотехника и электроника* **9**, 1503.
13. А. М. Гершт, О спектре квазигармонического сигнала при достаточно общих предположениях относительно закона распределения флуктуаций частоты, *Изв. вузов (Радиофизика)* **7**, 701.

14. А. Н. Малахов, Решение нелинейных уравнений для флукутаций амплитуды и фазы автогенератора, Изв. вузов (Радиофизика) 7, 710.
15. В. С. Летохов, Об измерении флукутаций частоты колебания методом линии задержки, Радиотехника и электроника 9, 1628.
16. P. T. Bolwijn, Further measurements of the noise of a d.c. excited He—Ne laser oscillator, Phys. Letts 13, 311.
17. В. Б. Цареградский, К теории флукутаций молекулярного генератора, Изв. вузов (Радиофизика) 7, 1075.
18. С. К. Лесота, Экспериментальное исследование флукутаций в отражательном клистроне, Вестник МГУ (сер. физ., астр.), № 6, 25.
19. A. van der Ziel, Theory of emission noise in lasers, Proc. IEEE 52, 1738.

1965

1. R. Nowak, Eksperymentalne badanie drgań dyfuzyjnych, Arch. elektro-techniki 14, 313.
2. C. Freed, H. A. Haus, Measurement of amplitude noise in optical cavity masers, Appl. Phys. Letts 6, № 5, 85.
3. N. Houlding, Oscillator noise, Proc. IEEE 53, 302.
4. С. С. Свириденко, О вероятности перехода фазы колебаний в параметрическом генераторе, находящемся под воздействием регулярного сигнала и флукутаций, Радиотехника 20, № 5, 20.
5. С. А. Ахманов, А. С. Чиркин, О детектировании флукутаций много-модовых генераторов в нелинейной среде, Изв. вузов (Радиофизика) 8, 569.
6. В. Б. Брагинский, Об источнике сигналов с узкой естественной шириной линии, Радиотехника и электроника 10, 1535.
7. Л. П. Зачепиская, И. М. Клибанова, А. Н. Малахов, О работе систем синхронизации генераторов при флукутациях контурной емкости, Изв. вузов (Радиофизика) 8, 924.
8. А. Н. Малахов, Влияние естественных шумов автогенераторов на их взаимную синхронизацию, Изв. вузов (Радиофизика) 8, 1160.
9. С. И. Сараев, Об измерении спектральной плотности колебаний генераторов СВЧ, Изв. вузов (Радиофизика) 8, 1248.
10. E. J. Baghdady, R. N. Lincoln, B. D. Nelin, Short-term frequency stability: characterization, theory and measurement, Proc. IEEE 53, 704.

1966

1. С. С. Каратецкий, А. Ф. Емельянов, Экспериментальное исследование флукутаций колебания отражательного клистрона, Радиотехника 21, № 1, 54.
2. И. Г. Акопян, Об установлении синхронного режима в ламповом генераторе при наличии помех, Радиотехника и электроника 11, 32.
3. Л. П. Зачепиская, И. М. Клибанова, А. Н. Малахов, Влияние больших флукутаций контурной емкости на работу систем синхронизации генераторов, Изв. вузов (Радиофизика) 9, 102.
4. L. S. Cutler, C. L. Searle, Some aspects of the theory and measurement of frequency fluctuations in frequency standards, Proc. IEEE 54, 136.
5. E. Hafner, The effects of noise in oscillators, Proc. IEEE 54, 179.
6. J. A. Barnes, Atomic timekeeping and the statistics of precision signal generators, Proc. IEEE 54, 207.
7. D. W. Allan, Statistics of atomic frequency standards, Proc. IEEE 54, 221.
8. A. Tykulsky, Spectral measurements of oscillators, Proc. IEEE 54, 306.
9. D. B. Leeson, A simple model of feedback oscillator noise spectrum, Proc. IEEE 54, 329.

10. Ю. И. Зайцев, О флуктуациях излучения газового лазера, ЖЭТФ 50, 525.
11. Ю. Э. Аптэк, Д. И. Филатов, Кварцевый автогенератор с малым уровнем флуктуаций, Радиотехника и электроника 11, 759.
12. Г. Я. Олейникова, Ю. С. Федотов, О флуктуациях фазы и амплитуды в генераторе с задержанной обратной связью, Радиотехника и электроника 11, 935.
13. Ю. Э. Аптэк, А. В. Лебедев, Предельные технические возможности измерения флуктуаций фазы (частоты) генераторов дискриминаторами СВЧ, Изв. вузов (Радиофизика) 9, 608.
14. А. Н. Малахов, О флуктуациях в кварцевом генераторе, Изв. вузов (Радиофизика) 9, 622.
15. А. Н. Малахов, К вопросу о форме и ширине спектральной линии колебания при нестационарных флуктуациях его частоты, Изв. вузов (Радиофизика) 9, 625.
16. И. М. Клибанова, Влияние флуктуаций параметров на работу двух связанных генераторов, Изв. вузов (Радиофизика) 9, 720.
17. D. E. McCumber, Intensity fluctuations in the output of laser oscillators, IEEE J. QE-2, № 8, 219.
18. А. Е. Каплан, Флуктуации фазы в двухконтурном параметрическом генераторе субгармоник, Радиотехника и электроника 11, 1554.
19. С. А. Корнилов, Зависимость амплитудных и частотных шумов отражательного клистрона от его режима, Радиотехника и электроника 11, 2080.
20. А. Н. Малахов, Избранные вопросы теории флуктуаций в автогенераторах, Докторская диссертация, ГГУ, Горький.
21. L. J. Prescott, A. Van der Ziel, Gas discharge modulation noise in He—Ne lasers, IEEE J. QE-2, № 7, 173.
22. А. Ф. Плонский, Ю. К. Филиппский, Кварцевый генератор с импульсным возбуждением на сверхнизких субгармониках, Изв. вузов (Радиотехника) 9, 646.

1967

1. И. Л. Берштейн, И. А. Андропова, Ю. И. Зайцев, Флуктуации интенсивности и частоты излучения оптического генератора, Изв. вузов (Радиофизика) 10, 59.
2. J. A. Mullen, Comments on «the effects of noise in oscillators»; E. Haffner, Author's reply, Proc. IEEE 55, 87.
3. М. И. Жодзишский, Флуктуации в квазигармонических автогенераторах со многими степенями свободы, Радиотехника и электроника 12, 411.
4. Л. П. Зачепицкая, И. М. Клибанова, Влияние фликкерных флуктуаций емкости на случайный набег фазы автогенераторов, Изв. вузов (Радиофизика) 10, 482.
5. А. Н. Малахов, Форма спектральной линии колебания при малых флуктуациях амплитуды и частоты, Изв. вузов (Радиофизика) 10, 885.

ОПЕЧАТКИ

Стр.	Строка	Напечатано	Должно быть
104	2 сверху	$S_y(\omega) = \frac{D}{2\pi(a^2 + \omega^2)};$	$S_x(\omega) = \frac{D}{2\pi(a^2 + \omega^2)};$
146	11 снизу	флуктуации амплитуды	флуктуации частоты
146	14 снизу	флуктуации частоты	флуктуации амплитуды
191	7 сверху	$\frac{1}{\Delta\Omega^2}$	$\frac{1}{\Delta\Omega}$
193	5 снизу	$d\tau^m] \tau = 0.$	$d\tau^m]_{\tau=0}.$
200	18 сверху	$\int_{-\infty}^{+\infty}$	$\oint_{-\infty}^{+\infty}$
233	17 снизу	$\rho.$	$p.$
474	4 снизу	$\rho\tau_0 \ll 1,$	$p\tau_0 \ll 1,$
568	7 снизу	$S(\Omega),$	$S_v(\Omega),$



21512

**ФЛУКТУАЦИИ
В АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫХ
СИСТЕМАХ**

А.Н. МАЛАХОВ